

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES,

PAR

M. CH. MÉRAY,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE DIJON.

OUVRAGE HONORÉ D'UNE SOUSCRIPTION DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE MONOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

AVERTISSEMENT DE LA DEUXIÈME PARTIE.

Si le rapprochement des principes généraux les a éclairés les uns par les autres, s'il a mieux fait sentir la fécondité de la notion si simple, néanmoins si solide, d'où tous peuvent être directement tirés, il a donné au Volume précédent un caractère d'abstraction soutenue, qui a pu fatiguer le lecteur par moments. En revanche, il a déblayé le terrain pour les monographies rassemblées à leur tour dans celui-ci et dont ainsi rien d'étranger ne viendra plus obscurcir la filiation, ni embarrasser l'exposition. Leur cohésion est en outre augmentée par l'uniformité de la méthode, et par l'unité du principe dominant qui, avec des illustrations variées, y trouve, ce me semble, une sorte de justification *a posteriori*. Aux procédés de circonstance j'ai invariablement préféré, comme toujours, ceux qui se recommandent par leur caractère naturel et leur aptitude à de nombreux emplois. Eux seuls laissent à nu le fond des choses, en un mot instruisent; jamais les artifices, si rapides et si brillants qu'ils puissent être.

Les deux premiers Chapitres contiennent cette suite de propositions générales, si élégantes et si nettes, que les fondateurs de la théorie moderne des fonctions ont substituées à des notions informes. Ce sont elles qui, peut-être, mettent le mieux en évidence les liens serrés rattachant à l'Algèbre pure tout le reste de l'Analyse; c'est la facilité des méthodes y trouvant leur appui, qui doit avoir fait naître la confiance dont les nouveaux aperçus ont fini par devenir si justement l'objet. Quelques lignes m'ont suffi pour faire entrer dans le Chapitre I la démonstration de l'existence des racines de toute équation entière, que j'ai publiée récemment sous une forme élémentaire mais plus longue (1); elle me semble

(1) *Méthode directe fondée sur l'emploi des séries pour prouver l'existence*

être aussi naturelle qu'on peut le désirer. Pour les fonctions méromorphes fournissant la matière du Chapitre II, j'ai préféré à la dénomination employée dans mon *Nouveau Précis* celle bien meilleure que MM. Briot et Bouquet ont choisie plus tard. J'y ai placé la discussion des expressions indéterminées courantes, parce que le cas où elles sont rationnellement composées de fonctions olotropes et méromorphes d'une variable est le seul dans lequel il soit possible de formuler avec sûreté des règles tant soit peu générales.

J'ai expliqué, dans l'Avertissement de la première Partie, comment il m'est devenu facile de faire de toute la théorie des radicaux un simple corollaire de ma théorie générale des fonctions implicites. A part cette simplification, le Chapitre III est la reproduction du Mémoire où j'ai traité cette question d'après le fond des vues d'Abel ([1]). Quelques personnes reprocheront sûrement des longueurs à ma méthode; je n'aperçois cependant aucun moyen meilleur d'éliminer complètement les considérations trigonométriques dont le parasitisme séculaire avait envahi cette théorie, et enraciné sur un point des plus importants l'illusion qu'en Analyse l'intrusion de faits géométriques pouvait être une nécessité. Ces longueurs n'en seront plus pour qui voudra bien faire le juste total de ce que j'ai ôté de leur place. De cette manière, les racines de l'unité se présentent comme de simples accessoires, et non plus comme des objets à part dont les propriétés domineraient celles de l'équation binôme. Si l'on estimait trop peu naturelle l'intervention incessante des séries et du cheminement, je prierais d'observer qu'elle est *de toute nécessité* pour la construction des Tables qui seules, à défaut de ces considérations employées directement, rendraient pratiquement possible le calcul des valeurs imaginaires d'un radical. Au n° 106, comme au n° 13 avant lui, le lecteur trouvera (je l'espère tout au moins) les premières justifications de ce que j'ai avancé à la page 287 de la première Partie, sur la valeur ajoutée à ma théorie des fonctions implicites, par ce qu'il

---

des racines des équations entières à une inconnue, par la simple exécution de leur calcul numérique (*Bull. des Sciences math.*, 2e série, t. XV, 1891).

([1]) *Théorie des radicaux fondée exclusivement sur les propriétés générales des séries entières* (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supér.*, t. I, 1891).

y a de direct et de coulant dans son application à la résolution (théorique) des équations numériques.

Dans le Chapitre IV, j'ai reproduit en l'améliorant, la méthode suivie dans mon *Nouveau Précis* pour exposer et étendre aux racines d'une équation *olotrope* quelconque la découverte capitale de Puiseux sur les irrationnelles algébriques. Sous le nom de *Principe de la conservation du nombre des racines,* j'ai mis en saillie une observation générale qui, plus loin, donnera une grande évidence à certaines propriétés fondamentales des fonctions périodiques, et que, dans le Chapitre I tacitement, j'avais déjà utilisée partiellement pour la résolution d'une équation entière. Ce principe est un de ceux qui n'existent pas en dehors de la conception des quantités imaginaires, de ceux aussi qui, si je ne me trompe et quoique d'une manière un peu latente, dominent toute l'Analyse moderne. Les deux premiers paragraphes de ce Chapitre sont plus longs que je n'aurais voulu; mais je n'aurais su les abréger sans me départir de la rigueur dont je me suis fait une loi.

Le logarithme népérien étant la première transcendante à dérivée algébrique, j'ai tenu à donner à sa théorie des allures que l'on pût retrouver, quoique sous des complications, quand on passe aux fonctions circulaires, elliptiques, etc.; en particulier, j'ai présenté la fonction exponentielle comme le simple résultat de l'inversion analytique du logarithme. Tout en fournissant une préparation à des études moins aisées, il s'est trouvé, selon moi tout au moins, que cette marche est facile en elle-même, et encore par le retour de considérations déjà utilisées pour la fonction radicale.

Ayant mis fin à toute intervention de la Géométrie, j'ai pu sans inconvénients renverser l'ordre habituel des choses et placer l'étude de la tangente et de la cotangente, que leurs propriétés analytiques rapprochent beaucoup de l'exponentielle, avant celle du sinus et du cosinus ayant une parenté plus étroite avec les fonctions elliptiques. Par analogie avec ce qui se passe pour celles-ci, j'ai présenté ces dernières fonctions circulaires comme les plus simples de celles que fournit l'inversion des intégrales où la différentielle est composée rationnellement avec la variable d'intégration et la racine carrée d'un trinôme du deuxième degré. De cette manière, et tout en restant placé au point de vue préféré dans le calcul pratique de ces intégrales, on aperçoit nettement la

nature analytique du sinus et du cosinus. Mais, dans l'exposition de leurs propriétés, je me suis bien gardé d'abandonner pour de plus générales les méthodes si simples qui dérivent de leur étroite connexité avec la fonction exponentielle. J'aurais abrégé sensiblement le Chapitre VII, si, devant employer la même méthode pour les fonctions elliptiques, je n'eusse tenu à en expliquer le mécanisme sur les thèmes les plus simples. Je ne crois donc pas qu'il y ait là des longueurs inutiles; il me semble en outre qu'on voit bien mieux le fond des choses en procédant ainsi.

Dans l'étude des fonctions elliptiques, beaucoup d'auteurs ont cessé de prendre l'équation différentielle pour point de départ. J'ignore pourquoi, si ce n'est à cause des difficultés que paraissait présenter, dans cet ordre d'idées, la démonstration de la non-nullité du *moment* des périodes. Mais ayant réussi à établir fort simplement ce point essentiel ([1]), jugeant artificielles et beaucoup moins bonnes les méthodes d'exposition où le rôle dominant est conféré aux fonctions Θ, je me suis contenté de l'équation différentielle à l'époque éloignée déjà, où j'ai rédigé pour moi-même et en partie pour mon enseignement ce que j'ai placé dans les Chapitres VIII à XII. Je crois avoir amélioré plusieurs parties de cette théorie. Par exemple, je raisonne sans cesse sur la fonction elliptique la plus générale, et je réduis ainsi à un fort petit nombre cet amas de formules embarrassées, qui sont habituellement présentées indépendamment les unes des autres, que personne ne retient, dont beaucoup, sans doute, sont à peine lues. De cette manière, on aperçoit bien mieux aussi l'origine des propriétés spéciales des fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$, de celles en particulier qui ont fait choisir la première pour type de toutes les fonctions elliptiques. Sur toute cette théorie, M. Riquier a bien voulu me faire part d'observations variées dont plusieurs m'ont été d'un grand profit.

L'espace me manquait pour pousser la théorie des fonctions eulériennes au delà de ses éléments rendus si nets par des recherches relativement récentes.

L'exiguïté de mon cadre et la destination de ces Leçons s'oppo-

---

([1]) *Sur l'existence effective des deux périodes des fonctions elliptiques* (*Ann. scient. de l'École Normale sup.*, 3e série, t. I, 1884).

saient également à ce que j'y fisse entrer des développements sur les singularités *essentielles,* objet des travaux de M. Weierstrass et d'autres géomètres à sa suite.

MM. J. Tannery dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* C. Juel dans le *Nyt Tidsskrift for Mathematik,* C. Bourlet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques,* E. Chailan dans la *Revue bibliographique universelle,* A. Morel dans le *Cosmos,* J. de Séguier dans les *Études philosophiques, etc.,* E. Humbert dans la *Revue générale des Sciences,* H. Duport dans la *Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur,* ont honoré mon premier Volume d'appréciations dont l'indulgence est chose peu accoutumée pour moi, et dont je leur exprime cordialement toute ma reconnaissance. Leur courtoisie a sûrement exagéré leurs éloges; je crois cependant pouvoir retenir comme un encouragement précieux, comme une espérance, l'approbation réfléchie qui semble en faire le fond. M. Juel assurant par exemple qu' « ... après s'être habitué au nouveau vocabu- » laire, on lit l'Ouvrage avec une grande facilité ... », M. Chailan renchérissant encore (1), éloignent de moi la crainte, exprimée quelquefois, que le fil de mes raisonnements ne soit malaisé à suivre. Déjà M. Riquier a fait à mes *Principes généraux* l'honneur de les prendre pour base générale de son enseignement à la Faculté des Sciences de Caen; c'est là un autre suffrage d'une valeur considérable, dont mon excellent et habile Collègue a rehaussé le prix en m'autorisant à le proclamer.

La bienveillance de mes critiques ira sans doute jusqu'à me permettre d'opposer quelques mots à des affirmations de leur part qui ne m'ont pas encore convaincu. M. Tannery signale les développements trigonométriques parmi les modes de représentation des fonctions qui pourraient faire concurrence aux séries entières. Outre l'extrême rareté des circonstances où ils sont utiles, je rappellerai que, sans l'intervention des séries entières, la notion des fonctions circulaires, leurs matériaux essentiels, serait *analytiquement* inabordable (2). Je suis infiniment plus disposé

---

(1) « ... Si le lecteur veut bien oublier tout ce qu'il sait, sauf les opérations » sur les polynômes et les lois de la logique, *puis admettre sans réticence le prin-* » *cipe fondamental de M. Méray,* il trouvera que l'étude de l'Analyse, ainsi pré- » sentée, est toute simple et pleine de charmes ... » (*Rev. bibl. univ.,* janv. 1895, p. 41). La justesse de cet éloge me procurerait la récompense la plus précieuse de mon travail; je ne pourrais cependant souscrire au passage que j'ai souligné si, contrairement à l'intention de M. Chailan, il devait être entendu dans le sens que ma théorie, partageant l'infirmité commune à celles que j'ai abandonnées, reposerait sur quelque *Postulatum spécial,* étranger aux axiomes nécessaires à l'*Arithmétique des nombres entiers;* je pense effectivement que la rigueur de mes raisonnements ne le cède jamais à celle de la démonstration vulgaire du Binôme de Newton, par exemple.

(2) En particulier, un point fondamental de la théorie courante de ces fonctions est la propriété du rapport du sinus à l'arc de tendre vers 1 quand ce dernier est

que M. Tannery ne le suppose, à croire que « la *chose en soi* est une fonction » analytique », c'est-à-dire, en un langage précis, à voir une grande loi de la nature dans l'aptitude des séries entières à nous raconter mathématiquement tout ce qui se passe dans le monde matériel. Cette loi, je suis bien forcé de l'admettre, puisque dans les expériences et aussi bien dans tous les calculs qui ne sont pas des romans, rien jusqu'ici n'a pu la mettre en défaut. C'est dire que je ne puis éprouver les appréhensions de M. Juel sur l'insuffisance possible de la notion des séries entières dans les questions de Physique mathématique. Pour pouvoir raisonner sur ce terrain, *il faut de toute nécessité hasarder la* PRÉSUPPOSITION que les fonctions naturelles sont continues, même douées de dérivées, intégrables, ... A quel danger plus effrayant, je le demande un peu, pourrait-on bien s'exposer, si au lieu de tout cela on prenait leur simple « olotropie » pour autre axiome, puisque, *dans les formules susceptibles d'application,* cette propriété n'est pas moins constante pour elles que la continuité, etc.?

C'est répéter enfin que la conception des fonctions, développée systématiquement en dehors de la notion des séries entières (immédiate ou

---

infiniment petit, propriété ayant pour point d'appui, *nécessaire* dans cet ordre d'idées, celle appartenant à tout arc de surpasser sa corde en longueur, d'être inférieur au contraire, quand il appartient à une ligne plane et qu'il est convexe, à tout arc analogue l'enveloppant.

La comparaison numérique de deux longueurs est sans doute directement possible quand elles sont indéfiniment sécables en parties géométriquement superposables, c'est-à-dire quand elles sont rectilignes ou découpées soit sur une même circonférence, soit sur une même hélice. Mais ces trois cas sont les seuls de leur genre, et en dehors d'eux la comparaison ne peut s'effectuer autrement que par celle des longueurs variables de lignes brisées à côtés infiniment petits, inscrites convenablement dans les arcs considérés; *avant tout il faut prouver que chacune de ces longueurs variables est douée de quelque limite.* Cette preuve est des plus faciles à faire nettement et rigoureusement, quand il s'agit d'un arc dépourvu de points singuliers, c'est-à-dire entièrement décomposable en parties pour chacune desquelles deux des coordonnées d'un point sont exprimables en fonctions *olotropes* de son autre coordonnée (tels sont, qu'on veuille ou non en convenir, ceux que l'on trouve sur *toutes* les lignes prises en quelque considération jusqu'ici), et quand on fait appel aux propriétés les plus simples des *séries entières*. Autrement je la déclare absolument impossible à fournir, sinon (et encore!) par des moyens infiniment plus gauches et encombrants, *n'embrassant d'ailleurs rien de plus en fait.* A qui le désirera je montrerai l'infirmité à peu près incurable des raisonnements de ce genre qui se répètent pour ainsi dire partout.

Admettons encore que la mesure des figures courbes dont on se contente au Baccalauréat et même plus haut soit irréprochable : je demanderai toujours quels titres spéciaux la Géométrie peut invoquer pour intervenir dans l'Analyse plus que la Mécanique, la Physique, la Chimie, etc., quelle fondation solide on pourra bien lui trouver si, au lieu de l'appuyer sur l'Analyse, on veut échafauder celle-ci sur elle.

médiate), n'est pour moi (comme la Géométrie non-euclidienne, par exemple) qu'une fantaisie de l'imagination mathématique, fantaisie brodée même sur des vues imparfaites de la nature *positive* des fonctions, obscure et décevante, fastidieuse au possible. Je ne songe pas, je n'ai jamais songé à mettre en cause le talent des géomètres qui ont employé leurs forces à ce labeur ingrat; la plupart ont d'ailleurs des titres autrement sérieux à notre admiration. Mais le seul secret des choses qui *existent*, avec lesquelles le genre humain est *condamné à compter*, est trop difficile à pénétrer, leur étude par surcroît est trop vaste, trop attachante, pour qu'il puisse être bien sage à nous de lâcher la proie pour l'ombre, en consumant nos efforts dans la conquête d'un monde imaginaire.



LEÇONS NOUVELLES

SUR

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE

ET SES

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE MONOGRAPHIQUE DES PRINCIPALES FONCTIONS D'UNE SEULE VARIABLE.

CHAPITRE I.

FONCTIONS OLOTROPES D'UNE SEULE VARIABLE EN GÉNÉRAL.

Zéros simples et multiples.

1. Les fonctions d'une seule variable ont une grande importance, soit parce que leurs propriétés spéciales sont nécessaires à l'étude de celles des autres, soit parce que la facilité relative de leur théorie a permis d'en découvrir un nombre bien plus grand. Nous commençons naturellement par celles qui demeurent olotropes dans des aires données, en signalant d'avance au lecteur la presque identité de beaucoup de propositions avec les principes de la *Théorie des équations algébriques*.

Si $f(x)$, supposée olotrope dans l'aire quelconque S, *mais non identiquement nulle, s'y évanouit pour $x = a$, on a identiquement*

$$f(x) = (x-a)^m f_0(x), \tag{1}$$

m désignant quelque entier positif et $f_0(x)$ une fonction qui

est aussi olotrope dans toute l'aire S, *mais qui ne s'évanouit plus pour* $x = a$.

Par hypothèse $f(a) = 0$, mais les dérivées de $f(x)$ ne peuvent pas s'évanouir toutes en a, puisque nous supposons cette fonction non identiquement nulle (187*) ([1]). En appelant donc m l'ordre de la première des quantités $f'(a), f''(a), \ldots$ qui n'est pas nulle, la formule de Taylor donne immédiatement la relation (1), pourvu que l'on y prenne

$$(2) \qquad f_0(x) = \frac{f^{(m)}(a)}{1.2\ldots m} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{1.2\ldots(m+1)}(x-a) + \ldots.$$

Cette nouvelle fonction est olotrope dans toute l'aire S, savoir : 1° dans une aire partielle S_a délimitée autour de a de manière que la distance de l'un quelconque de ses points à a reste inférieure à quelque quantité positive, inférieure elle-même au rayon de convergence de cette série entière en $x - a$, parce qu'elle y est précisément représentée par la somme de la même série (141*); 2° dans le surplus de l'aire S, parce que $(x-a)^m$ ne s'y évanouit pas et que, d'après la relation (1), $f_0(x)$ est de la forme

$$\frac{f(x)}{(x-a)^m},$$

rapport de deux fonctions, olotropes dans ce surplus, dont la seconde ne peut s'y annuler (250*, III).

Pour $x = a$, la formule (2) donne d'ailleurs

$$f_0(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{1.2\ldots m},$$

quantité que nous supposons non $= 0$.

2. *Réciproquement, si l'identité* (1) *a lieu,* $f_0(x)$ *y désignant une fonction olotrope et non nulle en* $x = a$, *cette valeur de* x *annule* $f(x)$ *et ses* $m - 1$ *premières dérivées, mais non la* $m^{ième}$.

Pour $x = a$, la fonction $\varphi(x) = (x-a)^m$ s'annule avec ses $m - 1$ premières dérivées, mais $\varphi^{(m)}(a) = 1.2\ldots m$ est essentiel-

---

(1) Dans ce Volume, un numéro de renvoi visera la première Partie de l'Ouvrage ou celle-ci, selon qu'il sera affecté d'un astérisque ou d'aucun.

lement non $= 0$. Cela posé, en appelant k un indice quelconque, on a généralement (255*)

$$f^{(k)}(a) = \Sigma \frac{1.2\ldots k}{1.2\ldots p.1.2\ldots q} \varphi^{(p)}(a) f_0^{(q)}(a), \quad (p+q=k).$$

Si $k < m$, on a toujours aussi $p < m$, et chaque terme de ce développement contient le facteur nul $\varphi^{(p)}(a)$. Si $k = m$, le terme en $\varphi^{(m)}(a) f_0(a)$ n'est pas nul, mais les autres le sont tous parce que p y est $< k$. D'où résulte évidemment ce que nous énoncions.

3. Une quantité telle que a, *racine* de l'équation

$$f(x) = 0,$$

se nomme un *zéro* de $f(x)$, et l'entier correspondant m, le *degré de multiplicité* de cette racine ou zéro; d'où les dénominations de zéro (ou racine) *simple, double, triple,* ... selon que $m = 1$, $2, 3, \ldots$.

Le degré de multiplicité est ainsi caractérisé par deux propriétés dont chacune entraîne l'autre : il est l'ordre de la première des dérivées successives de $f(x)$ que le zéro n'annule pas, et il est aussi bien l'exposant de la puissance du binôme $x - a$ qui divise $f(x)$ en donnant un quotient olotrope et non nul en $x = a$.

Si k est $< m$, a est encore un zéro de $f^{(k)}(x)$, mais de degré de multiplicité $m - k$ seulement; effectivement, pour $x = a$, $f^{(k)}(x)$ s'annule et toutes ses dérivées jusqu'à celle d'ordre $m - k$, qui est $f^{(m)}(x)$, exclusivement.

Au contraire, le degré de multiplicité s'élève à $m + 1$ pour $F(x)$, *détermination de $\int f(x)dx$ qui s'annule en $x = a$*; car, quel que soit k, $F^{(k+1)}(x) = f^{(k)}(x)$.

On a quelquefois intérêt à considérer fictivement une valeur de x n'annulant pas $f(x)$, *comme un zéro de cette fonction dont le degré de multiplicité serait* $= 0$.

4. *Si $f(x)$ est olotrope dans une aire limitée* S, *ses zéros numériquement distincts y sont en nombre limité, ou bien cette fonction y est identiquement nulle.*

Cette proposition est un corollaire évident de celle qui a été

démontrée pour les fonctions de variables en nombre quelconque (188*).

5. *Sous les mêmes conditions, $f(x)$ ne peut, dans l'aire* S, *reprendre une même valeur* A *qu'un nombre de fois limité, à moins de s'y réduire identiquement à cette constante.*

Car la différence $f(x) - A$ étant, comme $f(x)$, olotrope dans l'aire S, s'y annule un nombre de fois limité, ou bien identiquement (4).

6. *Sous les mêmes conditions, en supposant $f(x)$ non identiquement nulle et en appelant*

$$(3) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g$$

les zéros numériquement distincts que cette fonction possède dans l'aire S, *en nombre essentiellement limité* (4), *puis*

$$(4) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_g$$

leurs degrés de multiplicité, on a la formule

$$(5) \qquad f(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_g)^{m_g} f_g(x),$$

$f_g(x)$ désignant quelque fonction, olotrope dans l'aire S *et n'y ayant plus aucun zéro.*

On a (1)

$$(6) \qquad f(x) = (x - a_1)^{m_1} f_1(x),$$

où la fonction olotrope $f_1(x)$ n'a plus le zéro a_1, mais admet tous les autres aux mêmes degrés de multiplicité. Car, en écrivant

$$f_1(x) = f(x)(x - a_1)^{-m_1},$$

en remarquant que le second facteur est olotrope en a_2 par exemple, sans que lui, ni aucune de ses dérivées, s'y évanouisse, et en raisonnant comme au nº 2, on prouvera que pour ce produit l'ordre de la première dérivée qui ne s'y évanouit pas est le même que pour son premier facteur. On aura donc aussi

$$(7) \qquad f_1(x) = (x - a_2)^{m_2} f_2(x),$$

$f_2(x)$ ayant, sauf a_2, tous les zéros de $f_1(x)$ aux mêmes degrés de multiplicité, c'est-à-dire tous ceux de $f(x)$, sauf a_1 et a_2; puis de même

$$(8)\qquad \begin{cases} f_2(x) \quad = (x-a_3)^{m_3} f_3(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{g-1}(x) = (x-a_g)^{m_g} f_g(x), \end{cases}$$

où $f_g(x)$ est olotrope, mais dépouillée de tout zéro.

Cela posé, il suffit de multiplier membre à membre la suite des identités (6), (7), (8), et de supprimer les facteurs communs aux deux membres, pour arriver à la relation (5) qu'il fallait établir.

7. Si $f_g(x)$ est une fonction olotrope et indéterminée, mais sans aucun zéro dans l'aire S, le second membre de la formule (5) est ainsi le type des fonctions qui sont olotropes dans l'aire S et y ont pour zéros les quantités (3) aux degrés de multiplicité (4).

A l'aide du raisonnement que nous exposerons seulement aux n°s 34 et 35 *inf.* pour en éviter la répétition, on prouve que *cette expression ne peut se réduire identiquement à une constante non* $= 0$, *à moins que l'on n'ait* $m_1 = m_2 = \ldots = m_g = 0$ *et que* $f_g(x)$ *ne se réduise à la constante dont il s'agit,* et aussi que *la décomposition de* $f(x)$ *résultant d'une formule analogue à* (5) *ne peut jamais donner que les mêmes facteurs.*

7 *bis*. Si $f(x)$ est olotrope en a avec

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0, \qquad f^{(m)}(a) \text{ non } = 0,$$

et si l'on attribue successivement à x deux accroissements infiniment petits $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$ à partir de a, la formule (1) donne

$$\frac{\Delta_2 f}{\Delta_1 f} = \frac{f_0(a+\Delta_2 x)}{f_0(a+\Delta_1 x)} \left(\frac{\Delta_2 x}{\Delta_1 x}\right)^m.$$

Par conséquent, si $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x$ sont tellement choisis que la clef de leur rapport (72*) tende vers une certaine limite ξ, la clef de celui de $\Delta_1 f$, $\Delta_2 f$ tendra aussi vers une limite φ pour laquelle on aura toujours

$$\varphi = \xi^m,$$

car le premier facteur du second membre tend forcément vers 1.

Cela posé, si l'on a égard aux premières propriétés des tangentes aux lignes planes, ainsi qu'aux représentations graphiques de la multiplication et de la division imaginaires (**86***), on en conclura facilement que *deux lignes décrites successivement par x à partir du point a (ordinaire pour chacune) et les deux lignes correspondantes décrites par la valeur de $f(x)$ se coupent mutuellement sous des angles dont le second est égal à m fois le premier.*

Cette observation est sans portée théorique, mais elle explique certaines particularités graphiques de la discussion des fonctions olotropes d'une seule variable. Comme on a $m = 1$, sauf en des points exceptionnels (**195***), *ces deux angles sont généralement égaux.*

Fonctions indéfiniment olotropes.

8. *Quand la fonction $f(x)$ est olotrope dans toute l'étendue du plan servant à la notation graphique de x, elle est certainement infinie pour quelque valeur infinie de la variable, ou sinon elle dégénère en une constante.*

Comme dans la formule de Taylor appliquée à une pareille fonction, rien ne limite ni la valeur initiale de x, ni le module de l'accroissement (**206***), $f(x)$ est pour toute valeur de x développable par la formule de Maclaurin et, en conséquence, représentable par une même série entière en x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

de convergence illimitée.

Si donc la somme $f(x)$ de cette série ne se réduit pas identiquement à la valeur a_0 qu'elle prend pour $x = 0$, l'un au moins des autres coefficients a_1, a_2, ... n'est pas nul (**191***); on en conclut que $f(x)$ est bien infinie pour quelque valeur infinie de x (**133***).

9. *Dans la même hypothèse, et en appelant* X *une constante choisie à volonté, il arrive de trois choses l'une : ou bien l'équation numérique en u*

$$f(u) = \mathrm{X} \qquad (1)$$

possède quelque racine, ou bien quelque valeur infinie de u donne

$$(2) \qquad \lim f(u) = X,$$

ou bien $f(x)$ dégénère en une constante.

Si le premier fait énoncé n'a pas lieu, ni le troisième non plus, la fonction de u,

$$(3) \qquad f(u) - X,$$

n'a aucun zéro et ne se réduit pas à une constante; de plus, comme elle est indéfiniment olotrope, son inverse arithmétique l'est pareillement (250*, II) et ne dégénère pas en une constante. On en conclut par ce qui précède (8) l'existence de quelque valeur infinie de u, rendant infinie l'expression

$$\frac{1}{f(u) - X},$$

rendant par suite infiniment petit son dénominateur (3), ou bien, ce qui revient au même, donnant la relation (2).

10. Les deux propositions précédentes ont lieu et se démontrent de la même manière pour un nombre quelconque de variables indépendantes. Elles montrent que *toutes les valeurs imaginables, même l'infini, si l'on peut parler ainsi, sont accessibles à une fonction indéfiniment olotrope (ne dégénérant pas en une constante).*

11. *Sous les mêmes conditions comprenant en outre pour $f(u)$ celle de ne pas dégénérer en une constante, et en appelant*

$$(4) \qquad \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}'', \quad \ldots$$

les zéros que peut posséder $f'(u)$, en posant

$$(5) \qquad \mathfrak{a}' = f(\mathfrak{b}'), \qquad \mathfrak{a}'' = f(\mathfrak{b}''), \qquad \ldots$$

et

$$(6) \qquad x_0 = f(u_0),$$

où u_0 est une quantité non égale à quelque terme de la suite (4), *mais d'ailleurs arbitraire, l'équation numérique* (1) *n'a pas d'autres racines que les termes de la suite* (4) *satisfaisant par hasard à cette équation, avec les valeurs acquises au bout de tous les chemins tracés de x_0 à* X *sans contenir aucun des points* (5), *par la fonction implicite $u = \psi(x)$ que définit l'équation*

$$(7) \qquad f(u) = x$$

accompagnée de la condition initiale

$$u = u_0 \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

dont l'égalité (6) *autorise l'adoption.*

I. Soit U une racine de l'équation numérique (1), ne se trouvant pas dans la suite (4). Comme dans tout espace limité, les quantités (4), zéros de $f'(u)$, ne peuvent être contenues qu'en nombre essentiellement limité, parce que $f'(u)$ y est olotrope mais non identiquement nulle (4), on peut évidemment découper dans le plan servant à la notation graphique de u une aire limitée S_u contenant les points u_0, U à la fois, mais aucun des points (4), et de configuration telle qu'on puisse y tracer de u_0 à U une ligne brisée dont les côtés sont de petitesse arbitraire.

II. *On peut assigner une quantité positive* Υ *telle, que deux racines de l'équation* (7), *résolue numériquement par rapport à u pour une valeur quelconque de x, soient égales toutes les fois que l'une d'elles est intérieure à S_u et que le module de leur différence ne surpasse pas* Υ.

C'est une simple conséquence particulière du théorème général (308*) qui est applicable ici; effectivement $f(u) - x$, premier membre de l'équation (7) mise sous la forme normale, est une fonction indéfiniment olotrope, et sa dérivée par rapport à u se réduit à $f'(u)$, fonction indépendante de x, pour cette cause ainsi que par hypothèse, non $= 0$ pour toute valeur de x associée avec toute valeur de u tombant dans S_u.

III. Considérons maintenant l'équation différentielle immédiate

$$\frac{du}{dx} = F(u) = \frac{1}{f'(u)}, \tag{8}$$

dont toutes les intégrales, évidemment ordinaires, comprennent en particulier les diverses fonctions implicites fournies par la résolution de l'équation finie (7) (307*) (309*).

Comme son second membre est d'une part indépendant de x, d'autre part fonction olotrope de u dans l'aire S_u parce que $f'(u)$ l'est elle-même sans jamais s'y évanouir (250*, II), on peut, en vertu de la théorie générale des équations différentielles totales (301*), et cela quelle que soit x, assigner une quantité positive Δ, telle que toute intégrale de cette équation ait un olomètre au moins égal à Δ tant que sa valeur tombe à l'intérieur de l'aire S_u.

En vertu de la même théorie (301*, III) et pour la première des raisons invoquées ci-dessus, le module du coefficient de $[x-x^{(0)}]^m$, dans le développement de l'intégrale $\psi^{(0)}(x)$ se réduisant à $u^{(0)}$ pour $x = x^{(0)}$, est inférieur à une quantité positive de la forme

$$\mathfrak{G}\mathfrak{g}^m,$$

où $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{g}$ sont deux constantes dépendant seulement de la configuration de l'aire S_u et de la nature de la fonction $F(u)$; on peut donc, pour toute valeur de $u^{(0)}$ tombant dans l'aire S_u et quelle que soit $x^{(0)}$, assigner une quantité positive $\mathcal{E} < \Delta$ telle que pour tout module de $x - x^{(0)} \leqq \mathcal{E}$ le module de $\psi^{(0)}(x) - u^{(0)}$ soit $< \frac{\Upsilon}{2}$ (II).

IV. Comme enfin on peut écrire $f(u+k) - f(u) = k\chi(u, k)$, où, pour toute valeur de u tombant dans S_u et pour tout module de k inférieur à une certaine quantité positive,on peut assigner quelque limite supérieure à mod $\chi(u, k)$ (200*), il est possible de tracer de u_0 à U, dans l'aire S_u, une ligne brisée

$$[u_0 u_1 u_2 \ldots u_i \ldots \mathrm{U}],$$

dont les côtés soient tous $< \frac{\Upsilon}{2}$ en donnant quel que soit i

$$\operatorname{mod}[f(u_{i+1}) - f(u_i)] < \mathcal{E}. \tag{9}$$

V. Tout cela posé, construisons dans le plan servant à la notation graphique de x la ligne brisée

$$[x_0 x_1 x_2 \ldots x_i \ldots X]$$

ayant pour sommets les points

$$x_0 = f(u_0), \quad x_1 = f(u_1), \quad \ldots, \quad x_i = f(u_i), \quad \ldots \quad X = f(U).$$

La quantité u_0 tombant dans l'aire S_u et l'inégalité (9) donnant

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0) < \mathcal{E} < \Delta,$$

on peut faire $x = x_1$ dans le développement en série entière par rapport à $x - x_0$ de la fonction implicite $u = \psi(x)$ définie dans notre énoncé, puisqu'elle n'est autre chose que l'intégrale de l'équation différentielle (8) complétée par la condition initiale $u = u_0$ pour $x = x_0$; et en appelant u'_1 la valeur correspondante $\psi(x_1)$ de cette fonction, l'inégalité précédente entraînera encore

$$\operatorname{mod}(u'_1 - u_0) < \frac{\Upsilon}{2} \quad \text{(III)},$$

Mais on a par hypothèse

$$\operatorname{mod}(u_1 - u_0) < \frac{\Upsilon}{2};$$

on a donc aussi

$$\operatorname{mod}(u'_1 - u_1) = \operatorname{mod}[(u'_1 - u_0) - (u_1 - u_0)] < \Upsilon,$$

d'où

$$u'_1 = u_1 \quad \text{(II)},$$

parce que u_1, u'_1 sont deux racines de l'équation numérique

$$f(u) = x_1,$$

dont la première tombe dans S_u et dont la différence a un module $< \Upsilon$.

Partant de là, on démontrera successivement de la même manière que les quantités

$$\psi(x_2), \quad \psi(x_3), \quad \ldots, \quad \psi(x_i), \quad \ldots, \quad \psi(X)$$

existent et sont égales respectivement à

$$u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_i, \quad \ldots, \quad \mathrm{U}.$$

Or l'égalité finale

$$\mathrm{U} = \psi(\mathrm{X})$$

est précisément celle que nous voulions établir.

12. Ce théorème est d'une utilité extrême dans la résolution des équations de la forme (1). *Il permet effectivement de calculer exactement les racines simples d'une pareille équation, dès que les racines de la première équation dérivée sont connues seulement avec une approximation suffisante. Il peut donc aussi fournir indirectement les racines multiples, puisqu'elles sont toujours simples pour quelque équation dérivée.*

Nous verrons plus tard (**163**, **160**, *inf.*) que les racines multiples peuvent être obtenues par cheminement direct, et qu'on peut même supposer $f'(u_0) = 0$.

Résolution théorique des équations entières à une inconnue.

13. *Si*

$$f(u) = \mathrm{A}_0 + \mathrm{A}_1 u + \ldots + \mathrm{A}_\mathrm{M} u^\mathrm{M}$$

est un polynôme entier en u de degré effectif $\mathrm{M} > 0$, *c'est-à-dire où le coefficient* A_M *est non* $= 0$, *l'équation numérique*

$$(1) \qquad f(u) = 0$$

offre des racines distinctes dont la somme des degrés de multiplicité est précisément égale à M, *et elle n'en a point d'autres.*

Comme $f(u)$ est une fonction indéfiniment olotrope de u, qui, à cause de $\mathrm{M} > 0$, ne dégénère pas en une constante et qui, pour toute valeur infinie de u, devient infinie (**150***), partant non infiniment petite, l'équation (1) possède nécessairement quelque racine a_1 (**9**). De plus, le degré de multiplicité m_1 de cette racine ne peut surpasser M, parce que $f^{(\mathrm{M})}(u) = 1.2\ldots\mathrm{M}.\,\mathrm{A}_\mathrm{M}$ est une constante supposée non $= 0$.

On a donc identiquement (1)

$$f(u) = (u - a_1)^{m_1} f_1(u),$$

la fonction

$$f_1(u) = \frac{f^{(m_1)}(a_1)}{1.2\ldots m_1} + \frac{f^{(m_1+1)}(a_1)}{1.2\ldots(m_1+1)}(u-a_1) + \ldots + \frac{f^{(M)}(a_1)}{1.2\ldots M}(u-a)^{M-m_1}$$

qui ne s'annule plus pour $u = a_1$ étant un polynôme entier en u dont le degré effectif est $M - m_1$ et où le coefficient de u^{M-m_1} est

$$A_M = \frac{1.2\ldots M.A_M}{1.2\ldots M}.$$

Si $m_1 = M$, notre théorème résulte de l'identité

$$f(u) = A_M(u - a_1)^M.$$

Sinon, et en raisonnant de la même manière, on trouvera successivement

$$f_1(u) = (u - a_2)^{m_2} f_2(u),$$
$$f_2(u) = (u - a_3)^{m_3} f_3(u),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

jusqu'à

$$f_{g-1}(u) = (u - a_g)^{m_g} f_g(u) = A_M(u - a_g)^{m_g},$$

où $m_g = M - m_1 - m_2 - \ldots - m_{g-1}$, et où les quantités $a_2, a_3, \ldots, a_g$ sont toutes inégales les unes aux autres ainsi qu'à a_1.

Ces relations conduisent immédiatement à l'identité

$$(2) \qquad f(u) = A_M(u - a_1)^{m_1}(u - a_2)^{m_2}\ldots(u = a_g)^{m_g}$$

d'où résulte notre théorème, à cause de $m_1 + m_2 + \ldots + m_g = M$ et parce que A_M est une constante non $= 0$.

14. La formule (2) montre que *tout polynôme entier à une variable est exactement décomposable en facteurs linéaires* (*distincts ou non*). Si le lecteur s'en souvient, c'est la proposition capitale dont l'existence est assurée par l'introduction des quantités imaginaires dans les spéculations analytiques; nous l'avons dit pour la première fois aux nos 55*, 68*; le suivant en contient une autre démonstration toute différente.

15. Le théorème du n° 11 va nous procurer les ressources

nécessaires pour calculer effectivement toutes les racines de l'équation entière (1). Mais auparavant, et vu l'importance de la question, il n'est pas sans intérêt de voir *qu'à lui seul il suffit, dans le cas qui nous occupe, pour établir l'existence de quelque racine appartenant à l'équation* (1), *c'est-à-dire l'équivalent de la proposition fondamentale du n° 9.*

I. Comme $f'(u)$ est indéfiniment olotrope et non identiquement nulle, l'équation

$$f'(u) = 0 \tag{3}$$

n'a, dans un espace limité, que des racines en nombre limité (4), et l'on peut trouver sans la moindre difficulté une quantité u_0 donnant

$$f'(u_0) \text{ non } = 0.$$

Cette quantité ayant été choisie à volonté, nous poserons

$$f(u_0) = x_0, \tag{4}$$

et nous appellerons R_x une quantité positive quelconque supérieure à $\operatorname{mod} x_0$.

II. Comme $\operatorname{mod} f(u)$ est toujours infini en même temps que $\operatorname{mod} u$ (150*), on peut assigner une quantité positive R_u telle, que pour

$$\operatorname{mod} u \geqq R_u$$

on ait toujours

$$\operatorname{mod} f(u) > R_x > \operatorname{mod} x_0. \tag{5}$$

III. Dans les plans servant à la notation graphique de u et de

$$x = f(u), \tag{6}$$

décrivons, des origines O_u, O_x pour centres, avec R_u, R_x pour rayons, les cercles

$$[O_u, R_u], \quad [O_x, R_x] \tag{7}$$

dont le second contient évidemment x_0, dont le premier, par suite,

contient u_0, sans quoi et à cause de l'inégalité (5), $x_0[=f(u_0)]$ serait extérieur au second.

L'équation (3), ne pouvant avoir, à l'intérieur du premier cercle, que des racines en nombre limité, parce que $f'(u)$ y est olotrope mais non identiquement nulle, n'y possède à plus forte raison qu'un nombre limité de racines

$$(8) \qquad \mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}^{(g)},$$

faisant tomber à l'intérieur du second cercle les quantités

$$(9) \qquad f(\mathfrak{b}') = \mathfrak{a}', \qquad \ldots, \qquad f[\mathfrak{b}^{(g)}] = \mathfrak{a}^{(g)}.$$

Si l'une de ces quantités $\mathfrak{a}^{(i)}$ est nulle, l'équation (1) possède la racine $\mathfrak{b}^{(i)}$, conformément à l'énoncé du théorème du n° 9 que nous avons en vue.

IV. Si, au contraire, toutes les quantités (9) sont différentes de o, appelons ρ_x une quantité positive inférieure aux distances des points correspondants soit à l'origine $x=0$, soit à x_0, soit à la circonférence $[O_x, R_x]$ ainsi qu'aux moitiés de toutes les distances mutuelles des mêmes points.

A cause de la continuité de $f'(u)$, on peut assigner une autre quantité positive ρ_u inférieure à la fois aux plus courtes distances des points (8) à la circonférence $[O_u, R_u]$, aux moitiés de toutes leurs distances mutuelles et, en outre, assez petite pour que, quel que soit i, le module de

$$f[\mathfrak{b}^{(i)}+k]-f[\mathfrak{b}^{(i)}]=f[\mathfrak{b}^{(i)}+k]-\mathfrak{a}^{(i)}$$

soit inférieur à ρ_x toutes les fois que mod k est $\leqq \rho_u$.

Il est clair que les cercles de rayon commun ρ_u, qui ont les points (8) pour centres, sont tous extérieurs les uns aux autres mais en même temps intérieurs au cercle $[O_u, R_u]$, que les cercles de rayon ρ_x, ayant les points (9) pour centres, offrent la même disposition par rapport les uns aux autres et au cercle $[O_x, R_x]$, qu'en outre aucun de ces derniers cercles ne contient les points $x=x_0$, $x=0$. Il est clair, par suite, que l'ablation faite aux cercles (7), de ceux qui viennent d'être définis respectivement, laisse deux aires limitées (perforées)

$$S_u, \; S_x,$$

jouissant de cette propriété que la première ne contient aucune racine de l'équation (3), que la seconde contient les points $x = x_0$, $x = 0$ pouvant y être réunis par une ligne brisée dont les côtés sont de petitesse arbitraire, qu'enfin le point (6) est toujours en dehors de la seconde quand u est en dehors de la première.

V. Cela posé, la fonction implicite u que fournit la résolution de l'équation finie

$$f(u) - x = 0,$$

accompagnée de la condition initiale

$$u = u_0, \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

rendue admissible par l'égalité (4), est localement olotrope dans toute l'aire S_x (310*), parce que le premier membre de cette équation est fonction olotrope de x, u dans cette aire et dans S_u, parce que $f'(u)$ sa dérivée partielle par rapport à u ne peut s'y évanouir et parce que la valeur de u ne peut sortir de S_u aussi longtemps que x reste dans S_x.

Il suffit donc de calculer la valeur de u au bout d'un chemin tracé arbitrairement de $x = x_0$ à $x = 0$ dans l'aire S_x, pour obtenir une racine de l'équation (1); c'est ce que nous voulions prouver.

16. Une méthode élémentaire bien connue permettant de décomposer l'équation entière quelconque (1) en d'autres n'ayant toutes que des racines simples respectivement égales, pour la première aux racines simples de l'équation proposée, pour la seconde, la troisième, ... à ses racines doubles, triples, ..., nous pouvons admettre que *cette équation n'a que des racines simples* et procéder comme il suit à sa résolution effective.

I. En supposant connues les racines

(10) $$\mathfrak{b}', \quad \mathfrak{b}'', \quad \ldots$$

de l'équation (3) qui n'est que de degré effectif $M - 1$, en appelant

(11) $$\mathfrak{a}', \quad \mathfrak{a}'', \quad \ldots, \quad \mathfrak{a}^{(G)}$$

celles des quantités $f(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}$ (toutes non nulles) qui sont numériquement distinctes, en désignant toujours par u_0 une valeur de u

non égale à quelque terme du groupe (10) et par x_0 la quantité $f(u_0)$, il est évident que la fonction implicite définie ci-dessus (15, V) est localement olotrope aussi longtemps que x ne prend aucune des valeurs (11), et qu'à partir de chaque nouvelle valeur initiale x_i de cette variable, son développement en série entière par rapport à $x-x_i$ admet pour rayon de convergence toute quantité positive inférieure à la plus courte des distances de x_i aux points (11) (201*).

II. On obtiendra donc les M racines cherchées (11) en calculant les valeurs de cette fonction implicite au bout de tous les chemins tracés de $x=x_0$ à $x=0$ sous la seule condition que les longueurs de leurs côtés n'excèdent jamais les rayons de convergence indiqués ci-dessus (I).

Comme deux de ces chemins conduisent toujours à la même valeur finale quand ils ne sont séparés par aucun des points (11) (173*), on se bornera naturellement à la considération de ceux que un ou plusieurs de ces points sépareraient, et l'on s'arrêtera quand on aura obtenu M valeurs finales inégales.

III. La résolution de l'équation (1) étant ainsi ramenée à celle de l'équation (3), dont le degré est moindre d'une unité, et à des développements en série en nombre limité, toute équation du premier degré étant d'autre part immédiatement résoluble, on voit ainsi que *des développements en nombre limité fourniront toujours toutes les racines demandées.*

IV. Au lieu de chercher les diverses racines par des cheminements exécutés sur des chemins différents, on peut évidemment en calculer une seule a_1 sur un chemin quelconque, puis chercher de la même manière une racine a_2 de l'équation

$$f_1(u)=\frac{f(u)}{u-a_1}=0,$$

et ainsi de suite.

V. On notera que le tracé de chemins praticables exige seulement une connaissance *suffisamment approchée* des quantités (11) [ou (10)]. Chacun des deux procédés ci-dessus peut donc fournir *exactement* les racines de l'équation (1), aussitôt qu'on

a résolu l'équation (3) avec une *approximation* dépendant des circonstances.

Le second (IV) n'exige même que la construction (relativement facile) d'une aire limitée et imperforée ne contenant ni $x = 0$, ni $x = x_0$, mais à laquelle tous les points (11) soient intérieurs. Car alors, pour avoir une racine, il suffit de cheminer de x_0 à o, à l'extérieur de cette aire.

VI. Ayant seulement en vue la résolution *théorique* des équations entières, il nous suffit d'avoir indiqué cette méthode qui semble la plus directe et la plus naturelle. Quant aux artifices, d'ailleurs très variés, à l'aide desquels on abrège le calcul approché des racines des équations numériques, ce n'est pas ici le lieu d'en parler.

Propriétés spéciales des fonctions olotropes qui sont réelles en même temps que la variable.

17. Si le rôle théorique que nous faisons jouer aux quantités réelles est à peu près nul, elles interviennent exclusivement dans les applications; et comme les fonctions d'une seule variable y tiennent la plus grande place, nous consignerons ici plutôt qu'ailleurs diverses propositions générales sur les fonctions réelles, dont on fait un usage presque continuel dans les discussions numériques.

Si, entre certaines limites, une fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ a une valeur réelle pour toutes les combinaisons de valeurs réelles des variables, ses dérivées de tous ordres y jouissent de la même propriété.

En supposant réelles et tombant entre les limites considérées les quantités $x, y, \ldots, x+h, y+k, \ldots$, la quantité

$$f(x+h, y+k, \ldots)$$

est toujours réelle par hypothèse. Si, en outre, on suppose assez petites les valeurs numériques des accroissements $h, k, \ldots$, la formule de Taylor

$$f(x+h, y+k, \ldots) = \Sigma(a_{m,n,\ldots} h^m k^n \ldots)$$

est applicable et donne la série entière en h, k, ...,

$$\Sigma(a''_{m,n,\ldots} h^m k^n \ldots) \tag{1}$$

pour second élément de la même quantité, en appelant $a''_{m,n,\ldots}$ celui de $a_{m,n,\ldots}$.

La réalité constante de $f(x+h, y+k, \ldots)$ exige donc que la somme de la série (1) soit nulle pour tous les systèmes de valeurs réelles de h, k, ..., et par suite, puisque chacune de ces valeurs peut varier arbitrairement et indépendamment des autres dans un espace limité, que l'on ait $a''_{m,n,\ldots} = 0$, quels que soient les indices m, n, ... (135*), c'est-à-dire que $a_{m,n,\ldots}$ soit toujours réel. Or, aux facteurs réels $\frac{1}{1.2\ldots m.1.2\ldots n\ldots}$ près, ces coefficients sont les valeurs des dérivées de tous ordres de $f(x, y, \ldots)$.

18. *La fonction d'une seule variable $f(x)$ étant supposée olotrope et réelle dans l'intervalle réel $X' < X''$, c'est-à-dire pour toute valeur réelle de x satisfaisant aux inégalités*

$$X' \leqq x \leqq X'',$$

l'accroissement $f(a+h) - f(a)$ qu'elle subit quand on attribue à x, à partir de la valeur fixe a prise à volonté dans l'intervalle considéré, un accroissement infiniment petit h réel et de signe constant, finit aussi par conserver un signe constant.

En exceptant, bien entendu, le cas où $f(x)$ dégénère en une constante, et en appelant m l'ordre de la première de ses dérivées qui n'est pas nulle pour $x = a$, la formule de Taylor donne immédiatement

$$f(a+h) - f(a) = h^m \left[\frac{f^{(m)}(a)}{1.2\ldots m} + \varepsilon \right], \tag{2}$$

ε désignant une quantité réelle qui tend vers 0 en même temps que h.

Le dernier facteur conserve le signe de son premier terme, à partir du moment où la valeur numérique de ε reste inférieure à celle de ce premier terme. Le premier facteur conserve, lui, le signe + si h reste positif ou si m est pair, le signe — si h reste

négatif avec m impair. Donc le produit finit par être toujours de quelque même signe.

19. En $x = a$, la fonction $f(x)$ est dite *croissante* ou *décroissante,* selon que pour des valeurs positives attribuées à h le signe final de l'accroissement (2) est $+$ ou $-$. Le théorème ci-dessus montre immédiatement qu'*il y a croissance ou décroissance selon que la première des dérivées de $f(x)$ qui n'est pas nulle en a est positive ou négative.*

Comme, dans l'intervalle considéré, $f'(x)$ ne peut s'annuler que pour des valeurs de x en nombre essentiellement limité, sans quoi elle y serait identiquement nulle (4) et $f(x)$ dégénérerait en une constante, c'est le signe de cette dérivée première qui, habituellement, servira de criterium.

20. Pour que le signe final de l'accroissement (2) soit indépendant de celui de h, il faut évidemment et il suffit que m, ordre de la première des dérivées de $f(x)$ qui ne s'annule pas pour $x = a$, soit un nombre pair; il faut donc en particulier que $f'(a) = 0$. Comme h^m est alors toujours positif, ce signe final est celui même de $f^{(m)}(a)$. Selon qu'il est $+$ ou $-$, on dit qu'en a la fonction est *minimum* ou *maximum*. On se trouve ainsi dans le premier ou le second de ces deux cas, selon qu'on a $f^{(m)}(a) \gtrless 0$. Dans la troisième Partie de cet Ouvrage, nous approfondirons les considérations de ce genre.

21. Dans l'intervalle $X' < X''$, la fonction $f(x)$ est dite *croissante* ou *décroissante,* selon qu'elle jouit soit de l'une de ces propriétés, soit de l'autre, pour toute valeur de x tombant dans cet intervalle.

Si $f(x)$ est croissante dans l'intervalle en question, on a l'inégalité

$$f(X'') > f(X'). \tag{3}$$

Supposons d'abord que $f'(x)$ ne s'évanouisse jamais entre X' et X'', cas auquel (**186***) on peut y assigner à sa valeur absolue

quelque limite inférieure fixe $l \neq 0$, et écrivons d'après la formule de Taylor

$$(4) \qquad f(x+h)-f(x) = h[f'(x)+h\varphi(x, h)].$$

Nous savons (**200***) qu'on peut assigner à $\text{mod}\,\varphi(x, h)$ quelque limite supérieure fixe μ, pour toutes valeurs de x tombant dans l'intervalle considéré et de h numériquement inférieures à quelque quantité positive ε. A partir du moment où la valeur absolue de h sera inférieure à une quantité positive η inférieure elle-même à la fois à ε et à $\frac{l}{\mu}$, le dernier facteur du second membre de la relation (4) aura le signe de $f'(x)$, savoir le signe $+$ puisque $f(x)$ est supposée croissante, et si l'on prend $h > 0$, ce second membre sera aussi positif.

En partageant donc l'intervalle considéré par des points de division $x_1, x_2, \ldots, x_g$ en nombre limité, et donnant

$$0 < x_1 - X' < \eta, \quad 0 < x_2 - x_1 < \eta, \quad \ldots, \quad 0 < X'' - x_g < \eta,$$

ce qui est évidemment possible, la relation (4) conduira successivement à

$$\begin{aligned} f\left(X' + \overline{x_1 - X'}\right) - f(X') = f(x_1) - f(X') &> 0, \\ f(x_2) - f(x_1) &> 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f(X'') - f(x_g) &> 0, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (3) par une addition membre à membre.

Supposons enfin que $f'(x)$ s'évanouisse entre X', X'', et soient $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_k$, rangés par ordre de grandeur, les zéros qu'elle y possède, en nombre essentiellement limité (**4**). Comme $f'(a_1+h)$ finit par conserver le signe $+$ quel que soit celui de l'accroissement infiniment petit h puisque $f(x)$ est croissante, il faut que la première des dérivées de $f'(x)$ qui n'est pas nulle en $x = a_1$ soit d'ordre pair (**20**), c'est-à-dire que la première de celles de $f(x)$ qui jouit de la même propriété soit d'ordre impair $2q+1$. Il faut de plus que $f^{(2q+1)}(a_1)$ soit positive à cause de la croissance de $f(x)$ en a_1. La formule de Taylor donne ainsi

$$f(a_1+h) - f(a_1) = h^{2q+1}(A+\varepsilon),$$

A étant positive, et ε infiniment petite en même temps que h; d'où, en appelant $a'_1 < a_1 < a''_1$ des valeurs réelles de x suffisamment voisines de a_1, et prenant successivement $h = a''_1 - a_1$ et $h = a'_1 - a_1$,

$$f(a''_1) - f(a_1) > 0,$$
$$f(a_1) - f(a'_1) > 0.$$

Comme $f'(x)$ ne s'évanouit plus entre X' et a'_1, on a par ce qui précède

$$f(a'_1) - f(X') > 0,$$

et l'addition membre à membre de ces trois inégalités donne

$$f(a''_1) - f(X') > 0.$$

En nommant $a''_2, a''_3, \ldots, a''_k$ certaines quantités réelles respectivement supérieures à $a_2, a_3, \ldots, a_k$, on trouvera de même

$$f(a''_2) - f(a''_1) > 0,$$
$$f(a''_3) - f(a''_2) > 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(X'') - f(a''_k) > 0,$$

d'où l'inégalité (3) par une nouvelle addition membre à membre de ces dernières.

Quand $f(x)$ est décroissante dans l'intervalle considéré, on trouve au contraire

$$f(X'') < f(X'),$$

en raisonnant exactement de la même manière.

22. *Si les quantités $f(X')$, $f(X'')$ sont de signes contraires, l'équation*

$$f(x) = 0$$

offre au moins une racine dans l'intervalle X', X''.

En appelant h un accroissement infiniment petit, la différence $f(x+h) - f(x)$ est infiniment petite aussi, de quelque manière que x varie simultanément dans l'intervalle considéré (**200*** *bis*).

Si donc on nomme ω_n quelque variante positive infiniment

petite, si l'on partage l'intervalle considéré en un nombre limité de fragments inférieurs à ω_n, et si l'on nomme x'_n, x''_n deux points de division consécutifs en lesquels $f(x)$ ne prend pas un même signe, points qui existent, car autrement les quantités $f(X')$, ..., $f(x'_n)$, $f(x''_n)$, ..., $f(X'')$ auraient toutes un même signe contrairement à l'hypothèse, $f(x'_n)$ et $f(x''_n)$ tendent toutes deux vers zéro. Car, ces deux quantités n'étant pas de même signe, la valeur absolue de chacune d'elles ne peut surpasser celle de leur différence $f(x''_n) - f(x'_n)$ qui est infiniment petite, comme nous venons de le rappeler, puisque $x''_n - x'_n$ tend vers zéro.

Aucune limite inférieure n'est donc assignable à $\operatorname{mod} f(x)$ dans l'intervalle considéré, d'où résulte ce que nous voulions prouver (**185***).

Le théorème du n° **11**, élargi au besoin comme nous l'avons indiqué à la fin du suivant, permettrait encore de prouver l'existence de pareilles racines et aussi bien de les calculer par cheminement.

23. *Si l'on a* $f(X') = f(X'') = 0$, *l'équation*

$$f'(x) = 0 \tag{5}$$

offre au moins une racine dans l'intervalle considéré.

En a, zéro quelconque de degré de multiplicité m de $f(x)$ qui tomberait dans l'intervalle considéré, on a (**1**), si l'on appelle $\varphi(x)$ quelque fonction olotrope non nulle en $x = a$,

$$f(x) = (x-a)^m \varphi(x),$$

d'où

$$f'(x) = (x-a)^{m-1}[m\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)],$$

puis

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = (x-a)\frac{\varphi(x)}{m\varphi(x) + (x-a)\varphi'(x)}.$$

Le multiplicateur de $x - a$ est olotrope en a, parce que son dénominateur y prend la valeur $m\varphi(a)$ essentiellement différente de zéro (**250***, III); de plus il y acquiert la valeur essentiellement positive $\frac{1}{m}$.

En appelant donc h une quantité infiniment petite positive, les

quantités

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}, \quad \frac{f(a-h)}{f'(a-h)}$$

finissent par conserver la première le signe +, la seconde le signe —.

De là et de l'hypothèse $f(X') = f(X'') = 0$, il résulte que les valeurs

$$\frac{f(X'+\varepsilon')}{f'(X'+\varepsilon')}, \quad \frac{f(X''-\varepsilon'')}{f'(X''-\varepsilon'')}$$

du rapport considéré sont de signes contraires, si les quantités ε', ε'' ont été prises toutes deux positives et assez petites.

Cela posé, si l'équation $f(x) = 0$ n'a aucune racine à l'intérieur de l'intervalle considéré, les numérateurs $f(X'+\varepsilon')$, $f(X''-\varepsilon'')$ sont tous deux différents de o et ne peuvent être de signes contraires (**22**); les dénominateurs $f'(X'+\varepsilon')$, $f'(X''-\varepsilon'')$ le sont donc forcément, et l'équation (5) a au moins une racine dans l'intervalle partiel $X'+\varepsilon'$, $X''-\varepsilon''$, par suite dans l'intervalle total considéré.

Si au contraire elle en possède, ces racines sont en nombre limité (**4**); en les appelant donc $a_1, a_2, \ldots, a_g$, le raisonnement ci-dessus prouve que l'équation (5) en a au moins une dans chacun des $g+1$ intervalles partiels $[X', a_1]$, $[a_1, a_2]$, ..., $[a_g, X'']$.

24. *Les mêmes choses étant admises que ci-dessus, toute détermination de l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$ dont la valeur initiale u_0 est réelle, est réelle aussi dans tout l'intervalle* $[X', X'']$.

Le premier développement de la détermination dont il s'agit est effectivement (**215***)

$$u_0 + f(x_0)(x-x_0) + f'(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

où tout est réel, savoir u_0 par hypothèse, $f(x_0), f'(x_0), f''(x_0), \ldots$ parce que $f(x)$ est supposée réelle dans l'intervalle considéré (**17**), et $x - x_0$ parce qu'il ne s'agit que de valeurs réelles de la variable. Les développements subséquents, à exécuter pour cheminer dans l'intervalle considéré, ne conduiront jamais aussi qu'à des quan-

tités réelles, parce que, pour chacun d'eux, la valeur initiale de l'intégrale est la valeur finale fournie par le précédent.

25. *Si le chemin d'intégration coïncide avec un segment* $[X'X'']$ *de l'axe des quantités réelles, l'intégrale définie*

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx \tag{6}$$

est nécessairement réelle. Car, en appelant $F(x)$ une détermination réelle de l'intégrale indéfinie, sa valeur initiale $F(x_0)$ et sa valeur finale $F(X)$ atteinte au bout du chemin d'intégration sont deux quantités réelles (**24**) dont la différence $F(X) - F(x_0)$ est par définition la valeur de l'intégrale définie considérée (**228***).

26. Deux chemins tracés de x_0 à X sur l'axe des quantités réelles peuvent évidemment être amenés à coïncidence (en côtés et en sommets) par simple déformation exécutée sur cet axe, c'est-à-dire dans un espace où $f(x)$ est tacitement supposée olotrope. *Ils donnent donc la même valeur à l'intégrale définie* (**229***, II).

Le plus souvent on suppose donc un chemin d'intégration réel parcouru par une marche de sens constant, et, en changeant au besoin le signe de l'intégrale définie (**229***, IV), on prend pour limite inférieure la plus petite (algébriquement) des quantités x_0, X. C'est ce que nous ferons en particulier ci-dessous.

27. *Si entre* x_0 *et* $X\ (> x_0)$, $f(x)$ *conserve un signe constant, ce même signe appartient aussi à l'intégrale* (6).

Si par exemple ce signe constant est $+$, $F(x)$ est une fonction croissante dans l'intervalle (x_0X) à cause de $F'(x) = f(x) > 0$. On a donc $F(X) - F(x_0) > 0$ (**21**).

28. *Si donc entre* x_0 *et* X *on a constamment* $f_1(x) >$ *ou* $< f_2(x)$, *on aura aussi selon le cas*

$$\int_{x_0}^{X} f_1(x)\,dx > \quad \text{ou} \quad < \int_{x_0}^{X} f_2(x)\,dx;$$

car la différence de ces intégrales,

$$\int_{x_0}^{X} [f_1(x) - f_2(x)]\, dx,$$

est positive dans le premier cas, négative dans le second.

28 *bis*. La proposition du n° **24** est un cas particulier très restreint de celle-ci :

Pour des valeurs réelles des variables, les intégrales d'un système immédiat d'équations différentielles totales ou partielles le demeurent elles-mêmes, aussi longtemps que les seconds membres de ces équations conservent des valeurs réelles pour des valeurs réelles de toutes les quantités qu'ils renferment, à condition toutefois que les valeurs initiales des variables aient été prises réelles ainsi que les valeurs ou déterminations initiales imposées aux intégrales considérées.

Il est évident, en effet, que, dans chaque nouveau développement des intégrales, les coefficients des séries sont réels, ainsi que les accroissements des variables par rapport auxquels elles sont ordonnées.



CHAPITRE II.

FONCTIONS MÉROMORPHES D'UNE SEULE VARIABLE EN GÉNÉRAL.

Infinis simples et multiples.

29. Nous dirons qu'une fonction $f(x, y, \ldots)$ est *méromorphe :* 1° dans des aires limitées S_x, S_y, ..., si, pour toutes les valeurs de $x, y, \ldots$ y tombant, elle peut être mise sous forme du quotient

$$\frac{F(x, y, \ldots)}{\varphi(x, y, \ldots)} \tag{1}$$

des fonctions $F(x, y, \ldots)$, $\varphi(x, y, \ldots)$, toutes deux olotropes dans les aires dont il s'agit; 2° dans des aires toutes ou partiellement illimitées, quand elle jouit de cette propriété dans toutes portions limitées de ces aires.

Le rapport (1) étant olotrope quand $\varphi(x, y, \ldots)$ ne s'évanouit pas (**250***, III), la classe des fonctions méromorphes contient celle des fonctions olotropes comme simple cas particulier.

Les fonctions rationnelles sont évidemment méromorphes dans telles aires qu'on voudra (**150***).

Elles constituent le type le plus simple et le plus remarquable des fonctions de ce genre, qui jouissent d'ailleurs de la plupart de leurs propriétés générales.

30. Il résulte immédiatement de cette définition :

I. *Que les dérivées de tous ordres d'une fonction méromorphes sont aussi méromorphes dans les mêmes aires* (**258***, IV);

II. *Que toute fonction composée finie ou différentielle, mais à composante rationnelle, de plusieurs fonctions simples méromorphes (ou olotropes) est aussi méromorphe.*

Le rapport (1) n'étant pas autre chose que la racine u de l'équation

$$\varphi(x, y, \ldots)u - F(x, y, \ldots) = 0,$$

les fonctions méromorphes font partie de la grande classe des fonctions implicites qui sont définies par des équations ayant des premiers membres olotropes et dont nous aborderons bientôt l'étude. Mais, comme cette équation est linéaire, elles offrent cette particularité caractéristique d'être définies *sans ambiguïté,* par suite d'être monodromes, partout où les fonctions F, φ le sont elles-mêmes.

Nous passons au cas d'une seule variable, le seul dont nous ayons à nous occuper.

31. *Si la fonction de la seule variable x,*

$$f(x) = \frac{F(x)}{\varphi(x)},$$

est méromorphe dans une aire limitée S, *on peut poser*

$$(2) \qquad f(x) = \frac{(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_g)^{m_g}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}}\,\mathfrak{f}(x),$$

où

$$(3) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g,$$

$$(4) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\gamma$$

sont des constantes inégales en nombres limités, où

$$(5) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_g,$$

$$(6) \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_\gamma$$

sont des entiers positifs, où enfin $\mathfrak{f}(x)$ est une fonction qui est olotrope dans l'aire S *et ne s'y évanouit pas.*

En appelant a', a'', ... les zéros de $F(x)$ situés dans l'aire S, et m', m'', ... leurs degrés de multiplicité, en appelant α', α'', ..., μ', μ'', ... les mêmes objets pour $\varphi(x)$, en appelant enfin $F_1(x)$,

$\varphi_1(x)$ deux fonctions de x, olotropes et sans aucun zéro dans l'aire S, la formule du n° 6 donne immédiatement

$$f(x)=\frac{(x-a')^{m'}(x-a'')^{m''}\dots}{(x-\alpha')^{\mu'}(x-\alpha'')^{\mu''}\dots}\cdot\frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)}.$$

On en déduit la relation (2) par la suppression de tout diviseur commun aux deux termes du premier facteur du second membre; car la fonction $\frac{F_1(x)}{\varphi_1(x)}$ est olotrope et dépourvue de tout zéro dans l'aire S, comme rapport de fonctions jouissant toutes deux de cette double propriété.

32. La formule (2) conduit immédiatement à plusieurs conséquences qu'il importe de noter.

I. *Dans l'aire* S, *la fonction méromorphe $f(x)$ ne peut cesser d'être olotrope qu'aux points* (4). Car elle est aussi le rapport des deux fonctions olotropes

$$(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_g)^{m_g}\mathfrak{f}(x)$$

et

$$(x-\alpha_1)^{\mu_1}\dots(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma},$$

dont la seconde ne s'évanouit qu'aux points dont il s'agit (250*, III).

II. *Les seuls zéros que $f(x)$ possède dans l'aire* S *sont les quantités* (3) *aux degrés de multiplicité* (5) *respectivement.*

Car le rapport ci-dessus mentionné (I) ne peut s'évanouir que pour les valeurs de x annulant son numérateur, qui se réduisent aux quantités (3) parce que $\mathfrak{f}(x)$ n'a aucun zéro dans S.

D'ailleurs on peut écrire, par exemple,

$$f(x)=(x-a_1)^{m_1}\frac{(x-a_2)^{m_2}\dots(x-a_g)^{m_g}\mathfrak{f}(x)}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}\dots(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}},$$

où, à cause de l'inégalité de toutes les quantités des deux suites (3), (4), le dernier facteur du second membre est olotrope et non nul en $x=a_1$, comme rapport de deux fonctions dont chacune jouit de cette double propriété (3).

III. *Quand x tend vers l'une quelconque des valeurs critiques* (4), *$f(x)$ est infinie, partant non olotrope.*

Car on peut écrire aussi, par exemple,

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{(x - \alpha_1)^{\mu_1}}, \tag{7}$$

où, pour les raisons ci-dessus (II), la fonction

$$f_1(x) = \frac{(x - a_1)^{m_1} \ldots (x - a_g)^{m_g} \mathfrak{f}(x)}{(x - \alpha_2)^{\mu_2} \ldots (x - \alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}},$$

olotrope en $x = \alpha_1$, y prend une valeur essentiellement différente de zéro.

33. En conséquence, on nomme les valeurs singulières (4) de la variable unique de la fonction méromorphe $f(x)$ les *infinis* de cette fonction, et les entiers positifs (6) *leurs degrés de multiplicité.*

Pour exprimer ce double fait qu'une fonction est infinie en $x = \alpha$, mais méromorphe, la plupart des auteurs disent maintenant qu'elle y a un *pôle,* et aussi qu'elle y est affectée d'une *singularité polaire.*

D'après la formule (7), et en appelant μ un entier positif indéterminé, le produit $(x - \alpha_1)^{\mu} f(x)$, qui est méromorphe dans l'aire S, est, en $x = \alpha_1$, infini si $\mu < \mu_1$, olotrope et non nul si $\mu = \mu_1$, olotrope mais nul si $\mu > \mu_1$. On peut donc dire aussi que *le degré de multiplicité d'un infini α_1 est le plus petit des nombres entiers μ, jouissant de la propriété de rendre le produit en question, ou bien olotrope en $x = \alpha_1$, ou bien même seulement non nul.*

Quand une valeur de x ne rend, ni nulle, ni infinie, la fonction méromorphe $f(x)$, on dit quelquefois, non seulement qu'elle est pour cette fonction un zéro de degré de multiplicité nul (3), mais encore qu'elle est *un infini, de degré de multiplicité nul aussi.*

34. Si $\mathfrak{f}(x)$ représente une fonction quelconque, olotrope et sans aucun zéro dans l'aire S, le second membre de la relation (2) constitue un type général des fonctions qui sont méromorphes dans cette aire, en y possédant les zéros et infinis (3), (4), aux degrés (5), (6).

Pour qu'une expression de cette forme se réduise identiquement à une constante non nulle, il faut et il suffit que l'on ait

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_g = \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_\gamma = 0, \tag{8}$$

et que $\mathfrak{f}(x)$ se réduise identiquement à la constante dont il s'agit. Car si m_1, par exemple, n'était pas nul, l'expression s'annulerait pour $x = a_1$; si μ_1 ne l'était pas, elle serait infinie pour $x = \alpha_1$. Les égalités (8) doivent donc être satisfaites, et comme elles réduisent l'expression considérée à $\mathfrak{f}(x)$, il faut bien que cette dernière fonction soit identiquement égale à la constante voulue. Il est évident d'ailleurs que l'ensemble de ces diverses conditions est suffisant.

35. *Pour que deux fonctions, méromorphes dans l'aire* S, *y soient égales identiquement, il faut et il suffit que leur décomposition par la formule* (2) *donne, pour l'une et l'autre, des facteurs respectivement identiques.* Il faut effectivement que leur quotient se réduise identiquement à la constante 1; or, après réduction, ce quotient se présente sous la même forme

$$\frac{(x-a_1)^{m'_1-m''_1}\ldots(x-a_g)^{m'_g-m''_g}}{(x-\alpha_1)^{\mu'_1-\mu''_1}\ldots(x-\alpha_\gamma)^{\mu'_\gamma-\mu''_\gamma}}\,\frac{'\mathfrak{f}(x)}{''\mathfrak{f}(x)},$$

d'où (34)

$$m'_1 = m''_1, \quad \ldots, \quad m'_g = m''_g,$$
$$\mu'_1 = \mu''_1, \quad \ldots, \quad \mu'_\gamma = \mu''_\gamma,$$
$$'\mathfrak{f}(x) = {''\mathfrak{f}}(x).$$

Par suite, *la formule de décomposition* (2), *appliquée à une même fonction méromorphe, ne peut jamais donner que les mêmes facteurs.*

36. *La dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ du n° 31, qui est aussi méromorphe dans l'aire* S (30), *admet les mêmes infinis* (4), *mais aux degrés de multiplicité* $\mu_1 + 1, \ldots, \mu_\gamma + 1$.

Une fonction et toutes ses dérivées étant toujours olotropes ou non en même temps (165*), (213*), il suffit d'étudier ce qui se passe en quelque infini α_1 de $f(x)$.

A cet égard, la formule (7) donne

$$f'(x) = \frac{-\mu_1 f_1(x) + (x - \alpha_1) f'_1(x)}{(x-\alpha_1)^{\mu_1+1}},$$

où, en $x = \alpha_1$, le numérateur du second membre est olotrope, avec la valeur $-\mu_1 f_1(\alpha_1)$ essentiellement différente de zéro. Pour $f'(x)$, le degré de multiplicité de l'infini α_1 a donc bien augmenté de 1 (33).

Il s'ensuit immédiatement que, *pour $f^{(k)}(x)$, les degrés de multiplicité des infinis sont tous augmentés de l'ordre même k de cette dérivée.*

Pour la même raison, α_1, *par exemple, est un infini de degré $\mu_1 - 1$ seulement pour $\int f(x)\,dx$, si toutefois cette intégrale est méromorphe en α_1, ce qui est loin d'avoir lieu toujours* (41, *inf.*).

37. *Pour des valeurs de x suffisamment voisines de l'infini quelconque α_1 de degré μ_1, la fonction méromorphe $f(x)$ est développable, et cela d'une seule manière, en une série procédant suivant les puissances de $x - \alpha_1$ à exposants entiers, et croissant algébriquement à partir d'un terme en $(x - \alpha_1)^{-\mu_1}$ dont le coefficient n'est pas nul.*

D'après la relation (7) on a

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{-\mu_1} f_1(x),$$

où $f_1(x)$ est olotrope et non nulle en $x = \alpha_1$, et à cause de ceci

$$f_1(x) = A_0^{(1)} + A_1^{(1)}(x-\alpha_1) + \ldots + A_{\mu_1-1}^{(1)}(x-\alpha_1)^{\mu_1-1} + A_{\mu_1}^{(1)}(x-\alpha_1)^{\mu_1} + \ldots,$$

où $A_0^{(1)}$ non $= 0$; on a donc, aussi longtemps du moins que cette série entière est convergente

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_0^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}} + \frac{A_1^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1-1}} + \ldots + \frac{A_{\mu_1-1}^{(1)}}{x-\alpha_1} \\ & + A_{\mu_1}^{(1)} + A_{\mu_1+1}^{(1)}(x-\alpha_1) + \ldots; \end{aligned} \right.$$

c'est précisément le développement annoncé. Il est d'ailleurs unique, comme celui de $f_1(x)$, d'où nous l'avons tiré.

On notera la formule évidente

$$(10) \qquad A_k^{(1)} = \frac{1}{1.2\ldots k}\left\{\frac{d^k}{dx^k}[(x-\alpha_1)^{\mu_1}f(x)]\right\}_{x=\alpha_1}.$$

38. Nous avons eu déjà à rappeler (**280***) qu'on nomme *simple* toute fraction rationnelle d'une seule variable, ayant pour numérateur une constante, pour dénominateur une puissance (entière) d'un binôme du premier degré où l'on peut évidemment supposer égal à 1 le coefficient de la variable (sauf à modifier la constante du numérateur).

D'après cela et la relation (9), *la fonction méromorphe* $f(x)$ *est décomposable en une somme de fractions simples de dénominateurs* $(x-\alpha_1)^{\mu_1}$, $(x-\alpha_1)^{\mu_1-1}$, $\ldots$, $(x-\alpha_1)$, *dont la première a un numérateur non* $=0$, *et d'une fonction* $\mathfrak{f}_1(x)$, *olotrope en* α_1, *mais méromorphe dans l'aire* S *avec tous les infinis de* $f(x)$, *sauf* α_1, *aux mêmes degrés de multiplicité.*

La différence

$$(11) \qquad f(x) - \left[\frac{A_0^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}} + \ldots + \frac{A_{\mu_1-1}^{(1)}}{x-\alpha_1}\right] = \mathfrak{f}_1(x)$$

est méromorphe dans l'aire S (30, II) et ne peut évidemment y avoir d'autres infinis que α_1, commun à ses deux parties, avec α_2, α_3, $\ldots$, α_γ autres infinis de $f(x)$. Mais elle est olotrope en α_1, puisque, d'après la relation (9) et pour des valeurs de x suffisamment voisines de α_1, elle est représentable par la série entière

$$A_{\mu_1}^{(1)} + A_{\mu_1+1}^{(1)}(x-\alpha_1) + \ldots.$$

Quant à l'infini α_2, par exemple, elle l'admet au degré de multiplicité μ_2, parce que μ_2 est évidemment la plus faible valeur de l'exposant μ qui puisse rendre le produit $(x-\alpha_2)^{\mu}\mathfrak{f}_1(x)$ olotrope et non nul en $x=\alpha_2$ (33).

La fonction $\mathfrak{f}_1(x)$ jouit donc des propriétés énoncées, et la relation (9), écrite

$$(12) \qquad f(x) = \frac{A_0^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}} + \ldots + \frac{A_{\mu_1-1}^{(1)}}{x-\alpha_1} + \mathfrak{f}_1(x),$$

opère précisément la décomposition dont il s'agit.

39. *La fonction méromorphe $f(x)$ est décomposable en la somme des groupes de fractions simples correspondant à ses divers infinis et d'une fonction $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ qui est olotrope dans toute l'aire* S.

En recommençant la décomposition précédente sur $\mathfrak{f}_1(x)$ puis sur les autres fonctions complémentaires $\mathfrak{f}_2(x)$, $\mathfrak{f}_3(x)$, ... qui s'introduisent successivement, il vient

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{f}_1(x) &= \frac{A_0^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{\mu_2}} + \ldots + \frac{A_{\mu_2-1}^{(2)}}{x-\alpha_2} + \mathfrak{f}_2(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{f}_{\gamma-1}(x) &= \frac{A_0^{(\gamma)}}{(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}} + \ldots + \frac{A_{\mu_\gamma-1}^{(\gamma)}}{x-\alpha_\gamma} + \mathfrak{f}_\gamma(x), \end{aligned} \right.$$

où $\mathfrak{f}_i(x)$ est une fonction méromorphe n'ayant d'autres infinis dans l'aire S que α_{i+1}, α_{i+2}, ..., α_γ, où en particulier $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ y est olotrope puisqu'elle n'y en a plus aucun. En ajoutant membre à membre, il reste, après simplification, la décomposition annoncée

$$(14)\quad f(x) = \left\{ \begin{aligned} &\frac{A_0^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}} + \ldots + \frac{A_{\mu_1-1}^{(1)}}{x-\alpha_1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{A_0^{(\gamma)}}{(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}} + \ldots + \frac{A_{\mu_\gamma-1}^{(\gamma)}}{x-\alpha_\gamma} \end{aligned} \right\} + \mathfrak{f}_\gamma(x),$$

où les numérateurs des fractions simples seront fournis par des formules telles que (10).

40. Si $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ représente une fonction quelconque de x, olotrope dans l'aire S, le second membre de la relation précédente (14) fournit un autre type général des fonctions qui sont méromorphes dans cette aire, avec les infinis (4) aux degrés de multiplicité (6).

Pour qu'une expression de cette nature soit nulle identiquement, il faut et évidemment il suffit que l'on ait

$$A_0^{(1)} = \ldots = A_{\mu_1-1}^{(1)} = \ldots = A_0^{(\gamma)} = \ldots = A_{\mu_\gamma-1}^{(\gamma)} = 0,$$

avec $\mathfrak{f}_\gamma(x) = 0$ *identiquement.* Car si, par exemple, on n'avait pas $A_0^{(1)} = 0$, le produit $(x-\alpha_1)^{\mu_1} f(x)$ se réduirait à $A_0^{(1)}$ et non à o pour $x = \alpha_1$; et de même successivement, pour les numérateurs des autres fractions simples. Ces conditions réduisant $f(x)$ à

$\mathfrak{f}_\gamma(x)$, il faut bien aussi que cette dernière fonction soit nulle identiquement.

Il s'ensuit que *le résultat de la décomposition de $f(x)$ par la formule* (14) *est unique*. Car la différence de deux semblables résultats reprend, après réductions, la forme du second membre de la formule en question, et il doit être identiquement nul. De part et d'autre, les fonctions simples doivent donc être identiques, ainsi que les termes complémentaires olotropes.

41. *Pour que $\int f(x)dx$ soit aussi méromorphe dans l'aire* S *supposée imperforée, $f(x)$ désignant toujours le premier membre de la relation* (14), *il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$(15) \qquad A^{(1)}_{\mu_1-1} = A^{(2)}_{\mu_2-1} = \ldots = A^{(\gamma)}_{\mu_\gamma-1} = 0.$$

Le résultat de la différentiation du second membre de la relation (14) est évidemment une expression de même forme, et, par suite (40), il est celui de la décomposition de $f'(x)$ en des groupes de fractions simples accompagnés d'une partie olotrope. Comme cette différentiation augmente de 1 les degrés de tous les dénominateurs des fractions simples, la décomposition de $f'(x)$ ne peut donner aucune fraction simple ayant un dénominateur du premier degré. Pour que $f(x)$ soit la dérivée de quelque fonction méromorphe, il faut donc aussi que sa décomposition ne donne aucune fraction simple de cette espèce, c'est-à-dire que les égalités (15) aient lieu.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes; car, si elles sont satisfaites, l'intégration par décomposition du second membre de la relation (14) donne (215*, II, IV)

$$(16) \quad \int f(x)dx = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{A_0^{(1)}}{-\mu_1+1}\,\dfrac{1}{(x-\alpha_1)^{\mu_1-1}} + \ldots + \dfrac{A^{(1)}_{\mu_1-2}}{-1}\,\dfrac{1}{x-\alpha_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{A_0^{(\gamma)}}{-\mu_\gamma+1}\,\dfrac{1}{(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma-1}} + \ldots + \dfrac{A^{(\gamma)}_{\mu_\gamma-2}}{-1}\,\dfrac{1}{x-\alpha_\gamma} \end{array}\right\} + \int \mathfrak{f}_\gamma(x)dx,$$

c'est-à-dire une fonction qui est méromorphe dans l'aire S, parce que celle-ci est imperforée, et qu'ainsi $\int \mathfrak{f}_\gamma(x)dx$ y est olotrope (209*, VI).

Chacune des constantes (15) qui ne serait pas nulle, introduirait dans l'intégrale un terme *logarithmique* dont nous ne pourrons étudier la nature que dans le Chap. V (*inf.*).

42. *L'inverse arithmétique de $f(x)$, qui est aussi méromorphe dans l'aire* S (30, II), *y a pour zéros et pour infinis les infinis et les zéros de $f(x)$, aux mêmes degrés de multiplicité respectivement.*

La formule (2) donne effectivement

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-\alpha_1)^{\mu_1}\dots(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}}{(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_g)^{m_g}}\,\frac{1}{\mathfrak{f}(x)},$$

et, dans l'aire S, le dernier facteur du second membre est une fonction olotrope qui ne peut s'y évanouir, puisqu'il est l'inverse arithmétique de $\mathfrak{f}(x)$, fonction jouissant de cette double propriété (250*, II).

En particulier, *pour obtenir le degré de multiplicité d'un infini de $f(x)$, on peut chercher son degré comme zéro de $\frac{1}{f(x)}$, c'est-à-dire l'ordre de la première des dérivées de cette dernière fonction qui ne s'y évanouit pas.*

43. *Une fonction d'une seule variable $g(x)$ est méromorphe dans l'aire quelconque* T, *quand elle cesse d'y être olotrope seulement en un nombre limité de valeurs de x*

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \dots,\quad \beta_x,$$

pour lesquelles son inverse arithmétique redevient olotrope.

En β_1, $\frac{1}{g(x)}$ qui est supposée olotrope s'évanouit certainement, car sans cela $g(x) = 1 : \frac{1}{g(x)}$ ne cesserait pas d'être olotrope (250*, II); on a donc

$$\frac{1}{g(x)} = (x-\beta_1)^{\nu_1}\chi(x),$$

où ν_1 est quelque entier positif et $\chi(x)$ quelque fonction olotrope

et non nulle en β_1. Il en résulte

$$(17) \qquad g(x) = \frac{\frac{1}{\chi(x)}}{(x-\beta_1)^{\nu_1}} = \frac{g_1(x)}{(x-\beta_1)^{\nu_1}},$$

$g_1(x)$ étant olotrope et non nulle en β_1.

Cette nouvelle fonction est encore olotrope dans tout le reste de l'aire T, sauf en $\beta_2, \ldots, \beta_x$, où son inverse arithmétique le redevient; la relation précédente donne effectivement

$$g_1(x) = (x-\beta_1)^{\nu_1} g(x),$$

le second membre étant olotrope partout où $g(x)$ l'est elle-même, son inverse $\frac{1}{(x-\beta_1)^{\nu_1}} \frac{1}{g(x)}$ l'étant en β_2 par exemple, parce que $\frac{1}{g(x)}$ est supposée l'être et que $\frac{1}{(x-\beta_1)^{\nu_1}}$ l'est aussi à cause de β_2 non $= \beta_1$. On trouvera donc de même

$$(18) \qquad \left\{ \begin{array}{l} g_1(x) = \dfrac{g_2(x)}{(x-\beta_2)^{\nu_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{x-1}(x) = \dfrac{g_x(x)}{(x-\beta_x)^{\nu_x}}, \end{array} \right.$$

où $g_i(x)$ est olotrope partout où $g(x)$ l'est elle-même et de plus en $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i$, où par suite $g_x(x)$ est olotrope dans toute l'aire T. Or la multiplication membre à membre des relations (17), (18) donne, après suppression des facteurs communs aux deux membres,

$$g(x) = \frac{g_x(x)}{(x-\beta_1)^{\nu_1} \ldots (x-\beta_x)^{\nu_x}};$$

donc $g(x)$ est méromorphe dans l'aire T, puisque les deux termes de cette fonction y sont olotropes (**29**).

Phases critiques des fonctions composées rationnelles de fonctions simples d'une seule variable, olotropes et méromorphes.

44. Les principes exposés dans ce Chapitre et dans le précédent fournissent la solution d'une question qui se pose à chaque instant :

Discuter la phase critique (**146***) *dans laquelle entre une*

fonction composée, à composante rationnelle, de plusieurs fonctions simples de x, méromorphes ou olotropes [*méromorphe par suite* (30, II)], *quand x prend une valeur α pour laquelle la théorie générale des fonctions composées n'est pas applicable* (248*).

I. Supposons d'abord que la composante soit un polynome entier, cas auquel il faut que l'une au moins des fonctions simples soit infinie pour $x = \alpha$, sans quoi la fonction composée se trouverait dans une phase ordinaire.

En développant toutes les fonctions simples en séries procédant suivant les puissances de $x - \alpha$ à exposants entiers, les premiers éventuellement négatifs (37), en substituant ces développements dans le polynome entier dont il s'agit, puis en effectuant les calculs (multiplications et additions de séries), on mettra la fonction composée, si elle ne se réduit pas identiquement à o, sous forme d'une série de même nature

$$H_\lambda(x-\alpha)^\lambda + H_{\lambda+1}(x-\alpha)^{\lambda+1} + \ldots,$$

où λ est un entier (positif, nul ou négatif), où H_λ, $H_{\lambda+1}$, ... sont des coefficients constants dont le premier peut être supposé non $= 0$.

Cela posé, si λ est nul ou positif, la fonction composée est olotrope en α, et, dans le second cas, admet cette valeur de x pour zéro de degré de multiplicité λ.

Si λ est négatif, la fonction composée n'est plus olotrope en α; elle a cette quantité pour infini de degré de multiplicité $-\lambda$.

II. Supposons en second lieu que la composante soit une simple fraction, c'est-à-dire que la fonction considérée se réduise au rapport

$$\frac{U(x)}{V(x)} \tag{1}$$

de deux fonctions simples. Ici, il faut supposer pour la raison ci-dessus (I) qu'en $x = \alpha$ le dénominateur est nul ou infini, ou bien que le numérateur est infini.

D'après les nos **1** et **32**, III, on peut poser

$$U(x) = (x - \alpha)^M U_1(x),$$
$$V(x) = (x - \alpha)^N V_1(x),$$

où M, N désignent certains entiers (positifs, nuls ou négatifs), et $U_1(x)$, $V_1(x)$ des fonctions olotropes et non nulles en $x = \alpha$; moyennant quoi, la fonction composée considérée (1) prend la forme

$$(2) \qquad (x - \alpha)^{M-N} \frac{U_1(x)}{V_1(x)}.$$

Le dernier facteur de cette expression étant olotrope et non nul en $x = \alpha$, on en conclut que :

Si $M > N$, la fonction (1) est olotrope en α, et admet cette quantité pour zéro de degré $M - N$;

Si $M = N$, cette fonction est encore olotrope en α, mais ne s'y évanouit pas;

Si $M < N$, elle n'y est plus olotrope, mais elle offre α pour infini de degré $N - M$.

III. Tous les autres cas de la question qui nous occupe se traitent évidemment par la combinaison de ces deux procédés.

45. L'étude d'une fonction composée de cette nature, *pour des valeurs infinies de x*, se ramène évidemment à la question qui vient d'être traitée, quand le changement de variable (**148***)

$$x = \frac{1}{x'}$$

transforme toutes les fonctions simples en des fonctions de x' qui sont méromorphes en $x' = 0$. C'est ce qui a lieu, non toujours assurément, mais quelquefois, par exemple, pour des fonctions simples rationnelles (**50**, II, *inf.*).

46. La méthode de discussion que nous venons d'expliquer embrasse la plupart de ces expressions dites *se présenter sous les formes* $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, ..., mais non toutes.

Quand il s'agit seulement du rapport (1), et que ses termes sont

tous deux olotropes en α, leur différentiation simultanée, poussée assez loin, suffit pour reconnaître si, en $x = \alpha$, ce rapport est infini ou fini et, dans ce dernier cas, pour avoir sa valeur. Effectivement M, N sont alors non négatifs, et égaux respectivement aux ordres des premières dérivées de $U(x)$, $V(x)$ qui ne sont pas nulles pour $x = \alpha$ (3). Si donc la différentiation parallèle de ces fonctions conduit pour le numérateur à une dérivée qui ne s'annule plus et pour le dénominateur à une dérivée (du même ordre) qui s'annule encore pour $x = \alpha$, on saura par là que M est $<$ N, par suite, que le rapport est infini. Si l'inverse a lieu, M est $>$ N, et le rapport s'évanouit pour $x = \alpha$. Si enfin les dérivées des deux termes s'évanouissent simultanément jusqu'à un même ordre ϱ exclusivement, où elles ne sont nulles ni l'une ni l'autre, on a

$$M = N = \varrho,$$

et, pour $x = \alpha$, le rapport considéré prend la valeur $\frac{U_1(\alpha)}{V_1(\alpha)}$ du dernier facteur de l'expression (2). Mais, comme on a

$$U_1(\alpha) = \frac{1}{1.2\ldots\varrho} U^{(\varrho)}(\alpha), \qquad V_1(\alpha) = \frac{1}{1.2\ldots\varrho} V^{(\varrho)}(\alpha),$$

la valeur de notre rapport en $x = \alpha$ est précisément égale à celle du rapport des dérivées d'ordre ϱ de ses deux termes.

On retombe ainsi sur la célèbre règle de Lhôpital; on a trop souvent le tort de la présenter comme générale, tandis qu'elle est exclusivement applicable au cas où les deux termes du rapport sont olotropes pour la valeur de x qui annule le second.

Fonctions indéfiniment méromorphes.

47. *Si $f(x)$ est méromorphe dans toute l'étendue du plan servant à la notation graphique de x, et si X désigne une constante quelconque, ou bien chacune des équations numériques*

(1) $$f(u) = X,$$

(2) $$\frac{1}{f(u)} = 0$$

admet quelque racine, soit finie, soit infinie, ou bien $f(x)$ dégénère en une constante.

Supposons que le dernier fait n'ait pas lieu : si l'équation (1) n'a aucune racine (finie), la différence $f(u) - X$, méromorphe comme $f(u)$, ne possède aucun zéro et par suite son inverse arithmétique $\frac{1}{f(u) - X}$ est indéfiniment olotrope (250*, II), (42), sans dégénérer en une constante. Cette fonction est donc infinie, ou, ce qui revient au même, son dénominateur est infiniment petit, pour quelque valeur infinie de u (8), ce qu'il suffisait de prouver.

Notre proposition est donc vraie pour l'équation (2) aussi, puisque son premier membre est comme $f(u)$ indéfiniment méromorphe (30, II).

48. Le théorème du n° **11** donne immédiatement cet autre.

En appelant

(3) $\alpha', \alpha'', \ldots$

les infinis de $f(u)$, puis

(4) $\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots$

les zéros de $f'(u)$, puis

(5) $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \ldots$

les valeurs correspondantes $f(\mathfrak{b}'), f(\mathfrak{b}''), \ldots$ de $f(u)$, puis u_0 une quantité quelconque étrangère aux suites (3), (4), *en posant enfin $f(u_0) = x_0$, les racines de l'équation* (1) *s'obtiennent en prenant d'abord celles des quantités* (4) *qui satisferaient par hasard à cette équation, en prenant ensuite au bout de tous les chemins tracés de x_0 à X dans des aires ne contenant ni les points* (3), *ni les points* (5), *les valeurs finales distinctes de la fonction implicite u de x, définie par l'équation et la condition initiale*

$$f(u) = x, \qquad u = u_0 \text{ pour } x = x_0.$$

Les racines de l'équation (2) *sont fournies par ce dernier*

procédé, à cela près que les chemins à considérer doivent conduire de x_0 à l'infini de toutes les manières possibles.

L'observation finale du n° 12 est encore applicable ici ; de plus, on peut supposer que u_0 est un infini de $f(u)$ (161, *inf.*).

49. Voici un corollaire important du théorème du n° 47 :

Pour prouver qu'une fonction sue (d'autre part) indéfiniment méromorphe se réduit à une constante, il suffit de constater que, pour aucune valeur finie ou infinie de x, elle ne peut, soit prendre quelque valeur donnée, soit devenir infinie.

Cette observation fournit un moyen d'investigation des plus précieux dans la théorie des fonctions indéfiniment méromorphes. Comme toute fonction composée, à composante rationnelle, de pareilles fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ est aussi indéfiniment méromorphe, on pourra trouver toutes les relations rationnelles pouvant lier celles-ci les unes aux autres, en formant simplement avec elles toutes les expressions rationnelles non susceptibles de devenir infinies, ou bien d'atteindre telle valeur déterminée. Une hypothèse particulière simple faite ensuite sur la valeur de x donnera la valeur C de la constante à laquelle se réduit une expression de cette espèce, $\Omega[f_1(x), f_2(x), \ldots]$, et

$$\Omega[f_1(x), f_2(x), \ldots] = C$$

sera l'une des relations cherchées. La théorie des fonctions circulaires et elliptiques (Chap. VII *et suiv. inf.*) mettra mieux en lumière l'extrême utilité de ce principe.

50. Les fractions rationnelles forment la variété la plus intéressante de la classe des fonctions indéfiniment méromorphes. Elles se distinguent par deux particularités à noter.

I. *Pour chacune, les zéros et les infinis sont en nombres essentiellement limités.* Car, en appliquant la formule (2) du n° 13 à la décomposition des polynomes entiers servant de termes à une fraction rationnelle donnée $f(x)$, en produits de puissances de binomes linéaires, puis en supprimant, s'il y a lieu, tout facteur

commun, on met $f(x)$ sous la forme

$$(6)\qquad f(x) = \mathrm{A}\,\frac{(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_g)^{m_g}}{(x-\alpha_1)^{\mu_1}\ldots(x-\alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}};$$

c'est celle du n° 31, particularisée par cette circonstance que le facteur complémentaire $\mathfrak{f}(x)$ se réduit ici à la constante A. Les zéros $a_1, \ldots, a_g$ du numérateur sont ceux de $f(x)$ et ceux du dénominateur $\alpha_1, \ldots, \alpha_\gamma$ sont les infinis de cette fonction, les uns et les autres aux mêmes degrés $m_1, \ldots, \mu_1, \ldots$.

II. *La fonction* $'f(x') = f\left(\frac{1}{x'}\right)$ *est méromorphe en* $x' = 0$. En appelant effectivement M la différence

$$(m_1 + m_2 + \ldots + m_g) - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\gamma)$$

des degrés effectifs du numérateur et du dénominateur de $f(x)$, il vient immédiatement

$$'f(x') = \frac{1}{x'^{\mathrm{M}}}\,\mathrm{A}\,\frac{(1-a_1x')^{m_1}\ldots(1-a_gx')^{m_g}}{(1-\alpha_1x')^{\mu_1}\ldots(1-\alpha_\gamma x')^{\mu_\gamma}},$$

et, pour $x' = 0$, le produit des deux derniers facteurs est olotrope et non nul ($=\mathrm{A}$). Cette valeur nulle de x' est pour $'f(x')$ un zéro ou un infini de degré de multiplicité $\mp \mathrm{M}$, selon que M est $\lessgtr 0$.

L'application de la formule (9) du n° 37 à la fonction $'f(x')$ et à son infini $x' = 0$ donne une série procédant suivant les puissances de x', à exposants entiers d'abord négatifs. En y remplaçant x' par $\frac{1}{x}$, on trouve pour $f(x)$, relativement à des valeurs infinies de x, un développement procédant suivant les puissances de x à exposants entiers décroissants et d'abord positifs. Il peut être considéré comme un cas particulier de ceux que nous étudierons aux n°s 151 *et suiv.* (*inf.*).

51. Quand l'inversion arithmétique des variables (148*) transforme une fonction en une autre jouissant de certaines propriétés pour des valeurs nulles des nouvelles variables, on dit volontiers, pour abréger et imager le langage, que la fonction donnée *jouit des propriétés en question à l'infini.*

On pourra donc formuler la dernière observation ci-dessus, en

disant qu'*une fonction rationnelle est toujours méromorphe à l'infini, olotrope même quand* $M < 0$; *que dans ce dernier cas elle y a un zéro de degré* $-M$; *qu'elle y a au contraire un infini de degré* M, *si* $M > 0$.

52. En supposant $f(x)$ rationnelle, l'application de la formule (14) du n° **39** à la totalité des infinis de cette fonction donne un terme complémentaire $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ qui est nécessairement rationnel comme excès de la fraction rationnelle $f(x)$ sur la somme des fractions simples commençant le second membre, et qui par son origine est dépourvu de tout infini; *il se réduit donc à quelque polynome entier* (pouvant être identiquement nul)

$$A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu, \tag{7}$$

et la formule considérée fournit ce qu'on nomme la *décomposition de* $f(x)$ *en fractions simples*.

La recomposition du groupe des seules fractions simples donne une fraction rationnelle dont le numérateur a un degré nécessairement inférieur à celui de son dénominateur; celle de tout le second membre de la formule de décomposition reproduit la fraction rationnelle proposée. On en conclut facilement que *le polynome additionnel* (7) *est précisément le quotient de la division algébrique du numérateur de* $f(x)$ *par son dénominateur*.

Si donc M est < 0, c'est-à-dire si le degré effectif du numérateur de $f(x)$ est inférieur à celui de son dénominateur, ce polynome se réduit identiquement à 0, et *la décomposition de* $f(x)$ *ne donne absolument que des fractions simples*.

Si ces degrés sont égaux, on a $\mu = 0$, et *le polynome en question se réduit à une constante*. Comme, pour x infinie, la somme des fractions simples est infiniment petite, la valeur de cette constante est égale à la limite de $f(x)$, c'est-à-dire au rapport des coefficients des termes de plus hauts degrés dans les deux termes de cette fonction.

Si le premier de ces degrés surpasse le second, on a $\mu = M$.

53. C'est au moyen de la division algébrique que l'on calcule le plus volontiers le polynome additionnel (7); mais on peut aussi

l'obtenir par un procédé analogue à celui qui a fourni chacun des groupes de fractions simples.

Le changement de variable $x = \frac{1}{x'}$, exécuté dans cette même formule (14) du n° 39, donne facilement

$$(8) \quad \frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0^{(1)} x'^{\mu_1 - 1}}{(1 - \alpha_1 x')^{\mu_1}} + \ldots + \frac{A_{\mu_1 - 1}^{(1)}}{1 - \alpha_1 x'} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{A_0^{(\gamma)} x'^{\mu_\gamma - 1}}{(1 - \alpha_\gamma x')^{\mu_\gamma}} + \ldots + \frac{A_{\mu_\gamma - 1}^{(\gamma)}}{1 - \alpha_\gamma x'} \end{array} \right\} + \frac{A_0}{x'^{\mu+1}} + \ldots + \frac{A_\mu}{x'},$$

et l'expression entre accolades est évidemment olotrope en $x' = 0$. Les fractions simples venant à la suite de cette expression sont donc celles qui dans la décomposition de $\frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right)$ correspondent à l'infini x' de cette nouvelle fraction rationnelle; et la méthode du n° 37 fournira leurs numérateurs, c'est-à-dire les coefficients du polynome (7).

51. Les observations du n° 50 ont des sortes de réciproques fort utiles à connaître.

Si une fonction indéfiniment méromorphe $f(x)$ possède des zéros et des infinis en nombres limités, elle est nécessairement rationnelle, quand pour aucune valeur infinie de x le rapport

$$(9) \qquad \frac{f(x)}{x^M}$$

n'est, soit infini, soit infiniment petit, M *désignant ici l'excès de la somme des degrés de multiplicité des zéros sur celle des degrés des infinis.*

En appelant $a_1, \ldots, a_g$ les zéros de $f(x)$, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ ses infinis, puis $m_1, \ldots, m_g$ les degrés des uns, $\mu_1, \ldots, \mu_\gamma$ ceux des autres, le rapport

$$f(x) : \frac{(x - a_1)^{m_1} \ldots (x - a_g)^{m_g}}{(x - \alpha_1)^{\mu_1} \ldots (x - \alpha_\gamma)^{\mu_\gamma}}$$

est, d'après le n° 31, une fonction indéfiniment olotrope, dépourvue de tout zéro proprement dit. Pour des valeurs infinies de x, il se

présente d'ailleurs sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^M}\,\frac{1+\varepsilon}{1+\eta},$$

ε, η étant des infiniment petits. Si donc l'expression (9) n'est, par exemple, infinie pour aucune valeur infinie de x, il en est de même pour cette dernière fonction olotrope qui se réduit ainsi (8) à quelque constante A ; d'où pour $f(x)$ la forme rationnelle (6). De même, pour le cas où l'expression (9) ne serait infiniment petite pour aucune valeur infinie de x, ceci d'après le n° 9.

55. *Si la fonction indéfiniment méromorphe $f(x)$ possède des infinis en nombre limité, elle est encore rationnelle quand elle est méromorphe même à l'infini* (51).

En vertu de cette dernière hypothèse, et en appelant μ quelque entier positif, on a (37)

$$f\left(\frac{1}{x'}\right)=\frac{A_0}{x'^{\mu}}+\frac{A_1}{x'^{\mu-1}}+\ldots+\frac{A_{\mu-1}}{x'}+A_\mu+'\mathfrak{f}(x'),$$

$'\mathfrak{f}(x')$ représentant une fonction olotrope et nulle en $x'=0$, ou bien en revenant à la variable x

$$(10)\qquad f(x)-(A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+\ldots+A_\mu)=\mathfrak{f}(x),$$

cette dernière fonction étant comme $f(x)$ indéfiniment méromorphe avec les mêmes infinis, mais, de plus, infiniment petite pour toutes valeurs infinies de x.

L'application de la formule (14) du n° 39 à la décomposition totale de $\mathfrak{f}(x)$ donnera donc

$$(11)\qquad \mathfrak{f}(x)=\Sigma+\mathfrak{f}_\gamma(x),$$

Σ désignant la somme des groupes de fractions simples correspondant aux divers infinis de $\mathfrak{f}(x)$, et $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ une fonction indéfiniment olotrope. Mais cette dernière, différence des fonctions $\mathfrak{f}(x)$ et Σ toutes deux infiniment petites pour x infinie, l'est aussi, par suite non infinie ; elle dégénère donc en une constante (8), et celle-ci se réduit à zéro puisque nous venons de constater que $\mathfrak{f}_\gamma(x)$ est nulle pour x infinie.

La combinaison des relations (10), (11) donne ainsi

$$f(x) = \Sigma + A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu,$$

formule entraînant ce qu'il fallait prouver.

En recomposant le second membre en une fraction rationnelle irréductible, on aperçoit immédiatement que le degré de celui des deux termes où il est le plus grand est égal à μ augmenté de la somme des degrés de multiplicité des infinis de $f(x)$.

Principes du Calcul des résidus.

56. Dans la question d'intégration traitée au n° **41**, un rôle important était joué par le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha}$ dans le développement d'une fonction méromorphe de x ayant l'infini α, que nous avions fait connaître précédemment (**39**). Ce fait et aussi une utilité spéciale d'une nature toute différente que présente quelquefois dans la théorie de ces fonctions, dans celle même des fonctions olotropes (**61**, **62**, **65**, *inf.*), la considération du coefficient dont il s'agit, ont conduit Cauchy à lui imposer un nom, et à voir toute une doctrine dans les règles générales des calculs où il intervient. Nous allons exposer les principes de cette élégante théorie qui, cependant, n'a pas à nos yeux toute l'importance que son illustre auteur semblait lui attacher.

En posant, comme le théorème du n° **37** autorise à le faire,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) = {} & \frac{A_0}{(x-\alpha)^\mu} + \frac{A_1}{(x-\alpha)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{A_{\mu-1}}{x-\alpha} \\ & + A_\mu + A_{\mu+1}(x-\alpha) + \ldots, \end{aligned} \right.$$

pour la fonction méromorphe $f(x)$ ayant l'infini α au degré μ, on nomme $A_{\mu-1}$, coefficient de $\frac{1}{x-\alpha}$ dans ce développement, le *résidu partiel de $f(x)$, relatif à l'infini α*. On le représente par la notation

$$\mathcal{E}_\alpha f(x),$$

moyennant quoi la formule (10) du numéro cité donne

$$\mathcal{E}_\alpha f(x) = \frac{1}{1.2\ldots(\mu-1)} \left\{ \frac{d^{\mu-1}}{dx^{\mu-1}} \left[(x-\alpha)^\mu f(x) \right] \right\}_{x=\alpha}.$$

Quand, au lieu d'être un infini de $f(x)$, α est une valeur ordinaire de x, cette définition ne s'applique plus à rien. Mais alors la série de Taylor peut être considérée comme un cas particulier du développement (1), caractérisé par les conditions numériques

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{\mu-1} = 0,$$

et il est permis de continuer à dire que le résidu existe, *mais qu'il est nul*. Cette fiction peut être utile comme celles des nos 3 et 33.

Dans une aire S où $f(x)$ est méromorphe avec des infinis en nombre limité, on nomme *résidu intégral* de cette fonction la somme de ses résidus partiels, relatifs à tous les infinis qu'elle y possède. Ce résidu intégral se représente par une notation analogue à

$$\mathcal{E}_S f(x).$$

Quand $f(x)$ est décomposable en deux facteurs $'f(x)$, $''f(x)$, méromorphes dans l'aire S, n'y ayant chacun aucun infini qui soit pour l'autre un infini ou bien un zéro, on a quelquefois à considérer la somme des résidus partiels de cette fonction, correspondant aux infinis de l'un seulement de ces facteurs. Cette somme se représente alors par

$$\mathcal{E}_S ('f(x)) ''f(x),$$

en renfermant entre des crochets trapézoïdaux celui des facteurs dont il s'agit.

57. *Si, en appelant $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ des fonctions méromorphes, et a_1, a_2, ..., a_k autant de multiplicateurs constants, on a identiquement*

$$f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_k f_k(x), \tag{2}$$

on aura aussi

$$\mathcal{E} f(x) = a_1 \mathcal{E} f_1(x) + a_2 \mathcal{E} f_2(x) + \ldots + a_k \mathcal{E} f_k (x). \tag{3}$$

Cette égalité est évidente quand il s'agit de résidus partiels relatifs à un même infini α des fonctions considérées; car, à cause de la relation supposée (2), le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha}$ dans le développement de $f(x)$ en série procédant suivant les puissances de $(x-\alpha)$ à exposants entiers, les premiers d'abord négatifs, est égal à la somme des produits par les multiplicateurs $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des mêmes coefficients dans les développements semblables de $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$.

En ajoutant ensuite membre à membre celles qu'elle fournit pour les divers infinis que les fonctions considérées peuvent offrir dans une même aire S où elles sont toutes méromorphes, on obtient la même relation entre les résidus intégraux de ces fonctions, pris dans l'aire dont il s'agit.

58. Quand une fonction méromorphe dépend de plusieurs variables indépendantes, on peut naturellement la différentier, l'intégrer et aussi prendre son résidu partiel ou intégral, par rapport à telles ou telles de ces variables. *Il y a toujours, entre toutes ces opérations, l'indépendance que nous avons constatée entre les deux premières seulement* (158*, 224* *et suiv.*), *chaque fois qu'à partir des valeurs particulières considérées pour les variables indépendantes la fonction est développable en série, procédant suivant les puissances à exposants entiers, les premiers éventuellement négatifs, des excès à modules suffisamment petits, des valeurs courantes des variables sur leurs valeurs initiales.* Il nous suffira d'établir ce principe dans les cas simples que voici.

I. *Pour un indice de différentiation quelconque k, on a*

$$\frac{d}{dy^k}\mathcal{E}_{x=\alpha} f(x,y) = \mathcal{E}_{x=\alpha}\frac{d^k f(x,y)}{dy^k}.$$

Effectivement, les quotients par $1.2\ldots k$ des deux membres de cette relation ont évidemment pour valeur commune le coefficient de $(x-\alpha)^{-1}(\mathrm{Y}-y)^k$ dans le développement, supposé essentiellement possible, de $f(x,y)$ en série procédant suivant les puissances à exposants entiers des différences $x-\alpha$, $\mathrm{Y}-y$, quelques-uns de ces exposants pouvant être négatifs pour la première.

II. *On a encore, sauf détermination convenable des quantités arbitraires*

$$(4)\qquad \int dy \mathcal{E}_{x=\alpha} f(x,y) = \mathcal{E}_{x=\alpha}\int f(x,y)\,dy.$$

Par hypothèse, en effet, la fonction considérée est de la forme

$$f(x,y) = (x-\alpha)^{-\mu}[a_{0,0} + a_{1,0}(x-\alpha) + a_{0,1}(y-y_0) + \ldots];$$

on a donc

$$\mathcal{E}_{x=\alpha} f(x,y) = a_{\mu-1,0} + a_{\mu-1,1}(y-y_0) + a_{\mu-1,2}(y-y_0)^2 + \ldots,$$

d'où, pour le premier membre de la relation (4), l'expression

$$(4\ bis)\qquad {}'C(x) + a_{\mu-1,0}\frac{y-y_0}{1} + a_{\mu-1,1}\frac{(y-y_0)^2}{2} + \ldots,$$

$'C(x)$ étant une fonction arbitraire de x.

On a de plus

$$\int f(x,y)\,dy = {}''C(x) + (x-\alpha)^{-\mu}\left[\frac{a_{0,0}}{1}(y-y_0) + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{a_{m,n}}{n+1}(x-\alpha)^m (y-y_0)^{n+1} + \ldots\right],$$

$''C(x)$ étant une autre fonction arbitraire de x, qu'il faut supposer méromorphe, d'où, pour le second membre de la même relation, l'expression

$$\mathcal{E}_{x=\alpha}{}''C(x) + a_{\mu-1,0}\frac{y-y_0}{1} + a_{\mu-1,1}\frac{(y-y_0)^2}{2} + \ldots,$$

évidemment contenue dans la précédente (4 *bis*).

La formule (4) *s'applique évidemment à des intégrations définies exécutées sur un même chemin parcouru par* y.

III *On a enfin*

$$\mathcal{E}_{x=\alpha}\mathcal{E}_{y=\beta} f(x,y) = \mathcal{E}_{y=\beta}\mathcal{E}_{x=\alpha} f(x,y),$$

car les deux membres ont évidemment pour valeur commune le

coefficient du monôme $\frac{1}{(x-\alpha)(y-\beta)}$ dans le développement dont nous supposons $f(x, y)$ susceptible.

IV. Il est clair que *toutes ces relations, établies pour des résidus partiels, s'étendent d'elles-mêmes au cas de résidus intégraux pris, pour chaque variable, dans une même aire limitée.*

59. *La somme des fractions simples qui figurent dans la formule de décomposition* (14) *du n° 39 a pour expression*

$$\mathcal{E}_t \frac{(f(t))}{x-t}, \tag{5}$$

ce résidu intégral embrassant tous les infinis de $f(t)$ *qui, considérés comme valeurs de* x, *tombent dans l'aire* S.

La considération du développement (1) donne d'abord par définition

$$A_{\mu-1} = \mathcal{E}_{x=\alpha} f(x) = \mathcal{E}_{t=\alpha} f(t), \tag{6}$$

car les deux derniers membres de ces égalités sont évidemment la même quantité représentée par deux notations d'aspects différents. Comme $A_{\mu-2}$ est le coefficient de $\frac{1}{x-\alpha}$ dans le développement analogue de $(x-\alpha)f(x)$, on trouve encore

$$A_{\mu-2} = \mathcal{E}_{x=\alpha}(x-\alpha)f(x) = \mathcal{E}_{t=\alpha}(t-\alpha)f(t), \tag{7}$$

puis de même

$$\begin{cases} A_{\mu-3} = \mathcal{E}_{t=\alpha}(t-\alpha)^2 f(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_0 \ \ = \mathcal{E}_{t=\alpha}(t-\alpha)^{\mu-1} f(t). \end{cases} \tag{8}$$

L'addition membre à membre des égalités (6), (7), (8) multipliées préalablement par $(x-\alpha)^{-1}$, $(x-\alpha)^{-2}$, $(x-\alpha)^{-3}$, ..., $(x-\alpha)^{-\mu}$, donne ensuite successivement, en ayant égard aux

diverses règles contenues dans la formule (3),

$$
\begin{aligned}
&\frac{A_0}{(x-\alpha)^\mu}+\frac{A_1}{(x-\alpha)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{A_{\mu-1}}{x-\alpha}\\
&=\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}[(x-\alpha)^{-\mu}(t-\alpha)^{\mu-1}+(x-\alpha)^{-\mu+1}(t-\alpha)^{\mu-2}+\ldots+(x-\alpha)^{-1}]f(t)\\
&=\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}[(x-\alpha)^{\mu-1}+\ldots+(x-\alpha)(t-\alpha)^{\mu-2}+(t-\alpha)^{\mu-1}]\,\frac{f(t)}{(x-\alpha)^\mu}\\
&=\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}\frac{(x-\alpha)^\mu-(t-\alpha)^\mu}{(x-\alpha)-(t-\alpha)}\,\frac{f(t)}{(x-\alpha)^\mu}\\
&=\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}\frac{f(t)}{x-t}-\frac{1}{(x-\alpha)^\mu}\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}\frac{(t-\alpha)^\mu f(t)}{x-t}=\mathop{\mathcal{E}}_{t=\alpha}\frac{f(t)}{x-t}.
\end{aligned}
$$

Effectivement, comme α est un infini de degré μ de $f(t)$, le produit $(t-\alpha)^\mu f(t)$ est olotrope en $t=\alpha$ (33), ainsi que la fonction de t figurant sous le second signe $\mathcal{E}$ de l'avant-dernier membre de cette suite de relations, et ce résidu partiel s'évanouit (56).

La somme des fractions simples qui commencent le développement (1) étant ainsi égale à la partie du résidu (5) qui correspond à l'infini $t=\alpha$, la somme des divers groupes semblables, correspondant respectivement à tous les infinis de $f(x)$ contenus dans l'aire S, est bien représentée par ce résidu intégral.

60. Le Calcul des résidus n'a pas l'importance de ces théories qui dominent de vastes parties de l'Analyse, mais il a fourni quelques formules d'une rare élégance. Voici celles dont nous pouvons parler en ce moment.

Si $f(x)$ est une fraction rationnelle, le résidu (5), étendu à la totalité des infinis de cette fonction, donne naturellement la somme de toutes les fractions simples provenant de sa décomposition (52). Mais le polynome entier

$$
(9)\qquad A_0x^\mu+A_1x^{\mu-}+\ldots+A_\mu,
$$

qui accompagne éventuellement ces fractions, peut aussi être représenté par un résidu. Effectivement, l'application des considérations du numéro précédent au calcul du groupe de fractions simples qui terminent le second membre de la relation (8) du n° 53,

conduit à

$$\frac{A_0}{x'^{\mu+1}} + \ldots + \frac{A_\mu}{x'} = \mathcal{E}_{t=0} \frac{\left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{x' - t},$$

d'où, en multipliant les deux membres par x' et remplaçant x' par $\frac{1}{x}$,

$$A_0 x^\mu + A_1 x^{\mu-1} + \ldots + A_\mu = \mathcal{E}_{t=0} \frac{\left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{1 - xt}.$$

On a donc la formule

(10) $$f(x) = \mathcal{E} \frac{(f(t))}{x - t} + \mathcal{E}_{t=0} \frac{\left(\frac{1}{t} f\left(\frac{1}{t}\right)\right)}{1 - xt},$$

où le premier résidu doit être étendu à toutes les racines de l'équation entière obtenue en égalant à zéro le dénominateur de $f(t)$. Elle fournit pour la décomposition totale de $f(x)$ un procédé mécanique n'ayant pas une valeur inférieure à celle de tout autre. Le second résidu se réduit naturellement à zéro, quand le degré du numérateur de $f(x)$ est moindre que celui de son dénominateur.

61. Nous savons que le polynôme (9) est précisément le quotient de la division algébrique du numérateur de $f(x)$ par son dénominateur (52).

En appelant donc $D(x)$, $d(x)$ *deux polynômes entiers quelconques, la formule*

$$Q(x) = \mathcal{E}_{t=0} \left(\frac{D\left(\frac{1}{t}\right)}{t d\left(\frac{1}{t}\right)}\right) \frac{1}{1 - xt}$$

permet de développer par de simples différentiations le quotient $Q(x)$ *de la division algébrique du premier par le second.*

62. Dans le cas d'une seule variable, l'énoncé suivant est le plus général que l'on puisse donner du problème de l'*interpolation*, dont la solution trouve des applications si utiles dans les calculs

numériques et aussi dans la représentation par des formules approchées, des phénomènes naturels dont les lois mathématiques ne sont pas exactement connues :

Étant donnée une fonction $\varphi(x)$, *olotrope dans l'aire* S, *et étant nommées*

$$(11)\qquad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_n$$

n valeurs particulières (inégales ou non) de x tombant dans cette aire, trouver un polynôme entier $\varphi_n(x)$ *de degré inférieur à n, tel qu'on ait toujours*

$$(12)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_n(x_i)=\varphi(x_i),\qquad \varphi'_n(x_i)=\varphi'(x_i),\qquad \ldots, \\ \qquad\qquad \varphi_n^{(k_i-1)}(x_i)=\varphi^{(k_i-1)}(x_i), \end{array} \right.$$

k_i *désignant généralement le nombre de celles des quantités* (11) *qui ont* x_i *pour valeur commune.*

Le polynome $\varphi_n(x)$ existant certainement et étant unique (**411***), nous n'avons plus qu'à le calculer par un procédé quelconque.

Posons

$$(13)\qquad \omega(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

polynome de degré n en x; à cause de la formule (10) du n° 37, à cause aussi des conditions (12) combinées avec la nature de la forme générale des dérivées d'ordres quelconques d'une fraction, exprimées en fonctions composées différentielles des deux termes, il est évident que, dans l'aire S, la décomposition des deux fonctions méromorphes

$$\frac{\varphi(x)}{\omega(x)},\quad \frac{\varphi_n(x)}{\omega(x)}$$

donne les mêmes groupes de fractions simples (39). On a donc (59)

$$\mathcal{E}_t\left(\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}\right)\frac{1}{x-t}=\mathcal{E}_t\left(\frac{\varphi_n(t)}{\omega(t)}\right)\frac{1}{x-t}=\frac{\varphi_n(x)}{\omega(x)},$$

parce que le degré du polynome $\varphi_n(x)$ étant essentiellement inférieur à celui de $\omega(x)$, la décomposition de cette dernière fraction rationnelle ne donne que des fractions simples (52), qu'ainsi le

second membre de la formule (10) se réduit au premier des deux résidus qui le composent.

La relation précédente conduit à

$$\varphi_n(x) = \omega(x) \mathcal{E}_t \left(\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}\right) \frac{1}{x-t},$$

et le développement de ce résidu fournit immédiatement le polynome cherché $\varphi_n(x)$.

63. La considération de la relation (8) du nº 53 permet de calculer facilement le résidu intégral d'une fonction rationnelle, qui joue quelque rôle dans certaines questions.

Pour des valeurs de x' suffisamment voisines de zéro, les fractions entre accolades sont évidemment développables en séries entières par rapport à x', et la somme de tous leurs développements, jointe aux fractions simples extérieures aux accolades, fournit le développement de $\frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right)$ en série procédant suivant les puissances croissantes de x' à exposants entiers, les premiers négatifs,

$$(14) \quad \frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{A_0}{x'^{\mu+1}} + \frac{A_1}{x'^{\mu}} + \ldots + \frac{A_\mu}{x'} + A_{\mu+1} + A_{\mu+2} x' + \ldots$$

Mais comme, d'une part, toute fraction entre les accolades, si le degré de son numérateur surpasse zéro, ne fournit à ce développement que des termes de degrés positifs, comme, d'autre part, les fractions extérieures aux accolades ne fournissent que des termes de degrés négatifs, $A_{\mu+1}$, terme constant de ce développement, se réduit nécessairement à la somme $A^{(1)}_{\mu_1-1} + A^{(2)}_{\mu_2-1} + \ldots + A^{(\gamma)}_{\mu_\gamma-1}$ des termes constants dans les développements des dernières fractions des diverses lignes du groupe intérieur aux accolades, c'est-à-dire au résidu intégral de $f(x)$. *On obtiendra donc ce résidu en cherchant, par un procédé quelconque, le coefficient* $A_{\mu+1}$ *du terme de degré zéro dans le développement* (14).

Le cas particulier suivant procure immédiatement la solution de tous les autres.

Pour

$$f(x) = \frac{x^m}{\omega(x)},$$

où m est un entier positif quelconque, où $\omega(x)$ *est le polynome* (13) *de degré* n, *on a*

$$(15) \qquad \mathcal{E} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad = \Sigma_{m-n+1},$$

selon que

$$m < n-1 \quad \text{ou} \quad \text{non} < n-1,$$

Σ_{m-n+1} *représentant dans ce dernier cas la somme de tous les monomes entiers dissemblables en* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *qui sont du même degré* $m-n+1$ *et qui ont* 1 *pour coefficient commun.*

Comme ici, on a évidemment

$$\frac{1}{x'} f\left(\frac{1}{x'}\right) = \frac{1}{x'^{m-n+1}} \frac{1}{(1-x_1x')(1-x_2x')\ldots(1-x_nx')},$$

le terme constant dans le développement du second membre en série procédant suivant les puissances de x' à exposants entiers, négatifs et positifs, est égal au coefficient de x'^{m-n+1} dans le produit des sommes des séries entières en x'

$$\frac{1}{1-x_1x'} = 1 + x_1x' + x_1^2x'^2 + \ldots,$$
$$\frac{1}{1-x_2x'} = 1 + x_2x' + x_2^2x'^2 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{1-x_nx'} = 1 + x_nx' + x_n^2x'^2 + \ldots,$$

c'est-à-dire à zéro ou à Σ_{m-n+1}, selon que $m-n+1$ est négatif ou non.

La formule (15) s'établirait facilement encore par voie de *vérification progressive,* en prouvant qu'elle est vraie pour des valeurs données des entiers m, n, si elle l'est pour toutes les combinaisons de valeurs moindres.

64. On en conclut notamment que *si dans* $f(x)$ *l'excès du degré effectif du dénominateur sur celui du numérateur est* > 1 *ou* $= 1$, *le résidu intégral a pour valeur, dans le premier cas zéro, dans le second, le rapport des coefficients des*

plus hautes puissances de x dans les deux termes de cette fraction rationnelle.

65. En appelant généralement $\mathfrak{A}_m$ le coefficient de $(x - x_0)^m$ dans le développement en série procédant suivant les puissances de $x - x_0$ à exposants entiers, négatifs puis positifs, de la fonction méromorphe $f(x)$ ayant l'infini x_0 de degré μ, on a évidemment

$$\mathfrak{A}_m = \mathcal{E}_{x=x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^{m+1}}.$$

Cette observation, que nous avons déjà mise à profit au n° 59, s'applique d'elle-même au cas de $\mu = 0$, c'est-à-dire où $f(x)$ serait olotrope en x_0. Elle fournit ainsi, pour les coefficients du développement par la formule de Taylor d'une fonction d'une seule variable, une autre notation qui rend des services d'une utilité appréciable dans certaines circonstances. L'exemple le plus saillant est fourni par les formules de Cauchy pour l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants, dont nous aurons à nous occuper dans la troisième Partie de cet Ouvrage.



CHAPITRE III.

FONCTION RADICALE SIMPLE.

Règle de convergence de Gauss.

66. Cette règle, d'ailleurs fort belle en elle-même et fort importante, nous sera utile plus tard (**243**, **273**, *inf.*); nous en plaçons la démonstration ici, parce que nous aurons besoin, dès ce Chapitre, de quelques-unes des propositions sur lesquelles elle s'appuie.

Soit h_n une variante réelle infiniment petite qui finit par conserver un signe constant, et posons

$$P_n = (1 + h_1)(1 + h_2)\ldots(1 + h_n),$$

en admettant qu'aucun facteur de ce produit ne se réduise à 0.

Si la série

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n + \ldots \tag{1}$$

est divergente, le produit P_n *est infini ou infiniment petit pour n infini, selon que le signe final de h_n est $+$ ou $-$.*

Supposons d'abord d'un même signe tous les termes de la série (1).

S'ils sont positifs, sa somme est infinie (**102***, I), et P_n à plus forte raison, à cause de $P_n > 1 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$.

S'ils sont négatifs et tous < 1 en valeurs absolues, l'inégalité évidente $1 - (\pm h_n)^2 < 1$ donnera

$$1 + h_n < \frac{1}{1 - h_n},$$

puis

$$P_n < \frac{1}{(1 - h_1)(1 - h_2)\ldots(1 - h_n)},$$

où le diviseur est infini par ce qui précède.

Quand les termes de la série (1) n'ont pas tous un même signe, ni des valeurs numériques < 1, ils finissent néanmoins par satisfaire à cette double condition, et l'on raisonne de la même manière en négligeant pour un instant ceux des premiers facteurs de P_n qui ne la remplissent pas.

67. La règle que nous allons établir repose sur la comparaison des séries qu'elle intéresse avec la suivante

$$F(a, b, 1) + F(a, b, 2) + \ldots + F(a, b, n) + \ldots, \tag{2}$$

où l'on a

$$F(a, b, n) = \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{(b+1)(b+2)\ldots(b+n)}, \tag{3}$$

expression dans laquelle a, b désignent deux quantités réelles invariables ne se réduisant ni l'une ni l'autre à un entier négatif, qui, par suite, est toujours réelle et conserve un signe constant à partir du moment où $a+n$, $b+n$ restent positifs. La nature de cette série est déterminée par un théorème dont voici l'énoncé.

Quand on a (algébriquement)

$$a - b < -1, \tag{4}$$

la série (2) est convergente, et sa somme S', son reste R'_n sont donnés par les formules

$$S' = -\frac{a+1}{a-b+1} \tag{5}$$

$$R'_n = -\frac{a+1}{a-b+1} F(a+1, b, n). \tag{6}$$

Quand on a au contraire

$$a - b \overline{\gtrless} -1,$$

la somme de ses n premiers termes est infinie; par suite, il y a divergence.

I. *Pour n infini la variante (3), qui conserve la valeur constante 1 quand $a = b$ est, infinie ou infiniment petite selon qu'on a*

$$a - b \gtrless 0.$$

Car on peut écrire

$$F(a, b, n) = \left(1 + \frac{a-b}{b+1}\right)\left(1 + \frac{a-b}{b+2}\right)\cdots\left(1 + \frac{a-b}{b+n}\right),$$

et les secondes parties des facteurs entre parenthèses forment toujours une série divergente (98*) dont les termes finissent par rester positifs ou négatifs selon que $a - b \gtrless 0$ (66).

II. *Sous la condition*

$$(7) \qquad a - b \text{ non} = -1,$$

la somme $S'_{n,p}$ *des p termes suivant le* $n^{\text{ième}}$ *dans la série* (2) *est exprimable par la formule*

$$(8) \qquad S'_{n,p} = \frac{a+1}{a-b+1}[F(a+1, b, n+p) - F(a+1, b, n)].$$

En appelant A, B des valeurs inégales quelconques des paramètres a, b, l'égalité évidente

$$F(A, B, N) - F(A, B, N-1) = \frac{A-B}{B+1} F(A, B+1, N-1)$$

donne généralement

$$F(A, B+1, N-1) = \frac{B+1}{A-B}[F(A, B, N) - F(A, B, N-1)],$$

puis en particulier

$$F(a+1, b+1, N-1) = \frac{b+1}{a-b+1}[F(a+1, b, N) - F(a+1, b, N-1)],$$

après les attributions $A = a+1$, $B = b$ autorisées par la condition (7).

Cette autre égalité évidente

$$F(a, b, N) = \frac{a+1}{b+1} F(a+1, b+1, N-1)$$

donne donc

$$F(a, b, N) = \frac{a+1}{a-b+1}[F(a+1, b, N) - F(a+1, b, N-1)],$$

d'où l'on tire la relation (8) en faisant successivement $N = n+1$, $n+2, \ldots, n+p$, puis sommant.

III. Dans le cas spécifié par l'inégalité (4), la condition (7) est remplie, et la formule (8) donne pour la somme S'_n des n premiers termes de notre série, écrite

$$S'_n = F(a, b, 1) + S'_{1,n-1},$$

l'expression

$$S'_n = \frac{a+1}{b+1} + \frac{a+1}{a-b+1}[F(a+1, b, n) - F(a+1, b, 1)]$$

qui, pour n infini, tend vers

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a+1}{a-b+1}F(a+1, b, 1) = -\frac{a+1}{a-b+1},$$

parce que la condition (4), ou bien $(a+1)-b<0$, donne

$$\lim F(a+1, b, n) = 0 \quad \text{(I)}.$$

De là résultent la convergence de la série, ainsi que la formule (5). La suivante (6) se déduit de la relation (8) en y faisant p infini, puis en remarquant qu'alors le premier terme de la différence entre crochets tend vers zéro, toujours à cause de

$$(a+1)-b<0.$$

IV. Pour $a-b>-1$, la condition (7) est encore remplie, et la formule (8) conserve sa validité. Mais comme alors on a

$$(a+1)-b>0,$$

le premier terme de la différence entre crochets est infini avec n (I), S'_n aussi, et par suite il y a divergence.

V. Pour $a-b=-1$, la formule (8) devient illusoire; mais alors b ne peut s'évanouir puisqu'on suppose a non entier négatif, $F(a, b, n)$ se réduit à $\frac{b}{b+n}$, et notre série à

$$\frac{b}{b+1} + \frac{b}{b+2} + \ldots + \frac{b}{b+n} + \ldots$$

dont la somme est infinie (98*).

68. Dans une série

$$(9) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont les termes finissent par être réels avec un signe invariable, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ du terme de rang $n+1$ à celui qui le précède est une quantité variable qui finit par rester réelle positive, et qu'on peut ordinairement considérer comme une certaine fonction $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right)$ de la quantité positive $\frac{1}{n}$ infiniment petite pour n infini.

Quand cette fonction tend vers une certaine limite ρ non $=1$, *la série* (9) *est convergente ou divergente selon que* $\rho \lessgtr 1$; car, en appelant ρ' une quantité positive comprise entre ρ et 1, on finit par avoir $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right) \lessgtr \rho'$ (**102***, VI).

Quand on a $\rho = 1$, nous ignorons ce qui se passe; mais le théorème de Gauss répond à la question dans un cas très vaste qui est lui-même renfermé dans celui plus étendu *où* $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right)$ *finit par être développable en une série entière par rapport à* $\frac{1}{n}$. Nous démontrerons effectivement la proposition suivante.

69. *Quand on finit par avoir*

$$(10) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + g_1\frac{1}{n} + g_2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \ldots,$$

les coefficients $g_1, g_2, \ldots$ *étant naturellement réels, la série* (9) *est convergente ou divergente selon qu'on a*

$$g_1 < -1$$

ou

$$g_1 \geqq -1.$$

I. Dans le premier cas on peut trouver une quantité réelle g'_1 donnant (algébriquement)

$$g_1 < g'_1 < -1,$$

moyennant quoi le rapport (10) finit évidemment par demeurer

inférieur à la quantité, finalement positive aussi,

$$1+\frac{g'_1}{n}+\left(\frac{g'_1}{n}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-\frac{g'_1}{n}}=\frac{n}{n-g'_1}$$

qui, pour n suffisamment grand, est précisément le rapport du $(n-G+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent dans la série dont

$$F(G-1,\ G-g'_1-1,\ n)$$

est le terme général; G désigne ici quelque entier positif choisi assez grand pour que les quantités $G-1$, $G-g'_1-1$ ne se réduisent ni l'une ni l'autre à un entier négatif.

Cette dernière série étant convergente (67), parce qu'on y a

$$a=G-1,\qquad b=G-g'_1-1,$$

d'où

$$a-b=g'_1<-1,$$

la proposée (9) l'est également (102*, IV), et l'on obtient immédiatement une limite supérieure de la valeur absolue de son reste, en combinant les formules (9) du numéro cité et (6) ci-dessus.

II. Dans le second cas, appelons θ une quantité réelle non égale à un entier négatif et satisfaisant à l'inégalité algébrique

$$\theta+1<g_1.$$

Pour la série à termes finalement positifs

$$\frac{1}{\theta+1}+\frac{1}{\theta+2}+\ldots+\frac{1}{\theta+n}+\ldots,$$

le rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au précédent,

$$\frac{\theta+n}{\theta+n+1}=\left(1+\frac{\theta}{n}\right):\left(1+\frac{\theta+1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}+(\theta+1)\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots,$$

finit par rester inférieur au rapport (10), même quand $g_1=-1$. Cette série étant divergente (98*), la proposée l'est forcément aussi (102*, V).

70. Le théorème de Gauss, énoncé comme nous l'avons fait

au n° **69**, semble indiquer pour criterium de la convergence ou de divergence d'une série telle que (9), la nature spécifique de la fonction $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right)$ pour les valeurs infiniment petites de $\frac{1}{n}$. De plus il épuise la question dans le cas où *cette fonction est olotrope en* $\frac{1}{n} = 0$.

A ce point de vue, il resterait donc à étudier les séries à termes positifs, *classées d'après les phases singulières de diverses natures, dans lesquelles* $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right)$ *peut entrer en* $\frac{1}{n} = 0$.

Nous ne pouvons nous engager dans cette discussion; mais, dans un cas comprenant celui où cette phase est de nature *rhizomorphe* (**153**, *inf.*), on peut formuler la règle suivante :

Si l'on finit par avoir

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + G_1\left(\frac{1}{n}\right)^{e_1} + G_2\left(\frac{1}{n}\right)^{e_2} + \ldots,$$

où les exposants e_1, e_2, ... *sont des quantités positives croissantes quelconques* (**212**, *inf.*), *et où les coefficients* (*réels*) G_1, G_2, ... *sont tous différents de* 0, *la condition nécessaire et suffisante pour que la série* (9) *soit convergente est qu'on ait* $e_1 \leqq 1$, *avec* $G_1 < 0$ *dans le premier cas,* $G_1 < -1$ *dans le second.* Sa démonstration ressemble beaucoup à la précédente.

Propriétés générales de la fonction radicale simple.

71. Nous allons étudier les fonctions implicites u de x, engendrées par la résolution de chacune des équations entières à deux termes seulement, de degré quelconque $m \neq 0$,

$$(1) \qquad u^m - x^n = 0,$$

$$x^n u^m - 1 = 0.$$

La première est *binome* par rapport à la fonction inconnue u, et se change en la seconde par la substitution à n d'un entier négatif. Nous pouvons donc la considérer exclusivement, à condition d'admettre que l'exposant n peut y prendre indifféremment des valeurs

positives et négatives. C'est ce que nous ferons désormais pour plus de commodité.

Ces fonctions sont les plus simples des irrationnelles algébriques (32*) (305*), et jouent un rôle extrêmement important dans la théorie des fonctions implicites, ainsi que dans tout le reste de l'Analyse.

L'application des principes généraux (307* *et suiv.*) à ce cas particulier conduit tout d'abord aux conclusions suivantes.

I. *On peut, cela même d'une infinité de manières, trouver une paire de quantités x_0, u_0 qui ne soient nulles ni l'une ni l'autre et satisfassent numériquement à l'équation* (1).

Il suffit effectivement de choisir arbitrairement une quantité non nulle w_0, puis de prendre $x_0 = w_0^m$, $u_0 = w_0^n$; car les égalités évidentes $x_0^n = w_0^{mn} = u_0^m$ donnent

$$u_0^m - x_0^n = 0. \tag{2}$$

Nous aurions pu dire encore que, pour une valeur quelconque x_0 de x, l'équation (1) se change en une équation numérique entière à une seule inconnue u, qu'ainsi elle admet au moins une racine u_0 (13), et remarquer que u_0 ne peut être nulle si x_0 ne l'est pas. Mais il est tout aussi simple, et nous jugeons préférable, de rendre nos raisonnements indépendants de la théorie générale des équations.

II. *La condition initiale*

$$u = u_0 \quad \text{pour} \quad x = x_0,$$

rendue admissible par l'égalité (2), *ayant été annexée à l'équation* (1), *celle-ci définit une fonction implicite qui est localement olotrope partout ailleurs qu'en* $x = 0$ (175*, IV).

Soient en effet S_x une aire limitée, de forme et d'étendue quelconques, qui contienne le point x_0 mais non l'origine $x = 0$, puis $\xi' < \xi''$ deux quantités positives, la première inférieure à la plus petite distance à l'origine O_x des points intérieurs à l'aire S_x, la seconde supérieure à la plus grande, puis encore $\upsilon' < \upsilon''$ deux

autres quantités positives choisies, comme on le peut évidemment, de manière à satisfaire aux inégalités

$$(3) \qquad \upsilon'^m < \xi'^n, \quad \upsilon''^m > \xi''^n$$

si n est positif, ou bien

$$(4) \qquad \upsilon'^m < \xi''^n, \quad \upsilon''^m > \xi'^n$$

si n est négatif, puis enfin S_u l'aire annulaire comprise entre les deux circonférences ayant l'origine O_u pour centre commun avec υ', υ'' pour rayons respectivement, aire évidemment limitée qui contient u_0, mais non le point $u = 0$.

Comme le premier membre de l'équation (1) est olotrope à l'intérieur des aires S_x, S_u, comme d'autre part sa dérivée première par rapport à u se réduit à mu^{m-1}, fonction qui, quelle que soit x, ne peut s'évanouir que pour $u = 0$, valeur extérieure à S_u, la fonction implicite u existe et reste localement olotrope aussi longtemps que sa valeur ne s'échappe pas de l'aire S_u (310*). Or c'est ce qui arrive aussi longtemps que x ne franchit pas les limites de l'aire S_x, car on y a les inégalités constantes

$$\xi' < \operatorname{mod} x < \xi'',$$

dont la combinaison avec les précédentes (3) ou (4) et l'équation (1) donne constamment aussi

$$\upsilon' < \operatorname{mod} u < \upsilon''.$$

III. *A partir de toute valeur initiale de* x, $x_i \neq 0$, *le développement de la fonction implicite* u *par la formule de Taylor admet au moins* $\operatorname{mod} x_i$ *pour rayon de convergence* (*Cf.* 78, III, *inf.*).

Car u est localement olotrope à l'intérieur de tout cercle décrit de x_i pour centre avec un rayon quelconque inférieur à $\operatorname{mod} x_i$ (II); de plus, elle est monodrome dans cette aire parce que celle-ci est imperforée (173*), et partant olotrope, à proprement parler (201*).

IV. *Pour toute valeur de* $x \neq 0$, *et quel que soit l'indice* k, *on a*

$$(5) \qquad \frac{d^k u}{dx^k} = \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - k + 1)\frac{u}{x^k},$$

où nous avons posé pour abréger

$$\frac{n}{m} = \mu.$$

On trouve d'abord (311*)

$$\frac{du}{dx} = \frac{nx^{n-1}}{mu^{m-1}} = \mu \frac{x^n}{u^m} \frac{x^{-1}}{u^{-1}} = \mu \frac{u}{x},$$

à cause de l'équation fondamentale (1).

Il vient ensuite pour une valeur quelconque de l'entier q

$$\frac{d}{dx} \frac{u}{x^q} = \frac{1}{x^q} \frac{du}{dx} - q \frac{u}{x^{q+1}} = (\mu - q) \frac{u}{x^{q+1}},$$

relation dont la combinaison avec la précédente différentiée indéfiniment conduit à celle que nous avons en vue.

V. Si donc on appelle u_i la valeur atteinte par u en $x = x_i$, *la formule* (5) *donne pour le développement de cette fonction par la formule de Taylor à partir de* x_i,

$$(6)\quad \begin{cases} u = u_i + \mu \dfrac{u_i}{x_i} \dfrac{x - x_i}{1} + \ldots \\ \quad + \mu(\mu - 1)\ldots(\mu - k + 1) \dfrac{u_i}{x_i^k} \dfrac{(x - x_i)^k}{1.2\ldots k} + \ldots = u_i \varphi\left(\mu, 1 + \dfrac{x - x_i}{x_i}\right), \end{cases}$$

en posant généralement pour abréger

$$(7)\quad \varphi(\mathrm{m}, 1 + t) = 1 + \frac{\mathrm{m}}{1} t + \ldots + \frac{\mathrm{m}(\mathrm{m} - 1)\ldots(\mathrm{m} - k + 1)}{1.2\ldots k} t^k + \ldots.$$

VI. *Si* μ *se réduit à un entier positif (ou nul), la fonction* u *est encore olotrope en* $x = 0$, *par suite indéfiniment* (II). *Sinon elle y entre dans une phase singulière, en y étant méromorphe* (29) *quand* μ *est un entier négatif, mais non méromorphe dans tous les autres cas.*

Dans le premier cas, tous les termes du développement (6) qui sont postérieurs au $(\mu + 1)^{\text{ième}}$ contiennent le facteur nul $(\mu - \mu)$; ce développement se réduit donc à un polynome entier en $(x - x_i)$ de degré μ, et l'on a évidemment

$$u = u_i \left(1 + \frac{x - x_i}{x_i}\right)^{\mu} = \frac{u_i}{x_i^{\mu}} x^{\mu}.$$

Si u était olotrope en $x=0$ en dehors de ce premier cas, elle serait développable par la formule de Maclaurin

$$u = a_q x^q + \ldots,$$

où nous avons écrit seulement le terme effectif de moindre degré; on en déduirait

$$u^m = a_q^m x^{mq} + \ldots,$$

et l'équation (1) donnerait l'identité

$$a_q^m x^{mq} + \ldots = x^n.$$

Or cette dernière est impossible; car, si n est négatif, le second membre n'est pas olotrope en $x=0$, tandis que le premier l'est; si n est positif, l'identité des termes effectifs de moindres degrés dans les deux membres exige en particulier que l'on ait

$$mq = n,$$

d'où $\frac{n}{m} = \mu = q =$ un entier positif, contrairement à l'hypothèse.

Quand μ est un entier négatif, on trouve comme tout à l'heure

$$u = \frac{u_i}{x_i^\mu} x^\mu,$$

monome infini, mais méromorphe, en $x=0$ (**152***).

Quand μ n'est pas un entier, u n'est pas méromorphe et infinie en $x=0$, parce que son inverse arithmétique, racine de l'équation binome

$$\left(\frac{1}{u}\right)^m - x^{-n} = 0,$$

où le rapport $\frac{-n}{m}$ n'est pas un entier non plus, n'est pas olotrope en $x=0$, comme nous venons de le constater (**42**).

VII. *Hors le cas où μ est un entier non négatif,* mod x_i *est le rayon de convergence maximum du développement* (6).

Car si ce développement admettait un rayon de convergence $R > \operatorname{mod} x_i$, la fonction u, qui serait alors olotrope dans tout l'intérieur du cercle ayant x_i pour centre avec R pour rayon, le serait

en particulier en $x = 0$, point intérieur à ce cercle. Or nous venons de constater le contraire (*Cf.* 78, III, *inf.*).

VIII. *La fonction u ne peut s'évanouir pour aucune valeur de x non* $= 0$.

Ce fait est rendu évident par l'équation fondamentale (1); il résulterait encore d'un raisonnement identique à celui du n° 80, IV (*inf.*).

72. Nous discuterons la série (6) pour les valeurs de x tombant sur la circonférence de centre x_i et de rayon $= \text{mod}\, x_i$, en posant

$$-\frac{x - x_i}{x_i} = \theta,$$

où $\text{mod}\, \theta = 1$, et en mettant les termes postérieurs au premier sous la forme générale

$$(8) \qquad \begin{cases} u_i \dfrac{(-\mu - 1 + 1)(-\mu - 1 + 2)\dots(-\mu - 1 + k)}{1.2\dots k}\theta^k \\ = u_i F(-\mu - 1, 0, k)\theta^k, \end{cases}$$

où F désigne l'expression numérique définie au n° 67.

I. Si μ est positif, on a $(-\mu - 1) - 0 < -1$, et la série

$$(9) \qquad F(-\mu - 1, 0, 1) + F(-\mu - 1, 0, 2) + \dots,$$

est convergente (*loc. cit.*) avec celle formée par les modules de ses termes, parce que ces derniers sont réels et conservent un signe constant à partir du moment où $-\mu - 1 + k$ reste positif. La série (6) jouit donc de la même propriété.

Quand μ est < 1, ces derniers termes sont tous négatifs; il en résulte que, *si* θ *est réel positif, c'est-à-dire si x est située sur le segment rectiligne dont* x_i *et* 0 *sont les extrémités, le module de la somme de la série* (6) *privée de son premier terme est précisément égal à la somme de la série formée par les modules des termes restants.* Nous consignons ici cette observation de détail que nous aurons à utiliser plus tard (163, *inf.*).

Pour $x = 0$, on a $\theta = 1$, et la somme de la série (6) est $= 0$,

parce qu'elle se réduit au produit de u_i par la somme de la série (9) augmentée de 1, c'est-à-dire par o (67, III).

II. Si $\mu = 0$, toutes les quantités (9) sont nulles, et la série (6) se réduit à son premier terme u_i.

III. Si μ est négatif, il y a plusieurs cas à distinguer.

Quand $x = 0$, la série (6) est divergente avec une somme infinie; on a effectivement $\theta = 1$, et la série (9) a une somme infinie à cause de $(-\mu-1)-0>-1$ (67, IV).

Quand x non $= 0$, le second facteur de l'expression (8) est infiniment petit, constant ($= 1$) ou infini, pour k infini, selon qu'on a $(-\mu-1)-0 \lesseqgtr 0$, c'est-à-dire $\mu \gtreqless -1$ (67, I).

Dans les deux derniers cas la série (6) est divergente parce que son terme général n'est pas infiniment petit. Mais dans le premier elle est convergente à cause de $\operatorname{mod}\theta = 1$ avec θ non $= 1$, parce que le second facteur dont il s'agit finit par conserver un signe constant et par décroître numériquement sans cesse (100*).

La combinaison de ces conclusions avec le théorème du n° 126* montre que, *même dans ces cas extrêmes, la série* (6), *pourvu qu'elle soit convergente, a toujours pour somme la valeur acquise par la fonction u au bout d'un chemin ayant x_i et x pour derniers sommets*. En $x = 0$ toutefois, il faut avoir égard à ce que nous dirons plus bas (103, *inf.*) sur la variation de la fonction u qui, en général, n'y est plus olotrope.

73. Nonobstant ce qui vient d'être observé, *nous n'emploierons jamais le développement* (6) *que sous la condition de rigueur*

$$\operatorname{mod}(x - x_i) < \operatorname{mod} x_i.$$

En procédant ainsi nous aurons toujours des séries de convergence certaine, et surtout nous ne serons pas exposés à atteindre la valeur $x = 0$ pour laquelle notre fonction cesse habituellement d'être olotrope.

Sur un même chemin donné, issu de la valeur fondamentale x_0 de x, la valeur de la fonction u ne dépend jamais que de celle de la fraction $\frac{n}{m}$, nullement de la forme de cette dernière, et aussi de sa valeur fondamentale u_0 qu'on peut choisir de plusieurs ma-

nières; c'est ce qui résulte des diverses observations faites au n° **71**. Nous représenterons donc provisoirement la valeur que u acquiert en x par

$$f\left(\frac{n}{m}, x\right),$$

en sous-entendant qu'il s'agit d'une valeur fondamentale de u et d'un chemin, tous deux préalablement définis.

74. La plupart des propriétés générales de la fonction f résultent des combinaisons variées des formules fondamentales que nous allons établir.

Si, appelant $x', x'', \ldots, x^{(g)}$, *g variables indépendantes cheminant arbitrairement à partir des valeurs fondamentales* $x'_0, x''_0, \ldots, x_0^{(g)}$, *on représente par*

$$'f\left(\frac{n}{m}, x'\right), \quad ''f\left(\frac{n}{m}, x''\right), \quad \ldots, \quad {}^{(g)}f\left(\frac{n}{m}, x^{(g)}\right),$$

les déterminations de la fonction $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$ *qui correspondent aux valeurs fondamentales*

$$u'_0, \quad u''_0, \quad \ldots, \quad u_0^{(g)},$$

et si K′, K″, …, *sont g exposants entiers de valeurs et de signes quelconques, on a l'identité*

$$(10) \quad f\left(\frac{n}{m}, x'^{K'} x''^{K''} \ldots\right) = \left[{}'f\left(\frac{n}{m}, x'\right)\right]^{K'} \left[{}''f\left(\frac{n}{m}, x''\right)\right]^{K''} \ldots,$$

le premier membre étant, bien entendu, la valeur de la fonction $u = f\left(\frac{n}{m}, x\right)$ *au bout du chemin décrit à partir de*

$$x_0 = x'^{K'}_0 x''^{K''}_0 \ldots,$$

par

$$x = x'^{K'} x''^{K''} \ldots,$$

cette fonction u partant de la valeur fondamentale

$$u_0 = u'^{K'}_0 u''^{K''}_0 \ldots.$$

En élevant à la $m^{\text{ième}}$ puissance le premier membre de la rela-

tion (10) et chacun des facteurs du second, on trouve le même résultat $(x'^{K'}x''^{K''}\dots)^n$, à cause de l'identité de définition

$$\left[f\left(\frac{n}{m}, x\right)\right]^m = x^n.$$

Il en résulte que ces deux membres sont des racines de la même équation en U

$$(11) \qquad U^m - (x'^{K'}x''^{K''}\dots)^n = 0,$$

dont le premier membre est fonction olotrope de U et des g variables indépendantes $x', x'', \dots, x^{(g)}$ puisque chacune de ces dernières ne prend jamais la valeur 0. D'autre part, les valeurs initiales des deux membres de la relation (10) sont égales par hypothèse, de plus non nulles, et par suite n'annulent pas mU^{m-1} dérivée première par rapport à U du premier membre de l'équation (11). Ces deux racines de l'équation (11) sont donc égales quelles que soient $x', x'', \dots, x^{(g)}$ (310*), ce que nous voulions prouver.

75. *En appelant* $K_1, K_2, \dots, K_g$ *des exposants entiers de valeurs et de signes arbitraires, on a, au bout d'un même chemin quelconque issu de* x_0, *l'identité*

$$(12) \qquad \begin{cases} f\left(K_1\frac{n_1}{m_1} + K_2\frac{n_2}{m_2} + \dots + K_g\frac{n_g}{m_g}, x\right) \\ \quad = \left[f\left(\frac{n_1}{m_1}, x\right)\right]^{K_1} \cdots \left[f\left(\frac{n_g}{m_g}, x\right)\right]^{K_g}, \end{cases}$$

pourvu seulement que cette relation ait lieu numériquement en $x = x_0$.

Si, posant

$$M = m_1 m_2 \dots m_g, \qquad M_1 = \frac{M}{m_1}, \qquad \dots, \qquad M_g = \frac{M}{m_g},$$

on élève à la $M^{\text{ième}}$ puissance le premier membre mis préalablement sous la forme équivalente (73)

$$f\left(\frac{K_1 M_1 n_1 + \dots + K_g M_g n_g}{M}, x\right),$$

et les divers facteurs du second semblablement transformés, on

obtient les résultats identiques

$$x^{K_1 M_1 n_1 + \ldots + K_g M_g n_g}, \quad (x^{M_1 n_1})^{K_1} \ldots (x^{M_g n_g})^{K_g}.$$

En d'autres termes, ces deux membres sont des racines de la même équation

$$U^M - x^{K_1 M_1 n_1 + \ldots + K_g M_g n_g} = 0,$$

dont les valeurs fondamentales en x_0 sont égales. D'où l'on achève la démonstration comme ci-dessus (74).

76. *Si $\frac{n'}{m'}$ est une autre fraction à termes entiers, le second positif, on a au bout d'un chemin quelconque l'identité*

$$f\left[\frac{n'}{m'}, f\left(\frac{n}{m}, x\right)\right] = f\left(\frac{n'}{m'}\frac{n}{m}, x\right),$$

pourvu toujours qu'en x_0 cette relation ait lieu numériquement.

On raisonnera de la même manière, après avoir observé qu'en élevant le premier membre à la puissance $m'^{\text{ième}}$, puis à la puissance $m^{\text{ième}}$, et le second à la puissance $(mm')^{\text{ième}}$, on obtient les résultats identiques $(x^n)^{n'}$ et $x^{n'n}$.

Quand $\frac{n'}{m'}$ se réduit à un entier, cette relation équivaut à un cas particulier de l'identité (12).

77. Les énoncés se simplifient, les résultats s'élargissent en même temps, par la substitution à la fonction implicite $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$, d'une autre pseudo-fonction au moyen de laquelle elle s'exprime très simplement.

Moyennant l'égalité (2) l'équation fondamentale (1) peut s'écrire

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^m - \left(\frac{x}{x_0}\right)^n = 0,$$

d'où la formule évidente

$$(13) \qquad f\left(\frac{n}{m}, x\right) = u = u_0 \psi\left(\frac{n}{m}, \frac{x}{x_0}\right),$$

où $\psi\left(\frac{n}{m}, \mathfrak{r}\right)$ représente généralement celle des racines $\mathfrak{u}$ de l'équation binome

$$\mathfrak{u}^m - \mathfrak{r}^n = 0,$$

que précise (sur un chemin convenable) la condition initiale évidemment admissible

$$\mathfrak{u} = 1 \quad \text{pour} \quad \mathfrak{r} = 1.$$

Nous dirons aussi bien avec une autre notation, que $\psi\left(\frac{n}{m}, x\right)$ est ce que devient la fonction u quand on prend $x_0 = u_0 = 1$, c'est-à-dire *la pseudo-fonction ayant pour premier développement la série* (7) *pour*

$$\mathfrak{m} = \mu, \qquad t = \frac{x - x_0}{x_0}, \qquad (x_0 = 1).$$

78. Désormais nous considérerons plus volontiers la pseudo-fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$ dont le premier développement commence à $x_0 = 1$, et s'obtient en substituant $\frac{x - x_0}{x_0} = x - 1$ à t dans cette même série (7), mais où nous supposerons que $\mathfrak{m}$ représente une quantité quelconque (réelle, commensurable ou non, ou bien imaginaire). Voici les premières observations à faire à ce sujet.

I. Cette série est entière en t, et ses coefficients sont des polynomes entiers en $\mathfrak{m}$, de formes spéciales, dont tous les coefficients sont réels.

II. *Pour* $t = 0$, *et aussi pour* $\mathfrak{m} = 0$, *on a toujours*

$$\varphi(\mathfrak{m}, 1 + t) = 1.$$

III. *Sauf le cas où* $\mathfrak{m}$ *est un entier non négatif, la série* (7) *a* 1 *pour rayon de convergence maximum.*

Car alors elle est illimitée, aucun de ses coefficients ne pouvant s'évanouir, et le rapport du $(k+1)^{\text{ième}}$ terme au $k^{\text{ième}}$ se réduit à

$$\frac{\mathfrak{m} - k + 1}{k}\, t,$$

quantité dont, pour k infini, le module a pour limite $\operatorname{mod} t$, quel

que soit $\mathfrak{m}$. Si donc mod t est > 1, le module du terme général finit par croître sans cesse, et il y a divergence. Si l'on a au contraire

$$\bmod t < 1,$$

le module du terme général est fini parce qu'il arrive à décroître sans cesse. D'où l'on conclut (114*) que la série admet pour rayon de convergence toute quantité positive inférieure à 1, par suite 1 aussi.

IV. *La série* (7) *peut être mise sous forme d'une série entière en* $\mathfrak{m}$, t *indistinctement, dont les rayons de convergence sont le premier illimité, le second* $= 1$.

Si M, τ désignent les modules de $\mathfrak{m}$, t, la somme de ceux des termes élémentaires du développement du terme général de notre série en un polynome entier par rapport à $\mathfrak{m}$, t est évidemment

$$\frac{M(M+1)\ldots(M+k-1)}{1.2\ldots k}\tau^k,$$

c'est-à-dire le terme général de la série $\varphi(-M, 1-\tau)$. Cette dernière étant convergente quel que soit M pour $\tau < 1$ (III), le point en question est une conséquence immédiate du théorème du n° 107*.

En ordonnant cette série par rapport à $\mathfrak{m}$, et posant ainsi

$$(14) \qquad \varphi(\mathfrak{m}, 1+t) = 1 + A_1\mathfrak{m} + A_2\mathfrak{m}^2 + \ldots,$$

les coefficients A_1, A_2, ... sont des fonctions de t, d'une forme très simple que nous indiquerons tout à l'heure (85, *inf.*).

79. *La fonction* $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *se réduit toujours à* $x^{\mathfrak{m}}$, *pour* $\mathfrak{m}$ *entier* (*positif ou négatif*). Car, par définition, son premier développement $\varphi(\mathfrak{m}, 1+\overline{x-1})$ est alors en fait celui même de ce monome, construit par la formule de Taylor à partir de $x = 1$ (177*).

A l'aide du lemme suivant nous lui étendrons immédiatement, pour toutes valeurs de $\mathfrak{m}$, les propriétés générales trouvées aux nos 74 et suivants, pour des valeurs réelles commensurables de ce paramètre.

Soient

$$P(x, y, \ldots),$$

un polynome entier de degrés m, n, ... par rapport aux h variables x, y, ..., et

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_M, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_N, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

h groupes de $M > m$, $N > n$, ... *valeurs numériques de ces diverses variables, dans chacun desquels deux quelconques sont inégales. On a identiquement*

$$(15) \qquad P(x, y, \ldots) = 0,$$

si l'on a numériquement

$$(16) \qquad P(x_i, y_j, \ldots) = 0,$$

pour toute combinaison de valeurs des indices i, j, ...

Pour $h = 1$, le point en question a été établi antérieurement (**412***, II). Si ensuite on le suppose démontré pour $h - 1$ variables, et si l'on nomme

$$(17) \qquad P_0(y, \ldots), \quad P_1(y, \ldots), \quad \ldots, \quad P_m(y, \ldots),$$

les coefficients de $1, x, \ldots, x^m$ dans $P(x, y, \ldots)$ ordonné par rapport à x, les conditions (16), jointes à ce que nous venons de rappeler pour $h = 1$, montrent qu'on a les égalités numériques

$$P_0(y, \ldots) = P_1(y, \ldots) = \ldots = P_m(y, \ldots) = 0,$$

pour toute combinaison de valeurs des $h - 1$ indices j, ... L'hypothèse faite à l'instant entraîne donc la nullité de tous les coefficients des polynomes (17) et par suite l'identité (15), puisque l'ensemble de ces coefficients est précisément celui des coefficients de $P(x, y, \ldots)$.

Notre théorème démontré directement pour $h = 1$ s'étend donc aux cas de $h = 2, 3, \ldots$.

On en conclut immédiatement l'identité

$$P(x, y, \ldots) = \Pi(x, y, \ldots),$$

si P, Π *sont deux polynomes entiers de degrés inférieurs à* M, N, ..., *qui donnent lieu aux égalités numériques*

$$P(x_i, y_j, \ldots) = \Pi(x_i, y_j, \ldots).$$

80. En supposant praticables pour la pseudo-fonction

$$u = \psi(\mathfrak{m}, x)$$

tous les chemins à considérer, point que nous éclaircirons dans un instant (III, *inf.*), nous aurons ce qui suit.

I. *Cette fonction satisfait à l'équation différentielle d'ordre quelconque k*

$$(18) \qquad \frac{d^k u}{dx^k} = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\ldots(\mathfrak{m}-k+1)\frac{u}{x^k}.$$

Pour toute valeur réelle commensurable $\frac{n}{m} = \mu$ du paramètre $\mathfrak{m}$, le premier développement de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ satisfait certainement à cette équation, car il est alors celui même de $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$, construit sous la condition numérique $x_0 = u_0 = 1$, qui satisfait, comme nous l'avons vu, à l'équation (5), forme correspondante de celle-ci.

D'autre part, en substituant à u le premier développement de $\psi(\mathfrak{m}, x)$, savoir $\varphi(\mathfrak{m}, 1+\overline{x-1})$, série dont tous les coefficients sont des polynomes entiers en $\mathfrak{m}$, à $\frac{1}{x^k}$ son développement par la formule de Taylor à partir de $x = 1$, les deux membres de cette équation se transforment en des séries entières en $(x-1)$ dont les coefficients sont tous évidemment aussi des polynomes entiers en $\mathfrak{m}$; et l'égalité identique de ces deux séries pour $\mathfrak{m} = \frac{n}{m}$ entraîne l'égalité numérique indéfinie pour les mêmes valeurs de $\mathfrak{m}$, des polynomes entiers qui dans les deux membres servent de coefficients à des puissances semblables de $x-1$. Les valeurs inégales de ce genre qu'on peut attribuer à $\mathfrak{m}$ étant en nombre évidemment illimité, les polynomes dont il s'agit sont égaux entre eux pour toutes valeurs de $\mathfrak{m}$ (79); par suite, les premiers développements des deux membres de l'équation (18) sont égaux identiquement pour toutes les valeurs imaginables de $\mathfrak{m}$. Tous

leurs développements ultérieurs sont donc aussi identiquement égaux (**177***), ce qui est précisément le point à établir.

II. Ainsi qu'au n° **71**, V, *on en déduit immédiatement pour le développement de* $\psi(\mathfrak{m}, x)$, *à partir de* $x = x_i$,

$$\psi(\mathfrak{m}, x) = u_i \varphi\left(\mathfrak{m}, 1 + \frac{x - x_i}{x_i}\right), \tag{19}$$

où u_i représente toujours la valeur acquise antérieurement par $\psi(\mathfrak{m}, x)$ en x_i.

III. Pour $\mathfrak{m}$ non entier nul ou positif, la série $\varphi(\mathfrak{m}, 1 + t)$ ayant 1 pour rayon de convergence maximum (**78**, III), *le développement* (19) *reste valable pour toute valeur de* x *intérieure au cercle de centre* x_i *et de rayon* $= \operatorname{mod} x_i$, *et cesse de l'être en dehors*.

Il en résulte évidemment qu'on peut arriver par cheminement à toute valeur de x non nulle, en d'autres termes que $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *est localement olotrope partout ailleurs qu'en* $x = 0$.

Mais *cette fonction cesse d'être olotrope en* $x = 0$, car autrement elle le serait indéfiniment, et le rayon de convergence du développement (19) serait illimité (**206***) au lieu d'avoir $\operatorname{mod} x_i$ pour valeur maximum.

Pour elle comme pour $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$, *les seuls chemins praticables sont donc ceux dont aucun sommet ne coïncide avec l'origine* O_x, *et dont la longueur de chaque côté est inférieure à la distance de son sommet antérieur à cette origine.*

IV. *Pour aucune valeur de* x *non* $= 0$, *la fonction* ψ *ne peut s'évanouir*. Car, si l'on avait $u_i = 0$, on aurait, d'après la formule (19), $\psi(\mathfrak{m}, x) = 0$ identiquement, ce qui n'est pas, puisque son premier développement contient certainement des coefficients non nuls.

V. On notera que la série $\varphi(\mathfrak{m}, 1 + t)$ n'est pas autre chose que la valeur de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ à l'extrémité du segment rectiligne allant de $x = 1$ à $x = 1 + t$.

VI. En considérant le paramètre $\mathfrak{m}$ comme une seconde variable

indépendante, et en ayant égard à l'alinéa IV du n° 78, *la fonction* $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *est localement olotrope pour toutes valeurs de* $\mathfrak{m}$ *associées avec toutes celles de* x, *sauf* $x = 0$.

81. L'artifice employé ci-dessus (80, I) fournit aussi facilement l'extension à la pseudo-fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$, des propriétés générales de la fonction implicite $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$.

I. *Avec les notations du* n° 74, *on a identiquement*

$$(20) \qquad \psi(\mathfrak{m}, x'^{K'} x''^{K''} \ldots) = [\psi(\mathfrak{m}, x')]^{K'} [\psi(\mathfrak{m}, x'')]^{K''} \ldots,$$

pourvu seulement que la notation du premier membre s'applique à la valeur de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *au bout du chemin que font décrire à* $x = x'^{K'} x''^{K''} \ldots$ *les marches simultanées de* $x', x'', \ldots$ *à partir de* $1, 1, \ldots$.

Quand $\mathfrak{m}$ se réduit à une quantité commensurable quelconque $\frac{n}{m}$, cette relation est un simple cas particulier de l'identité (10) parce que pour $x' = x'' = \ldots = x'^{K'} x''^{K''} \ldots = 1$ les deux membres prennent les valeurs initiales $1 = 1^{K'} 1^{K''} \ldots$.

Comme, d'autre part, les premiers développements des deux membres en séries entières par rapport aux différences $x' - 1$, $x'' - 1$, ... ont évidemment pour coefficients des polynômes entiers en $\mathfrak{m}$, leur identité pour $\mathfrak{m}$ commensurable impose la condition d'être numériquement égaux pour toute valeur de $\mathfrak{m}$ réelle commensurable, à deux quelconques de ces polynômes servant de coefficients à des termes semblables dans le premier membre et dans le second.

Deux semblables polynomes sont donc égaux quelle que soit la valeur du paramètre $\mathfrak{m}$ (79), d'où résulte l'identité (20) pour les premiers développements de ses deux membres, et par suite pour tous ceux qui peuvent lui succéder (177*).

II. *En conservant les notations du* n° 75, *on a au bout d'un même chemin quelconque, et cela quelles que soient les quantités* $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_g$,

$$(21) \qquad \psi(K_1 \mathfrak{m}_1 + \ldots + K_g \mathfrak{m}_g, x) = [\psi(\mathfrak{m}_1, x)]^{K_1} \ldots [\psi(\mathfrak{m}_g, x)]^{K_g}.$$

Même raisonnement fondé sur ce que les premiers développements des deux membres ont pour coefficients des polynomes entiers en $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_g$, et sur ce qu'ils sont égaux identiquement, pour toutes les combinaisons de valeurs réelles et commensurables de ces quantités (75).

III. *On a de même, pour toutes valeurs de* $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}'$,

$$\psi[\mathfrak{m}', \psi(\mathfrak{m}, x)] = \psi(\mathfrak{m}'\mathfrak{m}, x).$$

Même raisonnement (76).

82. La relation générale (21) permet de mettre sous une forme remarquable la formule de différentiation (18).

En y prenant $g = 2$, $K_1 = -K_2 = 1$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_2 = k$, elle donne

$$\psi(\mathfrak{m} - k, x) = \frac{\psi(\mathfrak{m}, x)}{\psi(k, x)} = \frac{\psi(\mathfrak{m}, x)}{x^k} \quad (79).$$

On en conclut

$$(22) \qquad \frac{d^k\psi(\mathfrak{m}, x)}{dx^k} = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\ldots(\mathfrak{m}-k+1)\psi(\mathfrak{m}-k, x).$$

83. Quand $\mathfrak{m}$ n'a pas la valeur -1, le changement de $\mathfrak{m}$ en $\mathfrak{m}+1$ et l'hypothèse $k = 1$ réalisés dans la formule (22) donnent en intégrant

$$\int\psi(\mathfrak{m}, x)\,dx = \frac{\psi(\mathfrak{m}+1, x)}{\mathfrak{m}+1} + C = \frac{x\psi(\mathfrak{m}, x)}{\mathfrak{m}+1} + C \quad (81, \text{II}).$$

Pour $\mathfrak{m} = -1$, cette formule devient illusoire : $\psi(\mathfrak{m}, x)$ se réduit à $\frac{1}{x}$, et l'intégrale est le *logarithme népérien* dont nous parlerons longuement plus tard (Chap. V, *inf.*).

84. Cette autre propriété caractéristique d'un genre tout différent nous sera bien utile aussi.

Si les quantités

$$\ldots \quad x_{i-1}, \quad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \ldots$$

forment une progression géométrique de raison q, *les valeurs*

correspondantes de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *en forment une autre de raison*

$$\varphi(\mathfrak{m}, 1+\overline{q-1}).$$

Car (en supposant ces valeurs de x suffisamment rapprochées) les égalités

$$\ldots = \frac{x_i}{x_{i-1}} = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ldots = q$$

donnent

$$\ldots = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \ldots = q-1,$$

d'où (80, II)

$$\ldots = \frac{u_i}{u_{i-1}} = \frac{u_{i+1}}{u_i} = \ldots = \varphi(\mathfrak{m}, 1+\overline{q-1}).$$

85. Maintenant il nous est facile de calculer les coefficients de la série (14). Comme $\varphi(\mathfrak{m}, 1+t)$ est la valeur de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ à l'extrémité du segment rectiligne allant de $x=1$ à $x=1+t$, l'identité (21) donne, pour $g=2$, $K_1=K_2=1$, $\mathfrak{m}_1=\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_2=h$,

$$\varphi(\mathfrak{m}+h, 1+t) = \varphi(\mathfrak{m}, 1+t)\varphi(h, 1+t).$$

En égalant les coefficients de h dans les deux membres, celle-ci donne

$$\varphi^{(1,0)}_{\mathfrak{m},t}(\mathfrak{m}, 1+t) = A_1\varphi(\mathfrak{m}, 1+t),$$

d'où, en égalant encore les coefficients de $\mathfrak{m}^{k-1}$,

$$kA_k = A_1 A_{k-1},$$

puis immédiatement

$$A_k = \frac{A_1^k}{1.2\ldots k}.$$

D'ailleurs on a visiblement $A_1 = T$, si pour plus de commodité on pose

$$T = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots.$$

Il en résulte finalement

$$\varphi(\mathfrak{m}, 1+t) = 1 + \frac{T\mathfrak{m}}{1} + \frac{(T\mathfrak{m})^2}{1.2} + \ldots,$$

formule qui met en lumière le point de contact fort étendu, existant entre la présente théorie et celle des transcendantes exponentielles et logarithmiques (Chap. V, *inf.*).

86. La comparaison des valeurs finales acquises par $\psi(\mathfrak{m}, x)$ au bout des divers chemins qui peuvent conduire x de $x_0 (= 1)$ à une même valeur finale X est une question d'importance majeure que domine cette première observation.

Deux chemins conduisent $\psi(\mathfrak{m}, x)$ (et toutes ses dérivées) aux mêmes valeurs finales, quand ils ne sont pas séparés par l'origine O_x, c'est-à-dire quand il n'est pas nécessaire de faire franchir ce point à l'un des deux chemins pour l'amener à coïncider avec l'autre par déformation progressive.

Car $\psi(\mathfrak{m}, x)$, étant localement olotrope partout ailleurs qu'à l'origine $x = 0$ (80, III), l'est nécessairement à l'intérieur de l'aire à faire balayer par l'un des chemins pour l'appliquer sur l'autre, puisque cette aire est supposée ne pas contenir ce point (173*).

La même observation s'applique évidemment à deux chemins de première extrémité commune x_i *quelconque,* pourvu toujours que $\psi(\mathfrak{m}, x)$ (et ses dérivées) partent de x_i avec les mêmes valeurs initiales pour l'un et pour l'autre.

87. Quant aux chemins séparés par l'origine, ils peuvent être ramenés comme il suit à des formes facilement comparables.

Renfermons l'origine dans quelque aire limitée par un contour fermé ne se coupant pas lui-même ou *anneau* $[O_x]$, et traçons de x_0 à X quelque chemin $[x_0 x_{(1)} X]$ passant par un point $x_{(1)}$ pris arbitrairement sur l'anneau. Il est visible que *tout chemin tracé de x_0 à X peut, sans franchir l'origine, venir s'appliquer sur celui qu'on forme en plaçant bout à bout, d'abord le premier tronçon $[x_0 x_{(1)}]$ du chemin $[x_0 x_{(1)} X]$, puis l'anneau $[O_x]$ parcouru de $x_{(1)}$ à $x_{(1)}$ dans un sens de rotation et un nombre de fois convenables, puis enfin le dernier tronçon $[x_{(1)} X]$ du même chemin $[x_0 x_{(1)} X]$.* Il en résulte (86) qu'*au point de vue des valeurs finales de $\psi(\mathfrak{m}, x)$, le premier de ces chemins équivaut au second.*

Il est encore visible que *deux chemins du genre de ce second*

sont séparés par l'origine, quand ils ne diffèrent l'un de l'autre que par le nombre ou le sens des révolutions à faire sur l'anneau.

Il nous reste donc seulement à comparer les uns aux autres les divers chemins formés en compliquant le parcours du même chemin $[x_0 x_{(1)} X]$ que nous dirons *simple* dans un sens relatif, par des révolutions de sens et de nombre quelconques, exécutées sur le même anneau $[O_x]$ intercalé entre ses deux tronçons.

Les deux sens opposés dans lesquels un observateur peut marcher sur l'anneau se distinguent par cette circonstance, que dans l'un il aperçoit l'aire extérieure toujours dans la direction où, regardant l'origine d'un point de la partie positive de l'axe OX′, il verrait celle de OX″ (à sa droite, pour la disposition relative des axes convenue au n° 92* *bis*), que dans l'autre il aperçoit toujours cette aire dans la direction opposée.

Nous dirons le premier sens de rotation *direct,* le second *rétrograde.*

Nous observerons encore que les deux tronçons du chemin simple ayant été tracés une fois pour toutes, *la forme de l'anneau* $[O_x]$ *(non le sens de son parcours) est sans influence sur la valeur finale de* $\psi(\mathfrak{m}, x)$.

Car deux anneaux qui l'un et l'autre partent de $x_{(1)}$ pour y revenir, et qui, bien entendu, sont parcourus dans des sens de rotation identiques, peuvent être regardés comme deux chemins de mêmes extrémités, que l'origine ne sépare pas (86).

88. Tout ceci posé, on a ce théorème :

La valeur finale U *acquise par* $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *au bout du chemin simple* $[x_0 x_{(1)} X]$, *et celle* $U^{(\pm k)}$ *qu'elle atteint au bout du même chemin compliqué de k révolutions sur l'anneau, directes dans le premier cas, rétrogrades dans le second, sont liées par la relation*

$$U^{(\pm k)} = \Phi^{\pm k} U, \tag{23}$$

où Φ *est un certain multiplicateur ne dépendant que de la valeur du paramètre* $\mathfrak{m}$.

I. Appelons $u_{(1)}$ la valeur acquise par $u = \psi(\mathfrak{m}, x)$ en $x_{(1)}$

extrémité du premier tronçon du chemin simple, puis

$$(24)\qquad x_{(1)},\quad x_{(2)},\quad \ldots,\quad x_{(s)},\quad x_{(1)}$$

les sommets du chemin constitué par l'anneau, écrits dans l'ordre où on les rencontre en y faisant une révolution directe, et

$$u_{(1)},\quad u_{(2)},\quad \ldots,\quad u_{(s)},\quad u\{{}^1_1\}$$

les valeurs correspondantes de u.

La formule générale (19) donne

$$u_{(i+1)} = u_{(i)}\varphi_{(i)},$$

en posant pour abréger

$$(25)\qquad \varphi_{(i)} = \varphi\left(\mathfrak{m},\ 1 + \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{x_{(i)}}\right).$$

On en déduit successivement

$$u_{(2)} = \varphi_{(1)}u_{(1)},\quad u_{(3)} = \varphi_{(2)}u_{(2)},\quad \ldots,\quad u_{(s)} = \varphi_{(s-1)}u_{(s-1)},\quad u\{{}^1_1\} = \varphi_{(s)}u_{(s)},$$

puis

$$(26)\qquad u\{{}^1_1\} = \Phi . u_{(1)},$$

où

$$(27)\qquad \Phi = \varphi_{(1)}\varphi_{(2)}\ldots\varphi_{(s)}.$$

Comme, en vertu de la formule (19), les développements de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ à employer pour repartir de $x_{(1)}$, d'abord après le simple parcours du premier tronçon $[x_0 x_{(1)}]$, ensuite après le même parcours allongé de celui de l'anneau, sont

$$u_{(1)}\varphi\left(\mathfrak{m},\ 1 + \frac{x - x_{(1)}}{x_{(1)}}\right)$$

et

$$u\{{}^1_1\}\varphi\left(\mathfrak{m},\ 1 + \frac{x - x_{(1)}}{x_{(1)}}\right);$$

la relation (26) montre que les coefficients du second se réduisent aux produits de ceux du premier par la constante Φ. La valeur de $\psi(\mathfrak{m}, x)$ sur le second tronçon $[x_{(1)}X]$ précédé de l'anneau, s'obtiendra donc toujours en multipliant par Φ sa valeur au même point de ce tronçon non précédé de l'anneau (177*). Il en résulte

notamment

$$U^{(+1)} = \Phi U. \tag{28}$$

II. Comme aucune restriction n'a imposé une forme spéciale au chemin $[x_0 x_{(1)} X]$, dont la qualification de *simple* est purement relative, la formule précédente montre que *l'addition d'un anneau direct à un chemin quelconque, multiplie simplement par* Φ *la valeur finale de* $\psi(\mathfrak{m}, x)$.

Le chemin qui conduit u à $U^{(+2)}$ résultant de l'addition d'un anneau direct à celui qui a donné $u = U^{(+1)}$, on a, d'après l'observation précédente,

$$U^{(+2)} = \Phi U^{(+1)} = \Phi^2 U,$$

et de même

$$U^{(+3)} = \Phi U^{(+2)} = \Phi^3 U,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$U^{(+k)} = \Phi^k U. \tag{29}$$

III. En partant de $x_{(1)}$ pour y revenir, après avoir parcouru l'anneau d'abord une fois dans le sens rétrograde, puis une fois dans le sens direct, on marche sur un chemin fermé qui peut évidemment être réduit à des dimensions insensibles sans franchir l'origine. En adjoignant donc un pareil contour au chemin simple, on laisse celui-ci équivalent à lui-même. En d'autres termes, l'adjonction d'un anneau direct à un chemin formé par le chemin simple allongé d'un anneau rétrograde le rend équivalent au chemin simple, d'où (II)

$$U = \Phi U^{(-1)}.$$

D'ailleurs Φ ne peut pas être nul, car autrement $U^{(+1)}$ le serait d'après la formule (28), ce qui est impossible (80, IV); on a donc

$$U^{(-1)} = \Phi^{-1} U,$$

relation à laquelle on arriverait encore en faisant à rebours les opérations de l'alinéa I (après s'être arrangé de manière que le cheminement inverse fût praticable).

De là, le raisonnement de l'alinéa II conduit à la formule

$$U^{(-k)} = \Phi^{-k} U$$

formant avec (29) l'équivalent de la relation générale (23) qu'il fallait établir.

IV. Considérons enfin deux anneaux directs quelconques

$$'[O_x],\quad ''[O_x],$$

sur lesquels nous marquerons à volonté les points $'x_{(1)}$, $''x_{(1)}$ respectivement, et, par ces derniers, traçons de $x_{(0)}$ à X deux chemins non séparés par l'origine.

L'équivalence de ces deux chemins simples entraîne évidemment celle des deux chemins formés en les compliquant des deux anneaux $'[O_x]$, $''[O_x]$ respectivement. Si donc on appelle U la valeur finale donnée par l'un ou l'autre des chemins simples, et $'\Phi$, $''\Phi$ les multiplicateurs correspondant aux deux anneaux, on a

$$'\Phi U = ''\Phi U,$$

d'où

$$'\Phi = ''\Phi,$$

à cause de U non $=$ o. La valeur du multiplicateur Φ, étant la même pour tous les anneaux, ne dépend ainsi que de celle du paramètre $\mathfrak{m}$.

89. Rien n'empêche de donner à k révolutions rétrogrades exécutées sur l'anneau $[O_x]$ le nom de *révolutions directes en nombre* — k. D'après cette convention et le théorème précédent, *les valeurs finales de* $\psi(\mathfrak{m}, x)$ *au bout du chemin simple, compliqué d'anneaux directs en nombres*

$$\ldots,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots$$

sont respectivement les termes de la progression géométrique de raison Φ, *indéfinie dans les deux sens,*

$$(30)\qquad \ldots,\quad \Phi^{-2}U,\quad \Phi^{-1}U,\quad \Phi^{0}U = U,\quad \Phi U,\quad \Phi^{2}U,\quad \ldots.$$

90. En représentant par $\Phi(\mathfrak{m})$ la valeur du multiplicateur Φ qui correspond à la valeur $\mathfrak{m}$ du paramètre de la fonction ψ, on a, d'après les formules (27), (25),

$$(31)\quad \Phi(\mathfrak{m}) = \varphi\left(\mathfrak{m},\, 1 + \frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(1)}}\right)\varphi\left(\mathfrak{m},\, 1 + \frac{x_{(3)} - x_{(2)}}{x_{(2)}}\right)\cdots\varphi\left(\mathfrak{m},\, 1 + \frac{x_{(1)} - x_{(s)}}{x_{(s)}}\right).$$

Cette quantité $\Phi(\mathfrak{m})$ *est donc développable en une série entière en* $\mathfrak{m}$, *dont le rayon de convergence est illimité;* chaque facteur du second membre jouit effectivement de cette propriété (78, IV) (116*, VII).

En particulier, $\Phi(\mathfrak{m})$ *est une fonction indéfiniment olotrope de* $\mathfrak{m}$ (140*).

91. *Avec les notations du n° 81, II, on a*

$$\Phi(K_1\mathfrak{m}_1 + \ldots + K_g\mathfrak{m}_g) = [\Phi(\mathfrak{m}_1)]^{K_1}\ldots[\Phi(\mathfrak{m}_g)]^{K_g}. \tag{32}$$

On obtient immédiatement cette formule, en calculant au bout d'un même anneau direct les deux membres de l'identité (21).

Discussion numérique de la fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$, quand son paramètre $\mathfrak{m}$ est réel.

92. Le seul cas qui nous intéresse en ce moment est celui où $\mathfrak{m}$ est un nombre fractionnaire; mais nous l'élargirons un peu, en supposant désormais que *ce paramètre se réduit à une quantité réelle quelconque* μ. Il en résulte, pour notre fonction ψ, plusieurs propriétés essentielles; nous les rassemblons dans ce paragraphe, où le numérotage des formules prolonge simplement celui du précédent.

En appelant ε *une quantité réelle* < 1 *en valeur absolue, et* $\psi(\mu, x + \varepsilon x)$ *la valeur que prend notre fonction, quand on passe directement de* x *à* $x + \varepsilon x$, *en partant du premier de ces points avec la valeur* $\psi(\mu, x)$, *on a*

$$\psi(\mu, x + \varepsilon x) = H\psi(\mu, x), \tag{33}$$

où H *est une quantité positive* $\gtreqless 1$, *selon que le produit* $\mu\varepsilon$ *est* $\gtreqless 0$.

I. *Pour des valeurs réelles de* t *(numériquement* < 1*), la somme de la série* $\varphi(\mu, 1 + t)$, *qui l'est évidemment aussi, est une quantité positive* $\gtreqless 1$ *selon qu'on a* $\mu t \gtreqless 0$.

Le second de ces trois points étant évident (78, II), supposons

d'abord que μ soit > 0, mais inférieur à 1 ainsi qu'à $\frac{1-\tau}{\tau}$, en appelant τ la valeur numérique de t, puis considérons la série

$$(34) \qquad \varpi = \frac{\mu}{1} t + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} t^2 + \ldots,$$

dont les termes décroissent évidemment sans cesse et sans limite, en valeur absolue.

Si t est positif, tous les termes sont positifs et négatifs alternativement à partir du premier, la somme de la série est une quantité positive (101*), et $\varphi(\mu, 1+t) = 1 + \varpi$ en est une autre > 1.

Si t est négatif, tous les termes de la série (34) le sont aussi, et la somme de leurs valeurs absolues, inférieure à

$$\mu\tau + \mu\tau^2 + \mu\tau^3 + \ldots = \mu \frac{\tau}{1-\tau},$$

l'est *à fortiori* à 1, en vertu de l'hypothèse faite sur la valeur de μ; ϖ est donc une quantité négative dont la valeur absolue est < 1, et $\varphi(\mu, 1+t) = 1 + \varpi$ est une quantité positive < 1.

La même conclusion subsiste pour toute valeur positive de μ; car, en appelant K un entier positif $> \mu$ et $> \frac{\mu\tau}{1-\tau}$, $\frac{\mu}{K}$ est < 1 et $< \frac{1-\tau}{\tau}$; à cause de $\varphi(\mu, 1+t) = \psi(\mu, 1+t)$ (80, V), on a donc (81, II)

$$\varphi(\mu, 1+t) = \left[\varphi\left(\frac{\mu}{K}, 1+t\right)\right]^K,$$

où, par ce qui précède, la quantité entre crochets est positive, et $\gtrless 1$ selon que t est $\gtrless 0$.

En supposant enfin $\mu < 0$, $-\mu$ est > 0, et l'on vient de voir que $\varphi(-\mu, 1+t)$ est positif et $\gtrless 1$ selon que t est $\gtrless 0$; on a donc

$$\varphi(\mu, 1+t)\left[= \frac{1}{\varphi(-\mu, 1+t)} \quad (81, \text{II})\right] > 0 \quad \text{et} \quad \lessgtr 1.$$

II. La relation (33) est maintenant évidente (80, II), à cause de

$$H = \varphi\left(\mu, 1 + \frac{x + \varepsilon x - x}{x}\right) = \varphi(\mu, 1+\varepsilon).$$

93. De là, cette conséquence graphique évidente : *Quand le*

point x se déplace sur une demi-droite fixe issue de l'origine O_x, le point $u = \psi(\mu, x)$ se meut aussi sur quelque demi-droite fixe issue de l'origine O_u, et, par rapport à leurs origines respectives, les mouvements simultanés de ces deux points sont de sens identiques ou opposés selon qu'on a $\mu \gtrless 0$.

Ces deux points traversent toujours en même temps les circonférences de rayons 1, ayant les origines pour centres (**95**, *inf.*).

94. Le point $x_0 = 1$ se trouvant sur la partie positive de l'axe des quantités réelles, ainsi que toute valeur positive de x, on peut atteindre cette dernière par un cheminement exécuté exclusivement sur cette demi-droite, et chaque accroissement attribué à x sera de la forme ci-dessus εx. Comme on part de $x = x_0 = 1$ avec la valeur initiale réelle positive $\psi(\mu, 1) = \varphi(\mu, 1 + 0) = 1$, l'application répétée de la formule (33) montre que *la valeur atteinte par $\psi(\mu, x)$ sera toujours aussi réelle positive.*

Cette valeur positive de $\psi(\mu, x)$ est unique, parce que tous les chemins de mêmes extrémités, dont les sommets appartiennent à la partie positive de l'axe des quantités réelles, s'équivalent évidemment.

95. *Quels que soient la valeur de x, de module ξ, et le chemin suivi pour y arriver, on a*

$$\text{mod}\,\psi(\mu, x) = \psi(\mu, \xi), \tag{35}$$

valeur positive atteinte par $\psi(\mu, x)$ partant de $\psi(\mu, 1) = 1$, quand on chemine de 1 à ξ sur la partie positive de l'axe des quantités réelles (**94**). *D'où en particulier, pour* $\text{mod}\,x = 1$,

$$\text{mod}\,\psi(\mu, x) = \psi(\mu, 1) = 1.$$

Si $\mathfrak{x}$ désigne la quantité conjuguée à x, on a sans cesse (**73***)

$$\xi^2 = x\mathfrak{x} = \xi\xi,$$

et par suite (**81**, **I**)

$$\psi(\mu, \xi^2) = \psi(\mu, x)\psi(\mu, \mathfrak{x}) = [\psi(\mu, \xi)]^2.$$

Mais les facteurs du membre médian sont évidemment des quantités imaginaires conjuguées, parce que x, $\mathfrak{x}$ le sont sans

cesse et que μ est une quantité réelle. Leur produit est donc égal à $[\mathrm{mod}\,\psi(\mu, x)]^2$, d'où

$$[\mathrm{mod}\,\psi(\mu, x)]^2 = [\psi(\mu, \xi)]^2,$$

relation qui entraîne la proposée (35), parce que les deux membres de cette dernière sont des quantités positives.

96. Ainsi donc, au point de vue graphique, *quand le point x se meut sur une circonférence $[O_x, \xi]$ ayant l'origine O_x pour centre et ξ pour rayon, le point $u = \psi(\mu, x)$ se meut sur la circonférence $[O_u, \upsilon]$ de centre O_u et de rayon $\upsilon = \psi(\mu, \xi)$.*

De plus, les mouvements simultanés de ces deux points sont de même sens (direct ou rétrograde), ou bien de sens contraires, selon que μ est $\gtrless 0$.

En passant de x_i à x_{i+1} par la droite qui joint les points correspondants, on marche dans le sens de rotation direct ou rétrograde selon que le second élément du rapport $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ est positif ou négatif (98, I, *inf.*). Si donc la quantité x_{i+1} est infiniment voisine de x_i, la relation

$$(35\ bis) \qquad \frac{u_{i+1}}{u_i} = \varphi\left(\mu,\ 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right)$$

montre facilement que le second élément du rapport des valeurs correspondantes de $\psi(\mu, x)$ finit par conserver le signe de celui de $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ ou bien le signe contraire, selon que μ est positif ou négatif. Car, si l'on nomme t' le premier élément de $\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$, et t'' le second élément tant de ce rapport que de $\frac{x_{i+1}}{x_i}$, il vient immédiatement

$$\begin{aligned}\varphi\left(\mu,\ 1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right) &= \varphi(\mu,\ 1 + t' + it'') = \varphi(\mu,\ 1 + t')\varphi\left(\mu,\ 1 + \frac{it''}{1+t'}\right)\\ &= \varphi(\mu,\ 1 + t')\left[1 + \frac{\mu}{1}\,\frac{it''}{1+t'} + \ldots\right] \quad (81,\ \mathrm{I}),\end{aligned}$$

parce que $\varphi(\mu,\ 1 + t)$ n'est pas autre chose que le premier développement de $\psi(\mu,\ 1 + t)$. Or $\varphi(\mu,\ 1 + t')$ est réelle positive, et,

à cause de $\lim t'' = 0$, le second élément

$$\frac{\mu}{1}\left(\frac{t''}{1+t'}\right) - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\left(\frac{t''}{1+t'}\right)^3 + \ldots$$

de la quantité entre crochets a un signe final évidemment identique à celui de $\mu t''$.

Le rapport des vitesses angulaires des mêmes points est égal à $|\mu|$ *valeur absolue de* μ.

Car la relation (35 *bis*) donne encore

$$\lim \frac{\operatorname{mod}(u_{i+1} - u_i)}{\operatorname{mod}(x_{i+1} - x_i)} = |\mu| \times \frac{\upsilon}{\xi},$$

d'où

$$\frac{V_u}{\upsilon} : \frac{V_x}{\xi} = |\mu|,$$

V_x, V_u désignant les vitesses absolues de ces points.

97. *Quel que soit* μ, *on a*

$$\operatorname{mod}\Phi(\mu) = 1 \quad (90).$$

Car le module de $\psi(\mu, x)$ ne dépendant que de celui de x (95), et nullement du chemin suivi, l'adjonction d'un anneau à ce chemin ne peut que multiplier par 1 le module de la valeur finale de notre fonction.

98. La suite de la discussion de $\Phi(\mu)$ exige certaines constatations numériques auxquelles il faut préalablement nous livrer.

I. *Si a est non nul et b non réel, le passage de a à ab, sur la droite qui joint ces deux points, s'effectue dans le sens de rotation direct ou rétrograde, selon que le second élément de b est positif ou négatif.*

Si α désigne le module de a, la chose est évidente pour le passage de α à αb, toujours sur la droite joignant ces deux points; elle est donc vraie aussi pour le passage de $\alpha \times \frac{a}{\alpha} = a$ à $\alpha b \times \frac{a}{\alpha} = ab$, parce que la multiplication de α et de αb par la même clef $\frac{a}{\alpha}$ ne

fait qu'imprimer à l'ensemble des points correspondants une certaine rotation autour de l'origine (86*).

II. Pour faciliter le langage, nous appellerons un instant *primaire,* toute quantité ayant ses deux éléments positifs, et aussi *pente* d'une pareille quantité, le rapport (toujours positif) de son second élément à son premier.

1° *Deux quantités primaires* $a = a' + ia''$, $b = b' + ib''$ *de pentes* ϖ, χ *étant données, leur produit a toujours son second élément positif, et son premier élément est négatif, nul ou positif selon qu'on a*

$$\varpi\chi \gtreqless 1.$$

Dans ce dernier cas, le seul où le produit soit aussi primaire, sa pente est supérieure à $\varpi + \chi$.

On peut effectivement écrire

$$ab = (1 - \varpi\chi)a'b' + i(\varpi + \chi)a'b',$$

et dans le dernier cas on trouve pour valeur de la pente du produit la quantité

$$\frac{\varpi + \chi}{1 - \varpi\chi} > \varpi + \chi.$$

2° *Si* $\varpi > \chi$, *le quotient* $\frac{a}{b}$ *est primaire et de pente inférieure à* $\varpi - \chi$; car on a de même

$$\frac{a}{b} = (1 + \varpi\chi)\frac{a'b'}{b'^2 + b''^2} + i(\varpi - \chi)\frac{a'b'}{b'^2 + b''^2},$$

et la pente de ce quotient est la quantité

$$\frac{\varpi - \chi}{1 + \varpi\chi} < \varpi - \chi.$$

3° *Si les quantités*

$$(36) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g$$

sont toutes primaires, ainsi que les produits de 2, 3, ..., g *d'entre elles prises au hasard, la pente de leur produit total*

$$a_1 a_2 \ldots a_g$$

diminue toujours, quand on diminue celles de quelques facteurs sans augmenter celles des autres.

L'observation ci-dessus (1°) rend ce point évident pour un produit de deux facteurs, puis pour un produit de trois facteurs, considéré comme le produit partiel de deux d'entre eux par le troisième; et ainsi de suite.

4° *Pour que tous les produits* 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... *des quantités primaires* (36) *soient aussi primaires, il suffit que les seuls produits partiels*

$$a_1 a_2, \quad a_1 a_2 a_3, \quad \ldots, \quad a_1 a_2 \ldots a_g$$

le soient tous.

La pente de $a_1 a_2$ surpasse la somme de celles de a_1 et de a_2 (1°); pour la même raison celle de $a_1 a_2 a_3 = (a_1 a_2) a_3$ surpasse la somme des pentes de a_1, a_2, a_3 et, à plus forte raison, chacune d'elles. On en conclut (2°) que les produits

$$a_2 a_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_1}, \qquad a_1 a_3 = \frac{a_1 a_2 a_3}{a_2}$$

sont comme $a_1 a_2$ tous deux primaires.

En considérant ensuite le produit $a_1 a_2 a_3 a_4$, on prouve de même que $a_3 a_4$, $a_1 a_4$, $a_2 a_4$ sont primaires comme $a_1 a_2$, $a_2 a_3$, $a_1 a_3$, ainsi que $a_2 a_3 a_4$, $a_1 a_3 a_4$, $a_1 a_2 a_4$; et ainsi de suite.

5° *Une quantité primaire* A *de pente quelconque* Π *est décomposable en facteurs primaires dont les pentes ne surpassent pas la quantité positive* ϖ, *si petite qu'elle soit, et dont les produits* 2 *à* 2, 3 *à* 3, ... *sont tous primaires aussi.*

Si, a désignant quelque quantité primaire de pente ϖ, les quantités

$$A, \quad A_1 = \frac{A}{a}, \quad A_2 = \frac{A_1}{a} = \frac{A}{a^2}, \quad \ldots, \quad A_g = \frac{A}{a^g}$$

sont toutes primaires, on a sûrement $g < \frac{\Pi}{\varpi}$, puisque (2°) leurs pentes Π, Π_1, ..., Π_g satisfont aux inégalités

$$\Pi_1 < \Pi - \varpi, \quad \Pi_2 < \Pi_1 - \varpi < \Pi - 2\varpi, \quad \ldots, \quad \Pi_g < \Pi - g\varpi.$$

On peut donc assigner au-dessous de $\frac{\Pi}{\varpi}$, un entier G tel, que A, A_1, ..., A_G soient toutes primaires, mais que A_{G+1} ne le soit plus.

Il en résulte que la pente de A_G ne surpasse pas ϖ, et la dernière des relations

$$A_G a = A_{G-1}, \quad A_G aa = A_{G-2}, \quad \ldots, \quad A_G a^G = A$$

opère évidemment la décomposition cherchée (4°).

III. 1° *Quand une quantité est de la forme* iA'', *c'est-à-dire quand son premier élément est nul, l'autre positif, le quotient de sa division par une quantité primaire quelconque* $a' + ia''$ *est encore primaire.*

On a effectivement

$$\frac{iA''}{a' + ia''} = \frac{A''a''}{a'^2 + a''^2} + i\frac{A''a'}{a'^2 + a''^2}.$$

2° *Toute quantité de la forme* iA'' *est susceptible de la décomposition exécutée ci-dessus* (II, 5°).

Si a désigne toujours une quantité primaire de pente ϖ, le quotient $\frac{iA''}{a}$ est aussi primaire (1°), et il peut être décomposé en facteurs $a_1, a_2, \ldots, a_h$, tous primaires et de pentes non $> \varpi$, dont les produits 2 à 2, 3 à 3, ... sont primaires aussi (II, 5°). On a donc

$$iA'' = aa_1a_2\ldots a_h,$$

et tous les facteurs sont primaires, ainsi que leurs produits partiels 2 à 2, ..., que ceux-ci contiennent a ou non. Car cette propriété appartient déjà aux produits partiels du second genre, et elle s'étend à ceux du premier, puisqu'ils peuvent être considérés comme les quotients de iA'' par ceux du second genre (1°).

IV. 1° *On peut décomposer* i *en facteurs primaires, eux et tous leurs produits partiels, dont les pentes sont toutes inférieures à* 1, *et dont les modules sont tous égaux à* 1.

On peut effectivement poser (III, 2°)

$$i = Q_1 Q_2 \ldots Q_\sigma,$$

où les quantités $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\sigma$ sont primaires, elles et tous leurs produits partiels, avec des pentes toutes inférieures à 1.

Comme on a ainsi

$$\operatorname{mod} Q_1 . \operatorname{mod} Q_2 \ldots \operatorname{mod} Q_\sigma = \operatorname{mod} i = 1,$$

et comme les quantités

$$q_1 = \frac{Q_1}{\operatorname{mod} Q_1}, \quad \ldots, \quad q_\sigma = \frac{Q_\sigma}{\operatorname{mod} Q_\sigma}$$

ont des modules tous égaux à 1, avec des pentes égales à celles de $Q_1, \ldots, Q_\sigma$ respectivement, la formule

$$(37) \qquad i = q_1 q_2 \ldots q_\sigma$$

opère évidemment la décomposition voulue.

2° *Quand on augmente la pente de la quantité primaire* $q = q' + iq''$ *en laissant à son module la valeur* 1, q' *décroît et* q'' *croît.*

La relation

$$(38) \qquad q'^2 + q''^2 = 1$$

permet effectivement d'écrire

$$q'^2 = 1 : \left[1 + \left(\frac{q''}{q'}\right)^2\right], \qquad q''^2 = 1 - q'^2.$$

99. *Si la quantité primaire* $q = q' + iq''$ *a son module* $= 1$ *avec une pente* < 1, *on a*

$$\operatorname{mod}(q - 1) < 1.$$

Car la relation (38) donne d'abord

$$[\operatorname{mod}(q - 1)]^2 = (q' - 1)^2 + q''^2 = 2(1 - q'),$$

puis

$$2(1 - q') = \frac{2q''^2}{1 + q'},$$

puis, par sa combinaison avec $\frac{q''}{q'} < 1$ ou bien $q''^2 < q'^2$,

$$2q''^2 < 1,$$

d'où finalement

$$2(1 - q') < \frac{1}{1 + q'} < 1.$$

Il en résulte qu'*on peut calculer* $\psi(\mu, q)$ *par un seul pas fait de* $x = 1$ *à* $x = q$, *au moyen de la formule*

$$\psi(\mu, q) = \varphi(\mu, 1 + \overline{q - 1}).$$

Cela posé, nous avons encore à reconnaître que, *si* μ *est compris entre* o *et* 1, $\psi(\mu, q)$ *est une quantité primaire de pente inférieure à celle de* q.

Pour cela nous substituerons à la marche directe de 1 à q deux pas faits, le premier de $x = 1$ à $x = q'$ sur l'axe des quantités réelles, le second de $x = q'$ à $x = q' + iq''$, ce qui est évidemment permis et donne (**80**, II)

$$(39) \qquad \psi(\mu, q) = \psi(\mu, q')\varphi(\mu, 1 + i\chi),$$

χ désignant la pente de q, supposée < 1.

Les éléments $'\varphi$, $''\varphi$ du second facteur sont immédiatement fournis par les formules

$$'\varphi = 1 + \left[-\frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}\chi^2 + \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3)}{1.2.3.4}\chi^4 - \ldots \right],$$
$$''\varphi = \left[\frac{\mu}{1}\chi - \frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2)}{1.2.3}\chi^3 + \ldots \right],$$

où, à cause de $\chi < 1$, $\mu < 1$, les termes des séries entre crochets sont positifs et négatifs alternativement à partir des premiers, et décroissent sans cesse et sans limite. Les sommes de ces séries sont ainsi des quantités positives inférieures à leurs premiers termes; $'\varphi$, $''\varphi$ sont donc des quantités positives, la première > 1, la dernière $< \mu\chi$, et $\varphi(\mu, 1 + i\chi)$ est ainsi une quantité primaire de pente inférieure à $\mu\chi$.

Quant au premier facteur $\psi(\mu, q')$, il est réel, positif (**94**). Le second membre de la relation (39) est donc aussi une quantité primaire, et sa pente est égale à celle de son second facteur, c'est-à-dire inférieure à $\mu\chi$, à plus forte raison à χ.

100. Considérons maintenant les quantités formées comme il suit avec les facteurs de la formule de décomposition (37)

$$(40) \left\{ \begin{array}{lllll} x^{(0)} = 1, & x^{(1)} = q_1, & x^{(2)} = q_1 q_2, & \ldots, & x^{(\sigma)} = q_1 q_2 \ldots q_\sigma = i, \\ & x^{(\sigma+1)} = ix^{(1)}, & x^{(\sigma+2)} = ix^{(2)}, & \ldots, & x^{(2\sigma)} = ix^{(\sigma)} = i^2 = -1, \\ & x^{(2\sigma+1)} = ix^{(\sigma+1)}, & x^{(2\sigma+2)} = ix^{(\sigma+2)}, & \ldots, & x^{(3\sigma)} = ix^{(2\sigma)} = i^3 = -i, \\ & x^{(3\sigma+1)} = ix^{(2\sigma+1)}, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , & x^{(4\sigma)} = ix^{(3\sigma)} = i^4 = 1. \end{array} \right.$$

De $x^{(k)}$ à $x^{(k+1)}$ on marche, quel que soit k, dans le sens de rotation direct; car on a toujours $x^{(k+1)} = x^{(k)}q$, q désignant l'un ou l'autre des facteurs $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ tous primaires et, par suite, pourvus de seconds éléments positifs (98, I).

On a

$$\operatorname{mod}\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{x^{(k)}} = \operatorname{mod}(q - 1) < 1,$$

parce que $\operatorname{mod} q = 1$ et que la pente de q est toujours < 1 (99).

Enfin la ligne brisée fermée qui a tous les points correspondants pour sommets enveloppe une seule fois l'origine. Effectivement, de $x^{(0)} = 1$ à $x^{(\sigma)} = i$, on marche à l'intérieur de l'angle formé par les parties positives des axes, parce que $x^{(1)}, \ldots, x^{(\sigma-1)}$ sont toutes des quantités primaires; de $x^{(\sigma)} = i$ à $x^{(2\sigma)} = -1$, on marche dans l'angle formé par la partie positive de l'axe des seconds éléments avec la partie négative de l'autre, parce que les quantités $x^{(\sigma+1)} = ix^{(1)}, \ldots, x^{(2\sigma-1)} = ix^{(\sigma-1)}$ ont leurs premiers éléments tous négatifs et leurs seconds tous positifs. De $x^{(2\sigma)} = -1$ à $x^{(3\sigma)} = -i$, puis de $x^{(3\sigma)} = -i$ à $x^{(4\sigma)} = 1$, on marche enfin dans l'angle des parties négatives des axes, puis dans celui de la partie négative du second avec la partie positive du premier, ce dont on s'assure de la même manière.

Il résulte de tout ceci que *les quantités* (40) *peuvent être prises pour sommets de l'anneau* $[O_x]$ *du n°* 87.

En adoptant ce tracé et en ayant égard aux formules (31), (40), on trouve immédiatement la suivante

$$(41)\quad \Phi(\mu) = [\varphi(\mu, 1 + \overline{q_1 - 1})\varphi(\mu, 1 + \overline{q_2 - 1}) \ldots \varphi(\mu, 1 + \overline{q_\sigma - 1})]^4,$$

que nous écrirons (81, II)

$$(42)\qquad \Phi(\mu) = \varphi(4\mu, 1 + \overline{q_1 - 1}) \ldots \varphi(4\mu, 1 + \overline{q_\sigma - 1}).$$

101. Cette dernière rend facile la discussion de $\Phi(\mu)$, qui se résume comme il suit.

I. *On a*

$$\Phi(0) = 1,$$

ce qui est évident (78, II), *et*

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right) = i,$$

d'où plus généralement, en appelant E *un entier quelconque (positif, nul ou négatif)*,

$$\Phi\left(\frac{E}{4}\right) = \left[\Phi\left(\frac{1}{4}\right)\right]^E = i^E \qquad (91),$$
$$\Phi(E) = \Phi\left(\frac{4E}{4}\right) = i^{4E} = 1.$$

La formule (42) donne effectivement

$$\Phi\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi(1, 1+\overline{q_1 - 1})\dots\varphi(1, 1+\overline{q_\sigma - 1}) = q_1 q_2 \dots q_\sigma = i,$$

à cause de $\varphi(1, 1+t) = 1+t$ (79).

II. *Quel que soit* μ, *on a donc* (91)

$$\Phi\left(\frac{E}{4}+\mu\right) = \Phi\left(\frac{E}{4}\right)\Phi(\mu) = i^E\Phi(\mu)$$

et

(43) $$\Phi(E+\mu) = \Phi(E)\Phi(\mu) = \Phi(\mu).$$

La première formule ramène le calcul de $\Phi(\mu)$ au cas où μ tombe entre 0 et $\frac{1}{4}$. La seconde montre que de $\mu = E$ à $\mu = E+1$, $\Phi(\mu)$ reprend les mêmes valeurs que de $\mu = 0$ à $\mu = 1$.

III. *Pour des valeurs de* μ *comprises entre* 0 *et* $\frac{1}{4}$, $\Phi(\mu)$ *est une quantité primaire dont la pente varie dans le même sens que* μ.

Car, 4μ étant positif et < 1, les facteurs du second membre de la formule (42) sont tous des quantités primaires, de pentes inférieures à celles de $q_1, q_2, \dots, q_\sigma$ respectivement (99). Si donc g désigne quelque entier inférieur à σ, les produits partiels des g premiers facteurs et des $\sigma - g$ derniers sont deux quantités primaires de pentes inférieures à celles de $q_1 q_2 \dots q_g$ et

de $q_{g+1}q_{g+2}\ldots q_\sigma$ respectivement (**98**, II, 3°). Comme le produit de ces dernières pentes est $=1$ à cause de

$$(q_1q_2\ldots q_g)(q_{g+1}\ldots q_\sigma)=i,$$

celui des pentes des produits partiels en question est <1 ; le produit de ces produits partiels, c'est-à-dire $\Phi(\mu)$, est donc une quantité primaire.

Soient maintenant μ, $\Delta\mu$ et $\mu+\Delta\mu$ trois quantités positives inférieures à $\frac{1}{4}$; $\Phi(\mu)$, $\Phi(\Delta\mu)$, $\Phi(\mu+\Delta\mu)$ sont trois quantités primaires, et la pente de la dernière surpasse celle de la première (**98**, II, 1°) à cause de

$$\Phi(\mu+\Delta\mu)=\Phi(\mu)\Phi(\Delta\mu).$$

IV. *Si l'on fait croître* μ *de* o *à* 1 *dans les intervalles successifs*

$$0 \text{ à } \frac{1}{4},\qquad \frac{1}{4} \text{ à } \frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2} \text{ à } \frac{3}{4},\qquad \frac{3}{4} \text{ à } 1,$$

et si l'on représente les éléments de $\Phi(\mu)$ *par* $'\Phi(\mu)$, $''\Phi(\mu)$:

1° $'\Phi(\mu)$ *passe, en variant chaque fois dans un sens constant, de* 1 *à* o, *de* o *à* — 1, *de* — 1 *à* o, *de* o *à* 1;

2° $''\Phi(\mu)$ *passe de la même manière, de* o *à* 1, *de* 1 *à* o, *de* o *à* — 1, *de* — 1 *à* o.

Dans le premier intervalle, $'\Phi(\mu)$ décroît de 1 à o, et $''\Phi(\mu)$ croît de o à 1, parce qu'on a $\Phi(0)=1$, $\Phi\left(\frac{1}{4}\right)=i$ (I), et qu'entre ces valeurs extrêmes, $\Phi(\mu)$ est une quantité primaire, de module 1, dont la pente croît sans cesse (III), (**97**), (**98**, IV, 2°).

La discussion des autres intervalles se ramène ensuite à celle du premier, par l'emploi des formules

$$\Phi\left(\frac{1}{4}+\mu\right)=i\Phi(\mu)\ =-''\Phi(\mu)+i'\Phi(\mu),$$

$$\Phi\left(\frac{1}{2}+\mu\right)=i^2\Phi(\mu)=-'\Phi(\mu)-i''\Phi(\mu),$$

$$\Phi\left(\frac{3}{4}+\mu\right)=i^3\Phi(\mu)=\ ''\Phi(\mu)-i'\Phi(\mu).$$

V. Comme ainsi de o à 1, $\Phi(\mu)$ n'est égal à 1 que pour $\mu=0$

ou $= 1$, la relation (43) montre que *les nombres entiers (de valeurs et de signes quelconques) sont les seules valeurs de* μ *qui puissent donner* $\Phi(\mu) = 1$.

VI. *Les quantités* $\Phi(\mu)$, $\Phi(-\mu)$ *sont toujours conjuguées.* Car toutes deux ont 1 pour module (97), et leur produit

$$\Phi(\mu)\Phi(-\mu) = \Phi(0) = 1$$

se réduit au carré de leur module commun (73*).

VII. La considération du point qui représente graphiquement la valeur de $\Phi(\mu)$ donne lieu aux observations suivantes :

1° *Ce point est toujours situé sur la circonférence de rayon* 1, *qui a son origine pour centre* (97).

2° *Quand* μ *croît de* E *à* $E + \frac{1}{4}$, $E + \frac{1}{2}$, $E + \frac{3}{4}$, $E + 1$, *il passe de* 1 *à* i, -1, $-i$, 1, *en exécutant sur cette circonférence une seule révolution de sens direct autour de l'origine* (IV).

3° *Quand* μ *décroît de* E *à* $E - \frac{1}{4}$, $E - \frac{1}{2}$, $E - \frac{3}{4}$, $E - 1$, *il passe de* 1 *à* $-i$, -1, i, 1, *par une seule révolution rétrograde* (VI), (IV).

4° *Les points qui correspondent à des valeurs de* μ *en progression arithmétique de raison quelconque* h *sont les sommets d'une ligne brisée régulière de côté* $[\operatorname{mod}\Phi(h) - 1]$, *inscrite dans la même circonférence.* Les relations $\Phi(\mu + h) = \Phi(\mu)\Phi(h)$ et $\operatorname{mod}\Phi(\mu) = 1$ donnent effectivement

$$\operatorname{mod}[\Phi(\mu + h) - \Phi(\mu)] = \operatorname{mod}\Phi(\mu)\operatorname{mod}[\Phi(h) - 1] = \operatorname{mod}[\Phi(h) - 1].$$

VIII. Le développement des facteurs de l'expression (42), opéré comme nous l'avons expliqué au n° 85, fournirait celui de $\Phi(\mu)$ en une série entière en μ, de convergence illimitée (*Cf.* 90). Mais la théorie de la fonction exponentielle nous conduira à un résultat beaucoup plus net (212, *inf.*).

102. Relativement aux valeurs finales de $\psi(\mu, x)$ au bout des divers chemins qui conduisent de $x_0 = 1$ à X, on a ce théorème :

Quand μ *est un entier (de valeur et de signe quelconques),*

toutes ces valeurs sont égales, et $\psi(\mu, x)$ *est monodrome.*

Quand μ *est une fraction irréductible* $\frac{n}{m}$ *de dénominateur* $m > 1$, $\psi(\mu, x)$ *a précisément* m *valeurs finales distinctes et par suite n'est pas monodrome.*

Quand μ *est incommensurable, toutes les valeurs finales de* $\psi(\mu, x)$ *sont différentes les unes des autres, et cette fonction n'est pas monodrome.*

I. La relation générale (32) du n° 91 donne au rapport des termes de la progression géométrique (30) du n° 89, où l'exposant de $\Phi(\mu)$ a les valeurs inégales k_1, k_2, la forme

$$\frac{[\Phi(\mu)]^{k_2}}{[\Phi(\mu)]^{k_1}} = \Phi[(k_2 - k_1)\mu].$$

Si donc μ est un entier, $(k_2 - k_1)\mu$ en est un autre, et ce rapport se réduit toujours à 1 (101, I). L'identité $\psi(\mu, x) = x^\mu$, existant dans ce cas particulier (79), rendait facile la prévision de cette conclusion.

II. Si $\mu = \frac{n}{m}$, et parce que n est supposé premier à m, la quantité $(k_2 - k_1)\frac{n}{m}$ ne peut être un entier, et par suite (101, V) $\Phi\left[(k_2 - k_1)\frac{n}{m}\right]$ ne peut se réduire à 1, que si $k_2 - k_1$ est divisible par m.

Il en résulte que les m valeurs finales de $\psi\left(\frac{n}{m}, x\right)$

$$U,\quad \Phi\left(\frac{n}{m}\right)U,\quad \Phi\left(\frac{2n}{m}\right)U,\quad \ldots,\quad \Phi\left[\frac{(m-1)n}{m}\right]U$$

sont inégales, mais que chacune des autres est égale à quelqu'une de celles-ci. Les termes de la progression (30) du n° 89 se reproduisent indéfiniment à m rangs de distance.

III. Si μ est incommensurable, $(k_2 - k_1)\mu$ ne peut se réduire à un entier, ni par suite $\Phi[(k_2 - k_1)\mu]$ à 1; deux termes quelconques de la même progression sont donc toujours inégaux.

103. *Quand* x *tend vers* 0, $\psi(\mu, x)$ *est infiniment petite ou infinie selon qu'on a* $\mu \gtrless 0$.

On a toujours mod$\psi(\mu, x) = \psi(\mu, \xi)$, valeur atteinte par un cheminement exécuté de 1 à $\xi = \text{mod}\,x$ sur la partie positive de l'axe des quantités réelles (95). Nous savons en outre que la variation de $\psi(\mu, \xi)$ est toujours de sens identique ou contraire à celui de la variation de ξ selon qu'on a $\mu \gtrless 0$ (93), et qu'à des valeurs de x en progression géométrique, correspondent toujours des valeurs de $\psi(\mu, x)$, en progression géométrique aussi (84).

Faisons donc tendre ξ vers o, par des valeurs en progression géométrique décroissante. Dans le premier cas, celle que forment les valeurs de $\psi(\mu, \xi)$ est décroissante, et l'on a lim$\psi(\mu, x) = 0$. Dans le second cas, cette progression est croissante, et $\psi(\mu, x)$ est infinie.

104. *Quand μ n'est pas un entier positif (ou nul), toute dérivée de $\psi(\mu, x)$, dont l'ordre k surpasse μ numériquement, est infinie en $x = 0$.* C'est ce qui résulte de la proposition ci-dessus et de la formule (22) du n° 82, où aucun facteur numérique ne peut s'évanouir dans le second membre.

Cette simple observation prouverait qu'alors $\psi(\mu, x)$ ne peut être olotrope en $x = 0$ (165*) (*Cf.* 71, VI; 80, III; 102).

105. *Pour des valeurs infinies de x, $\psi(\mu, x)$ est infinie ou infiniment petite selon qu'on a $\mu \gtrless 0$.*

On raisonnera comme au n° 103, à cela près qu'on attribuera à ξ des valeurs en progression géométrique croissante.

Résolution numérique de l'équation binome. — Racines de l'unité.

106. *L'équation binome numérique*

$$(1) \qquad u^m = X,$$

où l'exposant m est un entier positif, se résout comme il suit.

Quand X *est* $= 0$, *elle a pour racine unique* $u = 0$, *au degré m de multiplicité* (3).

Quand X *est* $\neq 0$, *en appelant* U *la valeur acquise par* $\psi\left(\frac{1}{m}, x\right)$ *au bout de quelque chemin tracé à volonté de* $x = 1$

à $x = \mathrm{X}$, *elle a pour seules racines, toutes simples, les m quantités non nulles et toutes inégales* (**102**, II)

$$(2) \qquad \mathrm{U},\ \Phi\left(\frac{1}{m}\right)\mathrm{U},\ \Phi^2\left(\frac{1}{m}\right)\mathrm{U},\ \ldots,\ \Phi^{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)\mathrm{U},$$

ou bien, ce qui revient au même (**91**),

$$(3) \qquad \mathrm{U},\ \Phi\left(\frac{1}{m}\right)\mathrm{U},\ \Phi\left(\frac{2}{m}\right)\mathrm{U},\ \ldots,\ \Phi\left(\frac{m-1}{m}\right)\mathrm{U}.$$

Le monome u^m étant une fonction indéfiniment olotrope de u, le théorème du n° **11** est applicable à l'équation dont il s'agit.

La dérivée première de u^m est mu^{m-1}, fonction qui s'annule pour $u = 0$ seulement. Si donc $\mathrm{X} = 0$, cette valeur nulle de u vérifie l'équation (1); elle en constitue la seule racine, et son degré de multiplicité est m, parce qu'elle annule aussi, jusqu'à l'ordre $m - 1$ seulement, les fonctions

$$mu^{m-1},\quad m(m-1)u^{m-2},\quad \ldots,\quad m(m-1)\ldots 2.1,\quad 0,\quad 0,\quad \ldots,$$

dérivées successives par rapport à u du premier membre mis sous la forme normale.

Quand X est non $= 0$, le zéro unique de la dérivée mu^{m-1} ne satisfait pas à l'équation proposée, et celle-ci ne peut avoir que des racines simples. Comme l'équation

$$(4) \qquad u^m - x = 0$$

est vérifiée numériquement pour $x = u = 1$, on obtiendra toutes les racines de l'équation (1), en cherchant au bout de tous les chemins praticables tracés de $x = 1$ à $x = \mathrm{X}$, les valeurs finales de la fonction implicite définie par l'équation (4) complétée par la condition initiale

$$u = 1 \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

Or cette fonction implicite est précisément celle que nous avons représentée par $\psi\left(\frac{1}{m}, x\right)$ (**77**), dont les valeurs finales distinctes sont les m quantités (2) ou (3), ce que nous avions à prouver (**86** *et suiv.*).

107. Au sujet de ces racines, et en excluant le cas où $X = o$, nous avons à faire les observations générales qui suivent.

I. *En posant* $\mathrm{mod}\,X = \Xi$, *toutes ont pour module commun la quantité* Υ, *détermination réelle positive de* $\psi\left(\frac{1}{m}, \Xi\right)$.

C'est ce qui résulte immédiatement du n° 95.

II. *Elles sont représentées graphiquement par les sommets d'un polygone régulier de m côtés, inscrit dans la circonférence de rayon* Υ *qui a l'origine* O_u *pour centre. Et si l'on part de* U *pour y revenir, en marchant sur ce polygone de manière à rencontrer successivement les racines dans l'ordre* (3), *on exécute une révolution de sens direct autour de* O_u (*pourvu toutefois que m soit* > 2).

Comme les quantités $o, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \ldots, \frac{m-1}{m}$ croissent en progression arithmétique dans l'intervalle de $\mu = o$ à $\mu = 1$, les m points

$$(5) \qquad 1,\quad \Phi\left(\frac{1}{m}\right),\quad \Phi\left(\frac{2}{m}\right),\quad \ldots,\quad \Phi\left(\frac{m-1}{m}\right)$$

sont les sommets d'un polygone jouissant de toutes les propriétés énoncées, à cela près que le rayon de sa circonférence circonscrite est $= 1$ (101, VII); et l'on peut passer des quantités (5) aux quantités (3), en multipliant toutes les premières, d'abord par Υ, puis par $\frac{U}{\Upsilon}$ clef de U (72*).

Or la première multiplication transforme le polygone (5) en un autre homothétique, dont la circonférence circonscrite a Υ pour rayon; quant à la dernière, elle imprime à ce nouveau polygone une simple rotation autour de l'origine O_u (86*).

III. Quand X est une quantité réelle positive, on peut prendre pour U la détermination réelle positive de $\psi\left(\frac{1}{m}, X\right)$. *Les seules quantités réelles contenues dans la suite* (3) *sont alors* U *si m est impair, et* $\pm$ U *si m est pair.*

Dans le premier cas en effet, 1 est le terme réel unique de la suite (5); dans le second, on y trouve encore $\Phi\left(\frac{m}{2}\frac{1}{m}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$, mais aucun autre (101, IV).

108. Les racines de l'équation (1) sont ce qu'on nomme les *racines* $m^{\text{ièmes}}$ *de la quantité* X. On représente par le signe $\sqrt[m]{X}$ ou bien encore $X^{\frac{1}{m}}$ (**118**, *inf.*), tantôt l'une d'elles spécifiée convenablement, tantôt l'une ou l'autre indistinctement. Dans ce dernier cas, et pour X non $= 0$, ces notations, équivalentes à $\psi\left(\frac{1}{m}, X\right)$, sont essentiellement ambiguës, puisqu'elles ont m déterminations inégales.

Quand X est réelle positive, $\sqrt[m]{X}$ représente habituellement la détermination réelle et positive de $\psi\left(\frac{1}{m}, X\right)$. On a ainsi, par exemple,

$$\operatorname{mod} \sqrt[m]{X} = \sqrt[m]{\operatorname{mod} X}.$$

Les règles du calcul des radicaux imaginaires résultent toutes des combinaisons variées auxquelles se prêtent les formules fondamentales des nos **74** et suiv. (ou **81**). On peut dire qu'elles sont les mêmes que pour les radicaux arithmétiques, sauf la nécessité de choisir convenablement les déterminations des expressions ambiguës.

9. Quand X a la valeur 1, l'équation (1) devient

$$u^m = 1, \tag{6}$$

et ses racines, ou *racines* $m^{\text{ièmes}}$ *de l'unité*, acquièrent des propriétés spéciales qui leur assignent un grand rôle dans beaucoup de circonstances. Il nous faut consigner les principales en passant.

I. Pour calculer $U = \psi\left(\frac{1}{m}, X\right)$ de $x = 1$ à $x = X = 1$, on peut prendre un chemin de dimensions nulles, et par suite $U = 1$. Ainsi donc *les racines de l'équation* (6) *sont précisément les* m *quantités*

$$1, \quad \Phi\left(\frac{1}{m}\right), \quad \Phi\left(\frac{2}{m}\right), \quad \ldots, \quad \Phi\left(\frac{m-1}{m}\right), \tag{7}$$

toutes de module 1, *mais inégales*.

Le polygone régulier de m côtés dont elles sont les sommets (**107**, II) offre cette double particularité, d'être inscrit dans une

circonférence de rayon 1, et orienté de manière à avoir toujours un sommet au point $u = 1$.

II. *La suite* (7), *qui contient toujours le terme réel* 1, *renferme en outre* $\Phi\left(\frac{m}{2}\frac{1}{m}\right) = \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ *quand* m *est pair*, *avec* $\Phi\left(\frac{m}{4}\frac{1}{m}\right) = \Phi\left(\frac{1}{4}\right) = i$ *et* $\Phi\left(\frac{3m}{4}\frac{1}{m}\right) = \Phi\left(\frac{3}{4}\right) = i^3 = -i$, *quand* m *est multiple de* 4 (101, I).

III. *Toutes ces racines (sauf* 1 *et aussi* -1 *quand* m *est pair) sont deux à deux réciproques, en même temps conjuguées.*

On a effectivement, quel que soit g,

$$\Phi\left(\frac{g}{m}\right)\Phi\left(\frac{m-g}{m}\right) = \Phi(1) = 1,$$

carré du module commun aux deux facteurs (91), (101, I), (73*).

IV. Comme, dans la suite (3), U représente au fond une racine de l'équation (1), dont le choix s'est fait arbitrairement, *toutes les déterminations du radical* $\sqrt[m]{X}$ *s'obtiennent en multipliant une seule quelconque d'entre elles par chacune des* m *racines* $m^{\text{ièmes}}$ *de l'unité.*

110. *Le produit des racines* (7) *élevées à des puissances d'exposants entiers quelconques (positifs, nuls ou négatifs)* k_0, k_1, ..., k_{m-1} *régénère toujours quelqu'une des mêmes racines.*

Effectivement (91) ce produit se met immédiatement sous la forme

$$\Phi\left[\frac{0.k_0 + 1.k_1 + \ldots + (m-1)k_{m-1}}{m}\right] = \Phi(q)\Phi\left(\frac{r}{m}\right) = 1.\Phi\left(\frac{r}{m}\right),$$

où q, r représentent le quotient et le reste (positif) de la division de $0.k_0 + 1.k_1 + \ldots + (m-1)k_{m-1}$ par m.

111. En particulier, *la progression géométrique*

$$(8) \qquad \ldots.\ \Phi\left(-\frac{g}{m}\right),\quad 1,\quad \Phi\left(\frac{g}{m}\right),\quad \Phi\left(\frac{2g}{m}\right),\quad \ldots$$

formée par les diverses puissances d'une même racine quelconque $\Phi\left(\frac{g}{m}\right)$ *ne contient que des racines,* et même elle les renferme toutes dans des cas qu'il importe de spécifier.

Soit d le plus grand commun diviseur (pris positivement) des entiers m, g, et posons $m = dm'$, $g = dg'$, en sorte que m', g' soient des entiers premiers entre eux, le premier positif. Pour que les deux termes $\Phi\left(\frac{k_1 g}{m}\right)$, $\Phi\left(\frac{k_2 g}{m}\right)$ de cette progression soient égaux, il faut et il suffit que leur rapport

$$\Phi\left[\frac{(k_2 - k_1)g}{m}\right] = \Phi\left[\frac{(k_2 - k_1)g'}{m'}\right]$$

soit égal à 1, et pour cela (**101**, V) que $\frac{(k_2 - k_1)g'}{m'}$ se réduise à quelque entier, c'est-à-dire que $k_2 - k_1$ soit divisible par m' puisque g' est premier à m'. Un groupe de m' termes consécutifs dans la progression n'en comprend que d'inégaux, mais ensuite chaque terme se reproduit indéfiniment à m' rangs d'intervalle dans les deux sens. *Les seules racines de l'équation* (6) *qui se trouvent dans la progression sont ainsi celles du groupe*

$$1, \quad \Phi\left(\frac{g}{m}\right), \quad \Phi\left(\frac{2g}{m}\right), \quad \ldots, \quad \Phi\left[\frac{(m'-1)g}{m}\right];$$

et leur nombre m' est en même temps l'exposant de la plus faible puissance de la racine considérée $\Phi\left(\frac{g}{m}\right)$ *qui puisse être égale à* 1. On exprime ces deux faits équivalents, en disant que la racine en question *appartient à l'exposant m'*.

Quand g est premier à m, on a $d = 1$, $m' = m$, $g' = g$, et *la racine* $\Phi\left(\frac{g}{m}\right)$ *appartient au nombre m lui-même,* c'est-à-dire que ses diverses puissances reproduisent toutes les racines de l'équation (6), et qu'aucune d'elles ne peut être égale à 1 si son exposant n'est pas divisible par m.

Ces racines appartenant ainsi au degré m lui-même de l'équation considérée (6) sont les plus remarquables et ont reçu le nom de racines *primitives. Elles sont en nombre évidemment égal à celui des entiers positifs g inférieurs et premiers à m*, à $m - 1$

par exemple quand m est premier; ce sont alors toutes les racines autres que 1.

Il est évident qu'*une puissance d'une racine primitive est aussi primitive ou ne l'est pas, selon que son exposant est premier à m ou non.*

112. En raisonnant comme au n° **101**, VII, 4°, on aperçoit de suite que *les quantités* (8), *puissances successives d'une même racine quelconque de l'équation* (6), *sont représentées graphiquement par les sommets d'un certain polygone régulier inscrit dans la circonférence ayant* O_u *pour centre et* 1 *pour rayon.*

Le nombre des côtés de ce polygone est évidemment l'exposant m' auquel appartient la racine génératrice $\Phi\left(\frac{g}{m}\right)$. Sa forme est liée à la nature relative des nombres m, g d'une manière inutile à préciser ici. Il est tantôt convexe, plus souvent *étoilé.*

113. Comme 1 et $m-1$ sont forcément premiers à m, *les racines* $\Phi\left(\frac{1}{m}\right)$ *et* $\Phi\left(\frac{m-1}{m}\right)=\Phi\left(-\frac{1}{m}\right)$, réciproques et en même temps conjuguées (**109**, III), *sont toujours primitives.*

Le polygone régulier de m côtés qu'engendrent les puissances successives de la première a pour sommets les points (7) respectivement, et en marchant sur son périmètre de manière à rencontrer successivement ses sommets dans l'ordre où ils se présentent ainsi, *on exécute autour de l'origine une seule révolution de sens direct* (**107**, II). Celui qui correspond à l'autre racine coïncide géométriquement avec le précédent, et son parcours fait faire encore autour de l'origine une révolution unique, *mais de sens rétrograde.*

Les polygones réguliers fournis par les autres racines primitives ont bien aussi m côtés, mais, au lieu d'être convexes comme ces deux-ci, ils sont étoilés; de plus, le parcours de leurs périmètres constitue toujours plus d'une révolution autour de l'origine. A cause de cela nous nommerons *principales* les deux racines primitives dont il s'agit, la première *directe,* la seconde *rétrograde.*

Pour $m=2$, on a la seule racine primitive $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)=-1$; à

proprement parler, elle n'engendre plus de polygone régulier, et la dénomination de racine principale devient sans objet.

Pour $m = 4$, les racines principales sont $\Phi\left(\pm \frac{1}{4}\right) = \pm i$ (101, I), la première directe, la seconde rétrograde.

Dans la théorie de la fonction exponentielle (201, IV, *inf.*), nous rencontrerons des expressions remarquables des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

113 *bis*. Nous aurons à utiliser les observations suivantes.

I. *Si* m, M, q *sont trois entiers positifs donnant* $m = \frac{M}{q}$, *chaque racine principale* $m^{\text{ième}}$ *de l'unité est égale à la* $q^{\text{ième}}$ *puissance de la racine* $M^{\text{ième}}$ *de même nom.* Car ces deux racines ont pour valeurs, la seconde $\Phi\left(\pm \frac{1}{M}\right)$, et la première

$$\Phi\left(\pm \frac{1}{m}\right) = \Phi\left(\pm \frac{q}{M}\right) = \Phi\left(\pm \frac{1}{M}\right)^q.$$

II. *La quantité* $\operatorname{mod}\left[\Phi\left(\pm \frac{1}{m}\right) - 1\right]$, *côté du polygone régulier ayant pour sommets les puissances successives d'une racine principale* $m^{\text{ième}}$, *tend vers* o, *quand* m *augmente indéfiniment.* Car $\Phi(\mathfrak{m})$ est une fonction de $\mathfrak{m}$ qui est olotrope (90) et prend la valeur 1 pour $\mathfrak{m} = 0$ (101, I).

114. *En appelant* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ *les racines* $m^{\text{ièmes}}$ *de l'unité et* $k_1, k_2, \ldots, k_m$ *des entiers quelconques (positifs, nuls ou négatifs), la fonction symétrique*

$$\Sigma \varepsilon_1^{k_1} \varepsilon_2^{k_2} \ldots \varepsilon_m^{k_m}, \tag{9}$$

plus généralement même la somme des valeurs distinctes que les seules permutations circulaires des m *racines donnent au monome mis en évidence, est nulle toutes les fois que son degré (positif ou négatif)* $K = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ *n'est pas divisible par* m.

On peut évidemment prendre ε_1 égale à quelque racine primitive et $\varepsilon_i = \varepsilon_1^i$, d'où

$$\varepsilon_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_{m-1} = \varepsilon_m, \qquad \varepsilon_1 \varepsilon_m = \varepsilon_1.$$

Cela posé, si l'on multiplie par $\vartheta_1^K = \vartheta_1^{k_1}\vartheta_1^{k_2}\ldots\vartheta_1^{k_m}$ un terme quelconque de la somme considérée, par exemple celui qui est en évidence, il vient de suite

$$\vartheta_1^K\vartheta_1^{k_1}\vartheta_2^{k_2}\ldots\vartheta_m^{k_m} = (\vartheta_1\vartheta_1)^{k_1}(\vartheta_1\vartheta_2)^{k_2}\ldots(\vartheta_1\vartheta_m)^{k_m} = \vartheta_2^{k_1}\vartheta_3^{k_2}\ldots\vartheta_1^{k_m},$$

et chaque terme éprouve ainsi la modification qu'y produirait l'exécution de la permutation consistant à remplacer ϑ_1 par ϑ_2, ϑ_2 par ϑ_3, ..., ϑ_m par ϑ_1. Cette permutation étant circulaire laisse invariable la somme dont il s'agit; on a donc $\vartheta_1^K\Sigma = \Sigma$, c'est-à-dire

$$(\vartheta_1^K - 1)\Sigma = 0,$$

et par suite $\Sigma = 0$, parce que la racine ϑ_1 est primitive, l'exposant K non divisible par m, et qu'ainsi on ne peut avoir $\vartheta_1^K = 1$.

115. Pour la somme des puissances semblables de ces racines, *on trouve en particulier*

$$\Sigma\vartheta^k = 0,$$

toutes les fois que leur exposant k n'est pas divisible par m.

Quand l'exposant est multiple de m, on a au contraire

$$\Sigma\vartheta^k = m,$$

à cause de $\vartheta_1^k = \vartheta_2^k \ldots = \vartheta_m^k = 1$.

116. Le produit $\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_m$ des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité est une fonction symétrique du genre de la somme (9), et comme la précédente, de degré divisible par m. Sa valeur est intéressante à calculer.

On a

$$\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_m = \mp 1,$$

selon que m est pair ou impair.

En prenant effectivement ces racines sous les formes (7) et ayant égard à la relation générale (32) du n° **91**, il vient immédiatement

$$\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_m = \Phi\left[\frac{1+2+\ldots+(m-1)}{m}\right]$$
$$= \Phi\left(\frac{m-1}{2}\right) = \left[\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{m-1} = (-1)^{m-1} \quad (\mathbf{101}, \text{I}).$$

116 *bis*. *Les racines communes aux deux équations*

$$(10)\qquad u^{m_1} = 1, \qquad u^{m_2} = 1$$

sont celles de l'équation

$$(11)\qquad u^d = 1,$$

d représentant le plus grand commun diviseur de m_1, m_2.

Pour que la racine quelconque $\Phi\left(\frac{g}{m_1}\right)$ de la première équation (10) appartienne à la seconde, il faut effectivement et il suffit, en posant

$$\frac{m_1}{d} = m'_1, \qquad \frac{m_2}{d} = m'_2,$$

que

$$\left[\Phi\left(\frac{g}{m_1}\right)\right]^{m_2} = \Phi\left(\frac{m_2 g}{m_1}\right) = \Phi\left(\frac{m'_2 g}{m'_1}\right) = 1,$$

par suite (101, V) que $\frac{m'_2 g}{m'_1}$ soit un entier, ou bien, puisque m'_1 est premier à m'_2, que g soit divisible par m'_1, c'est-à-dire de la forme $\gamma m'_1$, γ désignant quelque entier. Il faut donc et il suffit que $\Phi\left(\frac{g}{m_1}\right)$ se réduise à $\Phi\left(\frac{\gamma m'_1}{d m'_1}\right) = \Phi\left(\frac{\gamma}{d}\right)$, c'est-à-dire soit quelque racine de l'équation (11).

Plus généralement, *les racines communes aux équations semblables en nombre quelconque*

$$(12)\qquad u^{m_1} = 1, \qquad u^{m_2} = 1, \qquad u^{m_3} = 1, \qquad \ldots,$$

sont celles de l'équation

$$(13)\qquad u^d = 1,$$

où d est le plus grand commun diviseur de tous les degrés m_1, m_2, m_3, ...

Si en particulier ces derniers nombres n'ont aucun diviseur commun > 1, *les équations* (12) *n'ont d'autre racine commune que* 1, *racine unique appartenant à l'équation* (13).

Observations complémentaires.

117. *Quand les quantités* X, x_0 *ne sont* $=0$ *ni l'une ni l'autre, toute racine* U *de l'équation numérique*

$$(1) \qquad u^m = X^n \quad (106)$$

peut être considérée comme la valeur acquise au bout de quelque chemin conduisant de x_0 *à* X, *par la fonction* $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$ *du n° 73, construite à partir de* x_0 *avec une valeur initiale égale à quelque racine* u_0, *convenablement choisie, de l'équation numérique*

$$(2) \qquad u^m = x_0^n.$$

Traçons effectivement de X à x_0 une ligne brisée $[X\dot{x}_0]$ dont la longueur de chaque côté soit inférieure à l'une et à l'autre des distances de ses extrémités à l'origine O_x, et appelons $F\left(\frac{n}{m}, x\right)$ la fonction f que l'on pourrait construire en prenant $x_0 = X$, $u_0 = U$.

Il résulte du n° 71, II, et de la théorie générale du cheminement (173*), que sur le chemin $[Xx_0]$ parcouru d'une manière quelconque dans un sens ou dans l'autre, $F\left(\frac{n}{m}, x\right)$ est une pseudo-fonction monodrome. Si donc on nomme u_0 sa valeur atteinte en x_0, cette quantité u_0 est racine de l'équation numérique (2), et, en rebroussant chemin jusqu'à X, on retrouve U pour valeur finale de la même pseudo-fonction. Or la dernière partie de ce cheminement équivaut évidemment à celui qu'on exécuterait de x_0 à X, sur le chemin dont il s'agit, pour la fonction $f\left(\frac{n}{m}, x\right)$.

118. Il résulte de cette proposition que *quand* x *varie, les* m *racines de l'équation*

$$(3) \qquad u^m = x^n$$

appartiennent respectivement à autant de pseudo-fonctions dont chacune est déterminée exactement par la connaissance

de celle des racines de l'équation numérique (2) *qui constitue sa valeur initiale en* x_0, *et par le chemin suivi à partir de* x_0.

Nous appellerons ces m pseudo-fonctions *les déterminations de la fonction radicale simple* $\sqrt[m]{x^n}$. Elles s'expriment immédiatement au moyen de la fonction ψ du n° 78 et des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité (109). Car, en faisant $x_0 = 1$ dans la formule (13) du n° 77, et y prenant en conséquence pour u_0 quelque racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité, elle devient

$$(4) \qquad u = u_0 \psi\left(\frac{n}{m}, x\right).$$

Cette relation confère immédiatement à la fonction radicale simple toutes les propriétés fondamentales de la fonction ψ (78 *et suiv.*), (103 *et suiv.*). Pour rappeler la grande ressemblance de la plupart des autres (81 *et suiv.*) avec celles du monome à exposant entier, on appelle aussi cette fonction le *monome à exposant fractionnaire,* et on la représente souvent par

$$x^{\frac{n}{m}}.$$

Il faut toutefois retenir que cette notation acquiert un sens précis, après spécification seulement, tant des valeurs initiales adoptées que du chemin suivi à partir de celle de x.

Enfin le changement de la fraction $\frac{n}{m}$ en une autre $\frac{n'}{m'}$, égale mais à termes différents, en altérerait la signification; car $x^{\frac{n}{m}}$ a m déterminations, tandis que $x^{\frac{n'}{m'}}$ en a m'.

Sous le bénéfice de ces observations et en posant $\frac{n}{m} = \mu$, les principales formules de la théorie de la fonction ψ conduisent aux suivantes

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^p x^\mu}{dx^p} = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)\dfrac{x^\mu}{x^p} \\ \qquad\quad = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-p+1)x^{\mu-p} \quad (80,\ \text{I}) \text{ et } (82), \end{cases}$$

puis

$$(6) \qquad \int x^\mu dx = \frac{x x^\mu}{\mu+1} + C = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (83),$$

sauf le cas où $\mu = -1$, puis enfin

$$(7) \qquad (x+h)^\mu = x^\mu + \frac{\mu}{1} x^{\mu-1} h + \dots \quad (80, \text{II}), (82),$$

où il faut supposer x non $= 0$ avec $\bmod h < \bmod x$.

Grâce à la notation x^μ, ces formules ont conservé les formes extérieures connues dès les premiers éléments pour le cas de μ entier positif. La dernière est le *Binome de Newton pour un exposant fractionnaire.*

119. *En appelant* U *la valeur acquise en* X *au bout d'un chemin donné, par quelque détermination u de* $x^{\frac{n}{m}}$, *et* $U^{(\pm k)}$ *ce qu'elle devient par l'adjonction au chemin considéré de k anneaux directs ou rétrogrades tracés autour de l'origine* O_x, *on a*

$$U^{(\pm k)} = \alpha^{\pm kn} U,$$

où α *désigne la racine principale directe* $m^{ième}$ *de l'unité* (113).

La relation (4) combinée avec les propriétés de la fonction ψ (88) donne immédiatement

$$U^{(\pm k)} = \left[\Phi\left(\frac{n}{m}\right)\right]^{\pm k} U = \left[\Phi\left(\frac{1}{m}\right)\right]^{\pm kn} U \quad (91);$$

or $\Phi\left(\frac{1}{m}\right)$ est précisément ce que nous avons appelé la racine principale directe $m^{ième}$ de l'unité.

120. Les valeurs finales en X, de la détermination u, sont ainsi les termes de la progression géométrique de raison α^n

$$(8) \qquad \dots, \quad \alpha^{-n} U, \quad U, \quad \alpha^n U, \quad \alpha^{2n} U, \quad \dots.$$

Cette suite ne contient naturellement que des racines de l'équation numérique (1); *mais elle n'en renferme de distinctes qu'en nombre évidemment égal à l'exposant auquel appartient* α^n *considérée comme racine* $m^{ième}$ *de l'unité,* c'est-à-dire au quotient $\frac{m}{d}$, d désignant le plus grand commun diviseur (pris positivement) des entiers m, n (111).

Si donc n est divisible par m, cas où l'on a $d = m$, $\frac{m}{d} = 1$, *tous les termes de la progression* (8) *sont égaux à* U.

Dans l'autre cas extrême où m, n sont premiers entre eux, on a $d = 1$ *et* $\frac{m}{d} = m$; *la suite* (8) *contient m termes distincts, et, par conséquent, la totalité des racines de l'équation* (1).

Entre le cas où m, n sont premiers entre eux et celui où leur plus grand commun diviseur est > 1, il existe ainsi une différence essentielle. Dans le premier, la progression (8) renferme *toutes* les racines de l'équation (1); ainsi donc *un chemin tracé convenablement de* x_0 *à* X *permettra toujours, quel qu'ait été le choix de* u_0, *d'obtenir en* X, *pour la valeur finale de u, telle racine qu'on voudra de cette équation numérique.*

Dans l'autre cas au contraire, et quel que soit le chemin suivi, mais bien entendu en partant toujours de la même valeur initiale u_0, *on n'obtiendra jamais pour valeur finale de u en* X *que* $m' = \frac{m}{d}$ *racines distinctes de l'équation* (1). Ce sont évidemment les m' racines de l'équation de degré sous-multiple

$$u^{m'} = \mathrm{U}^{m'}.$$

121. Le second des deux cas ci-dessus peut être rattaché au premier, au moyen d'une décomposition connexe du premier membre de l'équation (3) en d facteurs rationnels. Il y a grand intérêt à le remarquer.

En appelant $\text{ȣ}_1, \text{ȣ}_2, \ldots, \text{ȣ}_d$ les d racines $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité, on a les $d - 1$ égalités

$$\Sigma\text{ȣ}_1 = \Sigma\text{ȣ}_1\text{ȣ}_2 = \Sigma\text{ȣ}_1\text{ȣ}_2\text{ȣ}_3 = \ldots = 0,$$

parce que les degrés des termes généraux de ces sommes sont 1, 2, 3, ..., $d - 1$, partant non multiples de d (**114**); on a en outre

$$\text{ȣ}_1\text{ȣ}_2\ldots\text{ȣ}_d = (-1)^{d-1} \quad (\mathbf{116}).$$

On en conclut immédiatement l'identité

$$u^m - x^n = (u^{m'} - \text{ȣ}_1 x^{n'})(u^{m'} - \text{ȣ}_2 x^{n'})\ldots(u^{m'} - \text{ȣ}_d x^{n'}),$$

où n' représente le quotient $\frac{n}{d}$, et en vertu de laquelle l'équation fondamentale (3) se décompose en les d autres de même forme (sauf les coefficients constants $\aleph_1, \ldots, \aleph_d$ dont la présence est indifférente)

$$u^{m'} - \aleph_1 x^{n'} = 0, \qquad u^{m'} - \aleph_2 x^{n'} = 0, \qquad \ldots, \qquad u^{m'} - \aleph_d x^{n'} = 0.$$

Dans toutes ces équations les exposants de x, u sont maintenant premiers entre eux, et chacune d'elles rentre dans le premier cas. Si donc u_0 est une racine de

$$u^{m'} = \aleph_l x_0^{n'},$$

cas auquel U est nécessairement racine de

$$u^{m'} = \aleph_l X^{n'},$$

les chemins tracés de x_0 à X feront atteindre à u les diverses racines de cette même équation numérique

$$u^{m'} = \aleph_l X^{n'} = U^{m'}$$

à l'exclusion de toutes autres valeurs finales.

122. Si, après avoir rangé dans quelque ordre déterminé les m racines de l'équation numérique (2) et les avoir prises pour valeurs initiales des racines variables de l'équation (3), on calcule, *sur un même chemin,* leurs valeurs finales en X, on obtiendra évidemment les m racines de l'équation numérique (1)

$$(9) \qquad U, \quad U', \quad \ldots, \quad U^{(m-1)}$$

rangées aussi dans un ordre déterminé. Cela posé, *les quantités* (9) *se partagent en d groupes de m' chacun*

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{llll} U, & \alpha^d U, & \alpha^{2d} U, \ldots, & \alpha^{(m'-1)d} U, \\ \alpha U, & \alpha^{1+d} U, & \ldots\ldots\ldots, & \alpha^{1+(m'-1)d} U, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha^{d-1} U, & \alpha^{d-1+d} U, & \ldots\ldots\ldots, & \alpha^{d-1+(m'-1)d} U, \end{array} \right.$$

dans chacun desquels, si l'on modifie arbitrairement le tracé

du chemin sans changer l'ordre des valeurs initiales, les racines qui le composent éprouvent une simple permutation circulaire.

Supposons que la déformation du chemin équivaille à l'intercalation d'un anneau direct autour de l'origine, entre deux tronçons en lesquels on le diviserait, et considérons le premier des groupes (10).

Comme n' est premier à m', les restes de la division par m' des nombres

$$0.n',\quad 1.n',\quad 2n',\quad \ldots\quad (m'-1)n'$$

reproduisent, à l'ordre près, les nombres

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots,\quad m'-1.$$

Ceux de la division par $m = dm'$ de

$$0,\qquad n = dn',\qquad 2n = 2dn',\qquad \ldots\qquad (m'-1)n$$

sont donc, à l'ordre près,

$$0,\quad d,\quad 2d,\quad \ldots\quad (m'-1)d.$$

Par suite, les racines de notre premier groupe peuvent être écrites, toujours à l'ordre près,

$$(11)\qquad \mathrm{U},\quad \alpha^n\mathrm{U},\quad \alpha^{2n}\mathrm{U},\quad \ldots,\quad \alpha^{(m'-1)n}\mathrm{U}.$$

Cela posé, l'intercalation de l'anneau, changeant U en α^nU (**119**), changera respectivement ces diverses racines en

$$\alpha^n\mathrm{U},\quad \alpha^{2n}\mathrm{U},\quad \ldots,\quad \alpha^{(m'-1)n}\mathrm{U},\quad \alpha^{m'n}\mathrm{U} = \alpha^{mn'}\mathrm{U} = \mathrm{U},$$

c'est-à-dire opérera une simple permutation circulaire dans la suite (11), et aussi dans le premier groupe du Tableau (10) qui est composé des mêmes éléments; k anneaux directs y produiront la permutation circulaire équivalente à celle-ci répétée k fois; k anneaux rétrogrades y produiront évidemment la permutation circulaire inverse de celle-ci. Et de même pour les autres groupes du Tableau (10), car les éléments de chacun d'eux s'obtiennent en multipliant ceux du premier par quelque même puissance de α. Notre proposition est donc démontrée, puisque toute déformation

du chemin équivaut à l'intercalation d'un pareil anneau, à parcourir un certain nombre de fois dans un sens ou dans l'autre (**87**).

123. Ce fait remarquable s'exprime en disant que *les racines de l'équation* (3) *se partagent en d systèmes circulaires de m' racines chacun.*

Quand $d = m$, chaque système circulaire est composé d'une seule racine; quand $d = 1$, toutes les racines appartiennent au même système circulaire.

La décomposition de cette équation opérée au n° **121** permettrait encore de rattacher à ce dernier cas extrême celui où d est > 1.

124. Le cas simple où $m = 2$ se présentera souvent à nous; il est remarquable en lui-même, parce que l'équation binome numérique (6) du n° **109** admet alors la racine principale unique $x = -1$ qui est réelle et à la fois directe et rétrograde, ou plutôt neutre (**113**).

Quand n est pair, α^n est $= 1$, les racines de l'équation (3) sont monodromes, par suite olotropes en $x = 0$ si n est positif.

Quand n est impair, α^n est $= -1$ et ces racines ne sont pas monodromes; *l'adjonction d'un seul anneau ou d'un nombre impair d'anneaux parcourus autour de l'origine dans un sens quelconque, change toujours* U *en* $-$U; *celle d'un nombre pair d'anneaux laisse la racine invariable.*

125. On rencontre fréquemment des expressions de la forme

$$(12) \qquad [f(x, y, \ldots)]^{\frac{n}{m}}$$

composée d'une fonction simple connue $\mathrm{U} = f(x, y, \ldots)$ *et de la fonction radicale simple* $u^{\frac{n}{m}}$ *prise pour composante,* dont nous supposerons l'exposant $\frac{n}{m}$ irréductible.

Cette dernière étant olotrope pour toute valeur de u autre que 0 (**80**, III), *l'expression considérée l'est en tout système de valeurs de $x, y, \ldots$ rendant $f(x, y, \ldots)$ olotrope et non* $= 0$ (**248***).

On obtiendra donc les seules valeurs de $x, y, \ldots$ qui soient critiques pour cette fonction composée, en cherchant :

I. *Celles qui sont ordinaires pour* $f(x, y, \ldots)$ *et satisfont à l'équation numérique*

$$f(x, y, \ldots) = 0;$$

II. *Celles qui sont singulières pour* $f(x, y, \ldots)$.

La discussion de valeurs du premier genre $a, b, \ldots$ s'opère en considérant le développement de $f(x, y, \ldots)$ en série entière par rapport à $x - a, y - b, \ldots$. Si les coefficients de ce développement ont des valeurs telles qu'il soit la puissance $m^{\text{ième}}$ exacte de quelque autre de même nature, ce dont on s'assure en extrayant sa racine $m^{\text{ième}}$, comme s'il se réduisait à un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de $x - a, y - b, \ldots$, il est clair que *l'expression* (12) *a m déterminations toutes olotropes en* $x = a, y = b, \ldots$. Sinon, et en particulier quand l'ensemble homogène des termes effectifs de moindre degré n'est la puissance $m^{\text{ième}}$ d'aucun polynome de cette espèce, il est évident qu'*aucune de ces déterminations n'y est olotrope*. Par exemple, la fonction $\sqrt[m]{f(x)}$ *est olotrope ou non en* $x = a$, *selon que le degré de multiplicité de a considéré comme zéro de* $f(x)$ *est ou non divisible par m* (3).

La nature d'une phase critique du second genre est entièrement subordonnée à celle de la phase singulière dans laquelle $f(x, y, \ldots)$ est supposée entrer, et naturellement on ne peut rien dire avant que cette dernière ait été précisée. Si, par exemple, on avait $f(x, y, \ldots) = [\varphi(x, y, \ldots)]^{\frac{N}{M}}$, $\varphi(x, y, \ldots)$ étant olotrope et nulle en $x = a, y = b, \ldots$, mais non puissance à exposant entier de quelque autre fonction olotrope, l'expression (12) y serait olotrope ou non, selon que $\frac{nN}{mM}$ se réduirait ou non à quelque entier positif.

En un infini α, de degré de multiplicité μ, de $f(x)$ supposée méromorphe, on peut poser

$$f(x) = (x - \alpha)^{-\mu} f_0(x),$$

d'où

$$[f(x)]^{\frac{n}{m}} = (x - \alpha)^{-\frac{n\mu}{m}} [f_0(x)]^{\frac{n}{m}}.$$

Ce dernier radical étant olotrope en $x = \alpha$ parce qu'il porte sur

une fonction qui l'est elle-même sans s'évanouir (33), *cette fonction composée y est ou non méromorphe, partant monodrome, selon que μ est ou non multiple de m.*

126. Pour suivre par cheminement la valeur de la fonction composée (12), on peut procéder comme nous l'avons depuis bien longtemps expliqué (251*). Nous ferons plus bas (**166**, *inf.*) une étude de ce genre, mais par des procédés un peu différents qui reposent sur la discussion de radicaux simples de la forme

$$(x-\mathfrak{a})^{\frac{n}{m}}.$$

En appelant x_0, X les valeurs extrêmes de x, puis x_1 une valeur intermédiaire, puis $[x_0 x_1 \mathrm{X}]$ un chemin *simple* tracé par ces trois points, puis enfin $[\mathfrak{a}]$ un *anneau* passant par x_1 et enveloppant une seule fois la valeur critique $\mathfrak{a}$, on aperçoit immédiatement, en raisonnant comme au n° 87, que tout chemin conduisant de x_0 à X peut, sans franchir le point $\mathfrak{a}$, être amené à se composer des tronçons $[x_0 x_1]$, $[x_1 \mathrm{X}]$ avec soudure intercalaire de l'anneau $[\mathfrak{a}]$ parcouru plus ou moins de fois dans un sens ou dans l'autre.

Quand x décrit cet anneau, la différence $x-\mathfrak{a}$ représentée graphiquement sur un plan spécial y décrit évidemment, autour de son origine O' et dans le même sens de rotation, un anneau [O'] géométriquement superposable au premier. Après chaque révolution nouvelle, notre radical revient donc en x_1 à sa valeur primitive multipliée par $\alpha^{\pm n}$ (**119**). Les changements que produit dans la valeur finale acquise en X par notre radical l'intercalation entre les tronçons du chemin simple de l'anneau $[\mathfrak{a}]$ répété un nombre quelconque de fois dans un sens ou dans l'autre, sont donc déterminés textuellement par les propositions des n°s **119** et suivants.

127. La règle de différentiation de la fonction composée $[\mathrm{U}(x)]^{\frac{n}{m}}$ est fournie par la formule évidente, de même forme que si l'exposant était entier,

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{U}(x)]^{\frac{n}{m}} = \frac{n}{m}\,\frac{[\mathrm{U}(x)]^{\frac{n}{m}}}{\mathrm{U}(x)}\mathrm{U}'(x) = \frac{n}{m}[\mathrm{U}(x)]^{\frac{n}{m}-1}\mathrm{U}'(x) \quad (256^*), (118).$$

Pour la fonction composée plus générale $\psi[\mathfrak{m}, \mathrm{U}(x)]$, on trou-

verait (**80**, I), (**82**)

$$\frac{d}{dx}\psi[\mathfrak{m}, \mathrm{U}(x)] = \mathfrak{m}\,\frac{\psi[\mathfrak{m}, \mathrm{U}(x)]}{\mathrm{U}(x)}\,\mathrm{U}'(x) = \mathfrak{m}\psi[\mathfrak{m}-1, \mathrm{U}(x)]\mathrm{U}'(x);$$

mais il vaut mieux rattacher ce qui intéresse cette fonction à la théorie du logarithme et de l'exponentielle, comme nous le ferons plus tard (**212**, *inf.*).



CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES PRINCIPALES PHASES CRITIQUES D'UNE FONCTION IMPLICITE D'UNE SEULE VARIABLE, DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION UNIQUE.

Recherche des racines olotropes u de l'équation $f(x, u) = 0$, dans le cas où f est une composante olotrope dont la dérivée première par rapport à u a une valeur initiale nulle.

128. Parmi les phases critiques où entrent les fonctions implicites quand les conditions sous lesquelles nous avons énoncé le théorème fondamental de leur théorie (307*) ne sont plus toutes remplies, les plus intéressantes, et de beaucoup, sont celles que fait naître la nullité du déterminant différentiel des premiers membres des équations génératrices, pris par rapport aux fonctions inconnues, ces premiers membres étant toujours supposés fonctions olotropes des variables indépendantes et des fonctions inconnues, pour les valeurs initiales de toutes ces quantités. La discussion de ces phases critiques est infiniment trop vaste pour pouvoir être exécutée dans toute sa généralité; d'ailleurs on serait bientôt arrêté par l'exiguïté des connaissances acquises sur les systèmes de polynomes entiers à plusieurs variables; mais elle a été épuisée dans son cas le plus simple et le plus important aussi, celui où il s'agit d'une équation unique définissant une fonction implicite d'une seule variable indépendante. La résolution d'une pareille équation engendre alors *plusieurs* fonctions implicites répondant aux mêmes conditions initiales, et *les phases singulières de celles qui cessent d'être olotropes sont toujours réductibles à celle de la fonction radicale simple* (71, VI), (80, III), (102 *et suiv.*). C'est la principale des constatations que nous avons à faire dans le présent Chapitre.

Nous supposerons donc que le premier membre de l'équation

finie donnée

$$(1) \qquad f(x, u) = 0,$$

à une seule variable indépendante x et à une seule fonction inconnue u, est olotrope pour les valeurs initiales de x, u, mais qu'on y a

$$f^{(0,1)}(x, u) = 0.$$

Pour simplifier l'écriture et le langage, nous raisonnerons dans l'hypothèse toujours réalisable, où ces valeurs initiales sont nulles toutes deux, où, par suite, le développement de $f(x, u)$ à partir d'elles se réduit à une simple série entière en x, u, ayant zéro pour terme constant. Nous entendrons exclusivement par *racines* de l'équation (1), les fonctions de x de toutes natures, annulant $f(x, u)$ quelle que soit x (dans le voisinage de $x = 0$) et tendant vers zéro en même temps que x.

129. Dans la série entière $f(x, u)$ que nous devons supposer non identiquement nulle, nous appellerons terme *principal* celui de moindre degré en u parmi les termes effectifs (**112***) où x figure à sa plus faible puissance $\mathfrak{f}$, et aussi *grade* de cette série, le degré $\mathfrak{g}$ par rapport à u, de son terme principal.

Comme tous les termes de $f(x, u)$ sont divisibles par $x^{\mathfrak{f}}$, mais non par $x^{\mathfrak{f}+1}$, on peut écrire

$$(2) \qquad f(x, u) = x^{\mathfrak{f}}[D(u) + xE(x, u)],$$

$D(u)$ représentant une série entière en u seulement, de même grade $\mathfrak{g}$, et $E(x, u)$ quelque série entière en x, u.

130. *Si le grade $\mathfrak{g}$ se réduit à zéro, l'équation* (1) *n'a aucune racine.*

Dans cette hypothèse, le second facteur de l'expression (2) ci-dessus prend la forme

$$A_{\mathfrak{f},0} + I(x, u),$$

où le premier terme est une constante non $= 0$, où le second est une série entière sans terme constant. En appelant donc ε quelque

quantité positive inférieure à $\operatorname{mod} A_{\mathfrak{f},0}$, on peut en assigner deux autres ξ, η telles que pour tout système de valeurs de x, u ayant des modules inférieurs à ces dernières, on ait

$$\operatorname{mod} I(x, u) < \varepsilon,$$

et par suite

$$\operatorname{mod}[A_{\mathfrak{f},0} + I(x, u)] > \operatorname{mod} A_{\mathfrak{f},0} - \varepsilon.$$

Il est donc impossible qu'une fonction de x annule identiquement ce second facteur et par suite l'expression (2) elle-même, si les valeurs qu'elle prend pour les valeurs de x dont les modules sont inférieurs à ξ n'ont pas des modules au moins égaux à η, en particulier si elle est infiniment petite quand x tend vers zéro.

131. *Quand* $\mathfrak{g} = 1$, *l'équation* (1) *possède une seule racine qui est olotrope en* $x = 0$.

En égalant à zéro le second facteur de l'expression (2), on obtient effectivement une équation de la forme

$$d_1 u + d_2 u^2 + \ldots + x E(x, u) = 0,$$

où d_1 n'est pas nul, et qui par suite rentre dans la théorie générale (307*). Car en $x = u = 0$, son premier membre est olotrope et nul, mais non sa dérivée première par rapport à u qui se réduit à d_1. Cette équation admet donc pour racine unique (308*) une fonction de x, olotrope en $x = 0$, qui seule évidemment aussi peut annuler identiquement l'expression (2).

Nous n'avons ainsi à nous occuper que des cas où $\mathfrak{g}$ est > 1, et nous commencerons nos recherches par celle des racines olotropes (en $x = 0$).

132. *Si l'équation* (1) *possède la racine olotrope*

$$(3) \qquad u = \varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

et si l'hypothèse $u = \varphi(x)$ *annule identiquement (pour toutes valeurs de* x *suffisamment voisines de* 0) $f(x, u)$ *et ses* $m - 1$ *premières dérivées par rapport à* u *seulement, mais non la* $m^{\text{ième}}$, *on a, quelles que soient* x, u *(dans le voisinage de* 0, 0), *l'identité*

$$(4) \qquad f(x, u) = [u - \varphi(x)]^m \, {}^{(0)}f(x, u),$$

où m est un entier $\geqq 1$ et ${}^{(0)}f(x, u)$ une nouvelle fonction olotrope en $x = u = 0$, telle en outre que l'équation

$${}^{(0)}f(x, u) = 0$$

n'admet plus la racine dont il s'agit.

I. Supposons d'abord que l'on ait

$$a_1 = a_2 = \ldots = 0,$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = 0$ quelle que soit x, et ordonnons par rapport à u le développement de $f(x, u)$ par la formule de Maclaurin

$$f(x, u) = f(x, 0) + \frac{f^{(0,1)}(x, 0)}{1} u + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(0,m-1)}(x, 0)}{1.2\ldots(m-1)} u^{m-1} + \frac{f^{(0,m)}(x, 0)}{1.2\ldots m} u^m + \ldots.$$

En vertu de l'hypothèse, les coefficients de u^0, u, …, u^{m-1} sont nuls quelle que soit x, mais non celui de u^m; en supprimant les termes correspondants il reste donc

$$f(x, u) = u^m \left[\frac{f^{(0,m)}(x, 0)}{1.2\ldots m} + u \frac{f^{(0,m+1)}(x, 0)}{1.2\ldots(m+1)} + \ldots\right] = u^m\, {}^{(0)}f(x, u),$$

où, comme nous l'avons annoncé, ${}^{(0)}f(x, u)$ est une série entière en x, u, qui pour $u = 0$ se réduit à la fonction de x non identiquement nulle

$$\frac{f^{(0,m)}(x, 0)}{1.2\ldots m}.$$

II. Sinon, et cela pour les valeurs de x rendant $\operatorname{mod}\varphi(x)$ suffisamment petit, la substitution

$$u = \varphi(x) + \mathrm{U}$$

transforme $f(x, u)$ en $\mathrm{F}(x, \mathrm{U})$ fonction de x, U olotrope en $x = \mathrm{U} = 0$, qui donne évidemment

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(x, 0) &= f[x, \varphi(x)], \\ \mathrm{F}^{(0,1)}(x, 0) &= f^{(0,1)}[x, \varphi(x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'hypothèse admise, combinée avec la conclusion de l'alinéa

précédent, donne donc quelles que soient x, U (dans le voisinage de o, o)

$$F(x, U) = U^{m\,(0)}F(x, U),$$

${}^{(0)}F(x, o)$ n'étant pas nulle quelle que soit x; d'où la relation (4) en faisant la substitution inverse $U = u - \varphi(x)$, et en appelant ${}^{(0)}f(x, u)$ la fonction ${}^{(0)}F[x, u - \varphi(x)]$, évidemment olotrope en $x = u = o$, qui pour $u = \varphi(x)$ se réduit à ${}^{(0)}F(x, o)$.

Nous appellerons l'entier m *le degré de multiplicité* de la racine (3) de l'équation considérée (1). On peut évidemment le regarder encore comme *l'exposant de la plus haute puissance de la différence $u - \varphi(x)$ qui divise $f(x, u)$ en donnant un quotient olotrope en $x = u = o$, de plus non nul quelle que soit x pour $u = \varphi(x)$.*

133. *Si l'équation* (1) *possède, aux degrés de multiplicité*

$$(5) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_g,$$

les g racines

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = a'_1 x + a'_2 x^2 + \ldots, \\ \varphi_2(x) = a''_1 x + a''_2 x^2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_g(x) = a^{(g)}_1 x + a^{(g)}_2 x^2 + \ldots, \end{cases}$$

olotropes et nulles en $x = o$, de plus toutes inégales, c'est-à-dire telles que, dans les développements par la formule de Maclaurin de deux quelconques, les coefficients des termes semblables ne sont pas tous respectivement égaux, on a quelles que soient les valeurs de x, u (suffisamment voisines de o, o) l'identité

$$(7) \quad f(x, u) = [u - \varphi_1(x)]^{m_1} [u - \varphi_2(x)]^{m_2} \ldots [u - \varphi_g(x)]^{m_g}\, {}^{(g)}f(x, u),$$

${}^{(g)}f(x, u)$ désignant une fonction olotrope en $x = u = o$, telle en outre que l'équation

$${}^{(g)}f(x, u) = o$$

n'admet plus aucune des racines dont il s'agit.

D'après le théorème du n° **132**, la fonction

$$(8) \qquad {}^{(1)}f(x, u) = f(x, u)[u - \varphi_1(x)]^{-m_1}$$

est olotrope en $x = u = 0$, et n'est plus nulle quelle que soit x pour $u = \varphi_1(x)$; mais, pour $u = \varphi(x)$, autre racine quelconque de degré de multiplicité m du groupe (6), elle l'est avec toutes ses dérivées par rapport à u jusqu'à celle d'ordre m exclusivement.

Comme par hypothèse les racines $\varphi_1(x)$, $\varphi(x)$ ne sont pas identiquement égales, on a

$$\varphi(x) - \varphi_1(x) = h_q x^q + h_{q+1} x^{q+1} + \ldots,$$

le premier des coefficients constants h_q, h_{q+1}, ... n'étant pas nul; il en résulte (**250***, I, II)

$$\begin{aligned}[\varphi(x) - \varphi_1(x)]^{-m_1} &= x^{-m_1 q}[h_q + h_{q+1} x + \ldots]^{-m_1} \\ &= x^{-m_1 q}(\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1 x + \ldots),\end{aligned}$$

expression qui, à cause de $\mathfrak{b}_0$ non $= 0$, est évidemment olotrope et non nulle pour toutes les valeurs de x en nombre illimité qui, sans être nulles, sont suffisamment voisines de zéro.

Cela posé, si dans la relation (8), et dans celles qu'on en déduit en la différentiant 1, 2, ..., m fois par rapport à u, on pose $u = \varphi(x)$, un raisonnement tout semblable à celui du n° **6** montre que les identités supposées

$$f[x, \varphi(x)] = f^{(0,1)}[x, \varphi(x)] = \ldots = f^{(0,m-1)}[x, \varphi(x)] = 0,$$

entraînent

$${}^{(1)}f[x, \varphi(x)] = {}^{(1)}f^{(0,1)}[x, \varphi(x)] = \ldots = {}^{(1)}f^{(0,m-1)}[x, \varphi(x)] = 0,$$

pour toutes les valeurs de x dont il s'agit, par suite identiquement, puisque celles-ci sont en nombre illimité et que ces fonctions d'une seule variable sont toutes olotropes (**4**). Mais il montre aussi, à cause de

$$[\varphi(x) - \varphi_1(x)]^{-m_1} \neq 0$$

pour les mêmes valeurs de x, et de

$$f^{(0,m)}[x, \varphi(x)] \neq 0$$

pour toutes les mêmes valeurs de x, sauf peut-être quelques-unes

d'entre elles en nombre limité, sans quoi cette dérivée $m^{\text{ième}}$ serait identiquement nulle contrairement à l'hypothèse, que ${}^{(1)}f^{(0,m)}(x, u)$ ne s'évanouit pas quelle que soit x pour $u = \varphi(x)$.

On a ainsi

$$f(x, u) = [u - \varphi_1(x)]^{m_1}\, {}^{(1)}f(x, u),$$

puis de même et successivement

$$\begin{aligned} {}^{(1)}f(x, u) &= [u - \varphi_2(x)]^{m_2}\, {}^{(2)}f(x, u), \\ {}^{(2)}f(x, u) &= [u - \varphi_3(x)]^{m_3}\, {}^{(3)}f(x, u), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ {}^{(g-1)}f(x, u) &= [u - \varphi_g(x)]^{m_g}\, {}^{(g)}f(x, u), \end{aligned}$$

où généralement ${}^{(i)}f(x, u)$ est une fonction olotrope en $x = u = 0$ telle que l'équation

$${}^{(i)}f(x, u) = 0$$

n'admet aucune des i premières racines (6), mais admet toutes les autres aux mêmes degrés de multiplicité $m_{i+1}, m_{i+2}, \dots, m_g$.

Pour obtenir l'identité (7), il ne reste plus maintenant qu'à multiplier ces g relations membre à membre, puis à supprimer les facteurs communs ${}^{(1)}f, {}^{(2)}f, \dots, {}^{(g-1)}f$.

134. Il est évident que, dans le produit de plusieurs séries entières de la forme (2), *le terme principal est précisément le produit de ceux des facteurs* et, par suite, que *le grade du produit est égal à la somme de ceux des facteurs*.

Comme le grade de chacune des séries $u - \varphi_i(x)$ est évidemment 1, ceux des g premiers facteurs du second membre de l'identité (7) sont $m_1, m_2, \dots, m_g$. En appelant donc ${}^{(g)}\mathfrak{g}$ celui du dernier facteur, cette identité donne

$$\mathfrak{g} = m_1 + m_2 + \dots + m_g + {}^{(g)}\mathfrak{g}, \tag{9}$$

égalité en vertu de laquelle *la somme des degrés de multiplicité des racines olotropes inégales de l'équation* (1), *à plus forte raison chacun d'eux ainsi que le nombre de ces racines, ne peuvent surpasser le grade* $\mathfrak{g}$ *de son premier membre.*

135. *Si l'on représente par*

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \tag{10}$$

quelque polynome entier en x sans terme constant, par υ_k une nouvelle variable et par

$$(11) \qquad f_k(x, \upsilon_k) = x^{\mathfrak{f}_k}[\Pi_k(\upsilon_k) + x\theta_k(x, \upsilon_k)]$$

la série entière en x, υ_k mise sous la forme (2), *qu'on obtient en opérant dans $f(x, u)$ la substitution*

$$(12) \qquad u = a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k,$$

la série $\Pi_k(\upsilon_k)$ se réduit nécessairement à quelque polynome entier [non identiquement nul puisque $\mathfrak{f}_k$ représente l'exposant de la plus haute puissance de x qui divise tous les termes effectifs de $f_k(x, \upsilon_k)$].

Si en outre l'équation (1) *possède les g racines olotropes* (6) *aux degrés de multiplicité* (5) *et si dans tous leurs développements les termes de degrés $\leqq k$ forment le même polynome* (10), *l'équation numérique entière en υ_k*

$$(13) \qquad \Pi_k(\upsilon_k) = 0$$

admet la racine a_k à un degré de multiplicité (3) *qui est au moins égal à*

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_g.$$

Si enfin l'équation (13) *n'a point de racine égale à a_k, l'équation* (1) *ne possède aucune racine olotrope dont le développement commence par les termes du polynome* (10).

I. Même avant toute réduction, le développement de

$$(14) \qquad f(x, a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k)$$

ne peut donner que des termes en $x^r \upsilon_k^s$ où l'on a

$$(15) \qquad r \geqq \mathfrak{f} + ks.$$

Car, la nouvelle variable υ_k n'entrant dans le second membre de la substitution (12) que par le terme $\upsilon_k x^k$ où elle figure au premier degré et multipliée par x^k, tout terme du développement de la partie quelconque

$$(16) \qquad A_{\mathfrak{f}+R,S}\, x^{\mathfrak{f}+R}(a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k)^S$$

de la série composée (14), qui est divisible par υ_k^s l'est forcément aussi par $x^{\mathfrak{f}+\mathrm{R}+ks}$ au moins et par suite, quel que soit R, par $x^{\mathfrak{f}+ks}$ au moins. On en conclut l'inégalité (15) entraînant

$$s \leqq \frac{r-\mathfrak{f}}{k}, \tag{17}$$

et toutes deux subsistent après la réduction, puisque cette opération n'introduit aucun terme dissemblable à ceux existant avant elle.

L'ordination ultérieure donne donc pour coefficient de x^r, une série entière en υ_k ne pouvant renfermer, quel que soit r, aucun terme effectif de degré supérieur au plus grand entier contenu dans $\frac{r-\mathfrak{f}}{k}$. Cette série se réduit donc toujours à quelque polynôme entier, ce qui a lieu en particulier pour $\Pi_k(\upsilon_k)$ coefficient de $x^{\mathfrak{f}_k}$.

II. En vertu de l'hypothèse admise, on a pour toute valeur de l'indice i

$$\begin{aligned} &a_1 x + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} + \upsilon_k x^k - \varphi_i(x) \\ &\quad = x^k[\upsilon_k - a_k - x(a_{k+1}^{(i)} + a_{k+2}^{(i)} x + \ldots)]. \end{aligned}$$

A cause de la relation (7), la substitution (12) change donc $f(x, u)$ en

$$\left\{ \begin{aligned} &x^{k(m_1+\ldots+m_g)+{}^{(g)}\mathfrak{f}_k} \times [(\upsilon_k - a_k)^{m_1+m_2+\ldots+m_g} + x\theta_k(x, \upsilon_k)] \\ &\quad \times [{}^{(g)}\Pi_k(\upsilon_k) + x\,{}^{(g)}\Theta_k(x, \upsilon_k)], \end{aligned} \right. \tag{18}$$

$\theta_k(x, \upsilon_k)$ étant quelque série entière en x, υ_k, et

$$x^{(g)\mathfrak{f}_k}[{}^{(g)}\Pi_k(\upsilon_k) + x\,{}^{(g)}\Theta_k(x, \upsilon_k)]$$

représentant la forme analogue à (11), du résultat obtenu en opérant la substitution (12) dans ${}^{(g)}f(x, u)$.

Maintenant, l'exactitude de la seconde partie de notre énoncé résulte de l'identité

$$\Pi_k(\upsilon_k) = (\upsilon_k - a_k)^{m_1+\ldots+m_g}\,{}^{(g)}\Pi_k(\upsilon_k)$$

que donne l'identification des termes de moindre degré en x dans chacune des expressions (11), (18).

III. Si l'équation proposée (1) avait la racine olotrope

$$a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots,$$

l'équation numérique (13) admettrait au moins une fois la racine a_k, comme nous venons de le constater, et l'hypothèse de la troisième partie de notre énoncé serait contredite.

136. *Si, faisant successivement $k = 1, 2, \ldots$, et prenant pour coefficients de la substitution (12) les $k-1$ premiers termes d'une même suite illimitée quelconque de quantités données*

$$(19) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{k-1}, \quad a_k, \quad \ldots,$$

on construit les équations numériques correspondantes analogues à (13)

$$(20) \qquad \Pi_1(\upsilon_1) = 0, \qquad \Pi_2(\upsilon_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Pi_k(\upsilon_k) = 0, \qquad \ldots,$$

et si, pour celle de rang k, on nomme $\mathfrak{d}_k$ son degré (effectif), $\mathfrak{m}_k$ le degré de multiplicité (non nul ou nul) auquel elle possède la racine a_k, on a indéfiniment

$$(21) \qquad \mathfrak{g} \geqq \mathfrak{d}_1 \geqq \mathfrak{m}_1 \geqq \mathfrak{d}_2 \geqq \mathfrak{m}_2 \geqq \ldots,$$

d'où l'on conclut que les entiers (positifs ou nuls) composant cette suite finissent par conserver une certaine valeur invariable $m (\geqq 0)$.

Si de plus m est > 0, la série entière

$$(22) \qquad a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

admet un rayon de convergence > 0, et sa somme est une racine olotrope de l'équation proposée (1), dont m est précisément le degré de multiplicité.

I. *On a d'abord, quel que soit k,*

$$(23) \qquad \mathfrak{d}_k \geqq \mathfrak{m}_k.$$

Ceci est évident quand $\mathfrak{m}_k = 0$, c'est-à-dire quand la $k^{\text{ième}}$ équation (20) n'a pas la racine a_k, et aussi quand $\mathfrak{m}_k > 0$, parce que le

degré de multiplicité d'une racine d'une équation entière quelconque ne peut jamais surpasser le degré effectif de celle-ci.

On a ensuite, toujours quel que soit k,

(24) $$\mathfrak{g} \geqq \mathfrak{d}_k.$$

Effectivement, cela même avant toute réduction, le développement de la série composée (14) contient, quel que soit l'entier μ, un terme en $x^{\mathfrak{f}+k\mu}\upsilon_k^{\mu}$, mais aucun autre semblable. Car la nature même de la formule du binome impose aux exposants de x, υ_k dans chacun des termes provenant du développement de l'expression (16), les formes simultanées

$$\mathfrak{f} + \mathrm{R} + 1 s_1 + 2 s_2 + \ldots + k s_k, \quad s_k$$

où $s_1, s_2, \ldots, s_k$ désignent les éléments de quelque système de solutions positives ou nulles de l'équation indéterminée en nombres entiers

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_k = \mathrm{S}.$$

Pour que ces exposants soient égaux précisément à $\mathfrak{f} + k\mu$, μ, il est donc suffisant, mais nécessaire aussi, de faire

$$\mathrm{R} = s_1 = s_2 = \ldots = s_{k-1} = 0, \qquad s_k = \mu,$$

d'où $\mathrm{R} = 0$, $\mathrm{S} = \mu$, c'est-à-dire de prendre le terme unique de la forme voulue

$$\mathrm{A}_{\mathfrak{f},\mu} x^{\mathfrak{f}+k\mu}\upsilon_k^{\mu}$$

qui existe dans le développement de l'expression (16)

$$\text{pour } \mathrm{R} = 0, \qquad \mathrm{S} = \mu.$$

Pour certaines valeurs de μ, ce terme peut avoir un coefficient nul; mais il est effectif quel que soit k pour $\mu = \mathfrak{g}$, car alors son coefficient $\mathrm{A}_{\mathfrak{f},\mathfrak{g}}$ est celui même du terme principal de $f(x, u)$ qui est essentiellement non $= 0$. Étant unique de son espèce, il ne peut être détruit par aucune réduction ultérieure, et il subsiste ainsi comme terme effectif dans la série (11), ce qui donne évidemment

$$\mathfrak{f}_k \leqq \quad + k\mathfrak{g}.$$

La relation (17) donne d'ailleurs

$$\mathfrak{d}_k \leqq \frac{\mathfrak{f}_k - \mathfrak{f}}{k},$$

inégalité qu'il suffit de combiner avec la précédente pour trouver celle que nous voulons établir (24).

Plus généralement on a, quel que soit $p (> 0)$,

$$(25) \qquad \mathfrak{m}_k \geqq \mathfrak{d}_{k+p}.$$

Si la substitution

$$(26) \qquad v_k = a_k + u_k$$

transforme la série (11) entière par rapport à x, v_k, en cette autre de même nature relativement à x, u_k

$$(27) \qquad \mathfrak{f}_k(x, u_k) = x^{\mathfrak{f}_k}[\mathrm{P}_k(u_k) + x\mathrm{T}_k(x, u_k)],$$

on aura évidemment

$$\mathrm{P}_k(u_k) = \Pi_k(a_k + u_k)$$

et avec cela

$$(28) \qquad \left\{ \begin{aligned} & x^{\mathfrak{f}_{k+p}}[\Pi_{k+p}(v_{k+p}) + x\Theta_{k+p}(x, v_{k+p})] \\ & \quad = f_{k+p}(x, v_{k+p}) \\ & \quad = f(x, a_1 x + \ldots + a_{k+p-1}x^{k+p-1} + v_{k+p}x^{k+p}) \\ & \quad = \mathfrak{f}_k(x, a_{k+1}x + \ldots + a_{k+p-1}x^{p-1} + v_{k+p}x^{k+p}), \end{aligned} \right.$$

parce que la substitution

$$(29) \qquad u = a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots + a_{k+p-1}x^{k+p-1} + v_{k+p}x^{k+p}$$

peut être considérée comme composée de (12), de (26) et de

$$(30) \qquad u_k = a_{k+1}x + \ldots + a_{k+p-1}x^{p-1} + v_{k+p}x^{p}.$$

En outre $\mathfrak{m}_k$ degré de multiplicité de a_k considéré comme racine de l'équation (13) est l'exposant de la plus haute puissance de $v_k - a_k$ qui divise $\Pi_k(v_k)$, celui par conséquent de la plus haute puissance de u_k qui divise $\mathrm{P}_k(u_k) = \Pi_k(a_k + u_k)$, c'est-à-dire ce que nous avons appelé le grade (par rapport à u_k) de la série (27).

Maintenant la relation à démontrer (25) n'est plus autre chose

que la relation (24) appliquée à la série (28) $f_{k+p}(x, \upsilon_{k+p})$ déduite de $\mathfrak{f}_k(x, u_k)$ par la substitution (30) exactement comme $f_k(x, \upsilon_k)$ l'avait été de $f(x, u)$ par la substitution (12).

Cela posé, la première des inégalités (21) est la relation (24) pour $k = 1$; les autres de rangs impairs se déduisent de la relation (25) en y prenant $p = 1$, puis y faisant successivement $k = 1$, $2, \ldots$; celles enfin de rangs pairs sont toutes contenues dans la relation (23).

II. Supposons d'abord que l'on ait indéfiniment

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{m}_2 = \ldots = m, \tag{31}$$

cas auquel les premiers membres des équations numériques (20) prennent tous les formes simples

$$\varpi_1(\upsilon_1 - a_1)^m, \quad \varpi_2(\upsilon_2 - a_2)^m, \quad \ldots, \quad \varpi_k(\upsilon_k - a_k)^m, \quad \ldots,$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ représentant certaines constantes (non nulles). Supposons en outre, pour plus de simplicité, que la série $x^{\mathfrak{f}}\mathrm{D}(u)$ se réduise au terme principal de $f(x, u)$, que nous représenterons maintenant par $\varpi x^{\mathfrak{f}} u^m$, en sorte que l'on ait [formule (2)]

$$f(x, u) = x^{\mathfrak{f}}[\varpi u^m + x\mathrm{E}(x, u)].$$

De la relation générale évidente

$$\begin{aligned}&\frac{d^i}{d\upsilon_k^i}\mathfrak{F}(x, a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k)\\ &\quad = x^{ik}\mathfrak{F}^{(0,i)}(x, a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k)\end{aligned}$$

où l'on a représenté par $\mathfrak{F}(x, u)$, i une fonction olotrope et un indice de différentiation quelconques, on déduit ici en particulier

$$\left\{\begin{aligned}&f^{(0,i)}(x, a_1 x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1} + \upsilon_k x^k) = x^{-ik}\frac{d^i}{d\upsilon_k^i}f_k(x, \upsilon_k)\\ &\quad = x^{\mathfrak{f}_k - ik}\Big[m(m-1)\ldots(m-i+1)\varpi_k(\upsilon_k - a_k)^{m-i}\\ &\qquad\qquad + x\frac{d^i}{d\upsilon_k^i}\theta_k(x, \upsilon_k)\Big].\end{aligned}\right. \tag{32}$$

En y faisant $i = 1, 2, \ldots, m-1$, cette relation montre que pour chacune des dérivées

$$f^{(0,1)}(x, u), \quad f^{(0,2)}(x, u), \quad \ldots, \quad f^{(0,m-1)}(x, u),$$

la suite (19) jouit exactement des propriétés admises pour $f(x, u)$ dans la seconde partie de notre énoncé, à cela près que la valeur invariable des entiers (31) s'abaisse à

$$m-1, \quad (m-2), \quad \ldots, \quad 1$$

respectivement.

Ceci a lieu en particulier pour la dernière

$$f^{(0,m-1)}(x, u) = x^{\mathfrak{t}}[m(m-1)\ldots 2.\varpi u + x\mathrm{E}^{(0,m-1)}(x, u)];$$

comme elle n'est plus que de grade 1, l'équation obtenue en l'égalant à zéro possède une seule racine olotrope en $x = 0$ (**131**), et le développement de cette racine ne peut être que la série (22). Effectivement le théorème du n° **135** montre que les coefficients de ce développement satisfont nécessairement et respectivement aux équations linéaires

$$m(m-1)\ldots 2.\varpi_1(\upsilon_1 - a_1) = m(m-1)\ldots 2.\varpi_2(\upsilon_2 - a_2) = \ldots = 0.$$

Cette série (22), qui représente ainsi une fonction olotrope en $x = 0$, admet donc bien quelque rayon de convergence > 0.

En supposant maintenant que υ_k soit remplacé par

$$a_k + a_{k+1}x + \ldots,$$

quotient de la division par x^k de l'excès de la somme de la série (22) sur la somme de ses $k-1$ premiers termes, le dernier membre de la relation (32) représente évidemment, à cause de cette relation elle-même, le résultat de la substitution de cette série à u dans $f^{(0,i)}(x, u)$.

L'inégalité (15) appliquée au terme en $x^{\mathfrak{t}_k}\upsilon_k^{\mathfrak{d}_k}$ existant dans le second membre de la relation (11) donne

$$\mathfrak{t}_k \geqq \mathfrak{t} + k\mathfrak{d}_k,$$

et ici à cause de $\mathfrak{d}_k = m$

$$\mathfrak{t}_k \geqq \mathfrak{t} + km,$$

d'où

$$\mathfrak{t}_k - ik \geqq \mathfrak{t} + k(m-i).$$

D'autre part, $\upsilon_k - a_k$ étant maintenant une série entière sans terme constant, le second facteur de l'expression (32) en est certainement une dont tous les termes effectifs contiennent en fac-

teur une puissance de x d'exposant au moins $= 1$, si toutefois i est $< m$. Dans cette même hypothèse, $k(m - i)$ est au moins égal à k, et l'expression dont il s'agit est une série entière en x dont tous les termes sont divisibles par $x^{\mathfrak{f}+k+1}$ au moins, dans laquelle, par suite, les coefficients des puissances de x ayant des exposants inférieurs à $\mathfrak{f} + k + 1$ s'évanouissent certainement. Tous les coefficients de cette série sont donc nuls, puisque l'entier k est arbitraire. En d'autres termes, la substitution

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

annule identiquement $f(x, u)$ et ses $m - 1$ premières dérivées par rapport à u.

Mais si $i = m$, le second facteur de la même expression (32) devient la série

$$1.2\dots m\varpi_k + x \frac{d^m}{dv_k^m} \Theta_k(x, v_k)$$

dont le terme constant ne peut être nul et la substitution dont il s'agit ne peut annuler identiquement $f^{(0,m)}(x, u)$. L'équation proposée (1) admet donc bien la racine (22) au degré de multiplicité m.

III. Supposons enfin que les termes de la suite (21) soient égaux à m, seulement à partir de $\mathfrak{m}_k$ inclusivement, et, de même que pour établir l'inégalité (25), transformons $f(x, u)$ en $\mathfrak{f}_k(x, u_k)$, par la substitution

$$u = a_1 x + \dots + a_{k-1} x^{k-1} + (a_k + u_k) x^k,$$

composée de (12) et de (26). Le grade de $\mathfrak{f}_k(x, u_k)$ étant précisément $\mathfrak{m}_k$ comme nous l'avons constaté à cette occasion, le polynome $P_k(u_k)$ se réduit à quelque monome effectif tel que $p_k u_k^m$, parce que son degré effectif $\mathfrak{d}_k$ et son grade $\mathfrak{m}_k$ sont tous deux supposés $= m$, d'où

$$\mathfrak{f}_k(x, u_k) = x^{\mathfrak{f}_k}[p_k u_k^m + x T_k(x, u_k)].$$

En outre, les suites

$$a_{k+1}, \quad a_{k+2}, \quad \dots,$$

$$\mathfrak{m}_k = \mathfrak{d}_k = \mathfrak{m}_{k+1} = \mathfrak{d}_{k+1} = \dots = m$$

jouissent évidemment, par rapport à cette fonction, des mêmes propriétés exactement que celles attribuées ci-dessus (II) aux suites analogues (19), (31) relativement à $f(x, u)$. L'équation

$$\mathfrak{f}_k(x, u_k) = 0$$

admet donc au degré m de multiplicité, la racine olotrope

$$(33) \qquad u_k = a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \ldots.$$

Mais, en raisonnant comme nous l'avons fait pour obtenir la relation (32), on trouvera

$$\begin{aligned} f^{(0,i)}(x, a_1 x + a_2 x^2 + \ldots &= f^{(0,i)}(x, a_1 x + \ldots + a_k x^k + u^k x^k) \\ &= x^{-ik}\mathfrak{f}_k^{(0,i)}(x, u_k) = 0, \qquad \text{ou} \qquad \neq 0, \end{aligned}$$

selon que i est $< m$ ou $= m$. La série (22) est donc bien encore racine multiple de degré m de l'équation proposée (1), ce qui généralise complètement l'exactitude de la dernière partie de notre énoncé.

137. Ces diverses propositions ramènent évidemment la recherche des racines olotropes distinctes de l'équation (1), la supputation de leurs degrés de multiplicité, au calcul de toutes les suites pouvant jouir des propriétés supposées à la suite (19) dans la dernière partie de l'énoncé du théorème précédent. On procédera comme il suit.

I. La substitution

$$u = \upsilon_1 x$$

conduit à l'équation (entière)

$$\Pi_1(\upsilon_1) = 0,$$

dont la résolution (**16**) fournit les seules quantités pouvant être prises pour premier terme de la suite (19).

Si son degré $\mathfrak{d}_1$ se réduit à zéro, elle n'a point de racine, et, par suite, l'équation proposée (1) n'a aucune racine olotrope (**135**).

Sinon, on prendra l'une quelconque a_1 de ses racines, et la substitution suivante

$$u = a_1 x + \upsilon_2 x^2$$

fournira l'équation

$$\Pi_2(\upsilon_2) = 0$$

à résoudre pour avoir les seconds coefficients des développements des racines olotropes qui peuvent commencer par $a_1 x$.

Si cette nouvelle équation a encore quelque racine a_2, on cherchera a_3 parmi celles de l'équation

$$\Pi_3(\upsilon_3) = 0,$$

déduite de la substitution

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + \upsilon_3 x^3,$$

et ainsi de suite, les coefficients déjà obtenus fournissant toujours les données nécessaires au calcul du suivant.

Si le degré $\mathfrak{d}$ diminue jusqu'à zéro, l'opération ne peut être poursuivie, et l'équation proposée (1) n'a aucune racine (olotrope) dont le développement commence par les termes obtenus jusqu'à ce moment (**135**).

Si, pour l'équation $\Pi_k = 0$ et les suivantes, il finit par conserver la valeur constante $m > 0$, les équations subséquentes de la suite (20) n'auront plus jamais qu'une seule racine de degré de multiplicité m. Pour poursuivre le développement de la racine olotrope de même degré de multiplicité m, qui alors (**136**, III) appartient à l'équation (1), on aura avantage à en tirer le reste de l'équation bien plus simple obtenue en différentiant $m - 1$ fois par rapport à u_k (**136**, II) l'équation

$$\mathfrak{f}_k(x, u_k) = f_k(x, a_k + u_k) = 0,$$

qui admet m fois aussi la racine (33), comme nous l'avons constaté incidemment ci-dessus.

II. L'exécution de la substitution générale (12) se simplifie dans une mesure considérable, quand on utilise les résultats, alors connus, des substitutions antérieures.

Comme nous en avons déjà fait implicitement la remarque, la substitution (29) est composée de (12) et de

$$(34) \qquad \upsilon_k = a_k + a_{k+1} x + \ldots + a_{k+p-1} x^{p-1} + \upsilon_{k+p} x^p,$$

et l'on a évidemment

$$x^{\mathfrak{l}_{k+p}}[\Pi_{k+p}(\upsilon_{k+p})+x\Theta_{k+p}(x,\ \upsilon_{k+p})]$$
$$= x^{\mathfrak{l}_k}[\Pi_k(a_k+a_{k+1}x+\ldots+\upsilon_{k+p}x^p)+x\Theta_k(x,\ a_k+\ldots+\upsilon_{k+p}x^p)].$$

Pour former la $(k+p)^{\text{ième}}$ équation (20), il suffit donc (en négligeant le facteur insignifiant $x^{\mathfrak{l}_k}$) d'opérer simplement la substitution (34) dans

(35) $$\Pi_k(\upsilon_k)+x\Theta_k(x,\ \upsilon_k),$$

et d'égaler à zéro le coefficient de la moindre puissance de x subsistant dans le développement du résultat, réduit, puis ordonné par rapport à cette variable.

Le fractionnement de l'opération donne évidemment tous ses avantages, quand on le pousse à l'extrême en rendant indécomposables les substitutions (34), c'est-à-dire quand on prend toujours $p=1$. Alors et pour toute valeur de k, l'équation $\Pi_{k+1}(\upsilon_{k+1})=0$ se tire du résultat, traité comme nous venons de l'expliquer, de la simple substitution linéaire

$$\upsilon_k = a_k+\upsilon_{k+1}x,$$

faite dans la série (35).

III. Pour obtenir la *totalité* des racines olotropes de l'équation (1), il suffit d'employer à la formation de suites analogues à (19), *toutes* les racines des équations numériques (20) (16), disposées dans un ordre de succession convenable. Une image matérielle fera peut-être mieux saisir la marche générale et les résultats de cette opération.

Prenons $\mathfrak{g}$ rubans de même largeur, illimités dans les deux sens et indéfiniment divisés, dans leur longueur, par des traits transversaux, en des segments tous d'une même longueur quelconque; empilons-les, tendus en ligne droite, face sur face, lisière sur lisière, trait sur trait, maintenons-les par une ligature serrée au niveau d'un trait, et rejetons tout ce que détache de la liasse une section générale opérée à gauche et tout près du lien. Sur chacun d'eux inscrivons la quantité o entre ce lien et le premier trait à sa droite, puis pratiquons une deuxième ligature au niveau de tous ces premiers traits.

Ceci fait, considérons la première équation (20) de degré $\mathfrak{d}_1$. Si $\mathfrak{d}_1$ est $< \mathfrak{g}$, nous commencerons par couper $\mathfrak{g} - \mathfrak{d}_1$ rubans entre la dernière ligature et leurs premiers traits à sa droite, pour rejeter définitivement de la liasse tout ce que ces coupures en ont détaché. En appelant ensuite $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(g_1)}$ et $m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \ldots, m_1^{(g_1)}$ les racines numériquement distinctes de cette équation et leurs degrés de multiplicité, nous diviserons le surplus de la liasse en g_1 liasses partielles composées respectivement de $m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, \ldots$ et $m_1^{(g_1)}$ rubans infinis vers la droite; nous inscrirons la quantité $a_1^{(1)}$ sur chacun des m_1 rubans de la première, entre la dernière ligature et les premiers traits à sa droite, puis nous la consoliderons par une nouvelle ligature couvrant tous ces nouveaux traits, et nous ferons de même pour chacun des $g_1 - 1$ autres liasses partielles, à cela près qu'au lieu de $a_1^{(1)}$ les premiers segments de leurs rubans porteront les inscriptions $a_1^{(2)}$ dans la seconde, $a_1^{(3)}$ dans la troisième, et ainsi de suite.

La racine $a_1^{(1)}$ conduira, par la substitution $\upsilon_1 = a_1^{(1)} + \upsilon_2^{(1)}$, à l'équation ${}^{(1)}\Pi_2(\upsilon_2^{(1)}) = 0$ au moyen de laquelle on coupera, marquera et ligaturera en sous-liasses tous les rubans de la première liasse partielle, exactement comme nous l'avons indiqué pour la liasse totale. On procédera de même pour la seconde liasse partielle au moyen de l'équation ${}^{(2)}\Pi_2(\upsilon_2^{(2)}) = 0$ provenant de la substitution $\upsilon_1 = a_1^{(2)} + \upsilon_2^{(2)}$, pour la troisième, ... et ainsi de suite en recommençant indéfiniment pour ces sous-liasses, pour celles provenant de leur division, pour les faisceaux suivants, etc., ce que nous avons fait pour la liasse totale après la seconde ligature.

Si tôt ou tard les rubans arrivent à être tous coupés, l'équation proposée (1) n'a aucune racine olotrope. Sinon, chaque liasse partielle saisie à droite de la première ligature au delà de laquelle il n'y a plus à en subdiviser ni à en couper les rubans, détachée de la liasse générale et débarrassée des rubans coupés qui peuvent s'y trouver mêlés, correspondra à une racine de l'équation (1) : le nombre des rubans de longueurs infinies qui la composent marque le degré de multiplicité de cette racine, et les coefficients du développement de celle-ci se trouvent écrits sur chacun d'eux dans leur ordre de succession naturel. Les développements de racines fournies par des liasses partielles différentes peuvent avoir les mêmes coefficients jusqu'à tels ou tels termes; mais on finit tou-

jours par y rencontrer des coefficients de mêmes rangs qui sont inégaux, et les racines ne sont jamais identiques.

138. Dans les développements des diverses racines olotropes de l'équation (1), les termes à coefficients nuls ne comptent pour rien au point de vue numérique, et il y a un intérêt évident à opérer de manière à n'obtenir que les termes *effectifs* de ces développements, à éviter ainsi dans chacun d'eux les substitutions souvent nombreuses et pour ainsi dire sans objet que la méthode générale impose pour passer de chaque terme effectif au suivant.

On remarquera d'abord que *l'existence d'une racine dont le développement ne contient aucun terme effectif, c'est-à-dire de la racine $u = 0$ (quelle que soit x), est indiquée par celle de quelque puissance de u divisant tous les termes effectifs de $f(x, u)$, et que son degré de multiplicité est précisément l'exposant maximum d'une pareille puissance.*

On réussit à calculer exclusivement et successivement les termes effectifs des développements des autres racines par le procédé suivant qui comporte naturellement la détermination simultanée de leurs degrés. Cette méthode est très expéditive pour *séparer* les racines de l'équation (1), c'est-à-dire pour arriver aux premiers termes de leurs développements dont les coefficients ne sont pas égaux, opération importante à laquelle se limitent dans la pratique les calculs indéfinis expliqués ci-dessus; de plus, elle nous rendra bientôt un service théorique des plus importants (**141**, *inf.*).

Appelons k_1 le degré inconnu du premier terme effectif du développement de la racine (22) que la suppression des termes précédents à coefficients nuls réduit ainsi à

$$a_{k_1} x^{k_1} + \ldots,$$

où a_{k_1} est essentiellement différent de 0. Comme on a par hypothèse $a_1 = a_2 = \ldots = a_{k_1 - 1} = 0$, la substitution correspondante (12), se réduisant à

$$u = \upsilon_{k_1} x^{k_1},$$

est d'une exécution directe aussi facile que si k_1 était $= 1$, à cela près que cet exposant est inconnu. Le premier membre de notre

équation (1) devient ainsi

(36) $$f(x, \upsilon_{k_1} x^{k_1}) = x^{t_{k_1}}[\Pi_{k_1}(\upsilon_{k_1}) + x\theta_{k_1}(x, \upsilon_{k_1})],$$

et l'entier k_1, ainsi que le polynome $\Pi_{k_1}(\upsilon_{k_1})$ réduit à ses termes effectifs, sont caractérisés par ces trois particularités essentielles qui suffisent à leur détermination : 1° à cause de la nature monome de la substitution, *ce polynome a pour coefficients ceux mêmes de certains termes effectifs de la série $f(x, u)$*; 2° puisqu'il s'évanouit pour $\upsilon_{k_1} = a_{k_1}$, quantité essentiellement supposée non $= 0$, *il contient au moins deux termes effectifs*; 3° $x^{t_{k_1}}\Pi_{k_1}(\upsilon_{k_1})$ *est l'ensemble des termes effectifs de moindre degré commun en x (en nombre $\overline{\gtrless} 2$) dans l'expression* (36) *ordonnée par rapport à x.*

Soient

(37) $$A_{r',s'}x^{r'}u^{s'}, \quad A_{r'',s''}x^{r''}u^{s''}$$

deux termes effectifs (dissemblables) de $f(x, u)$, donnant dans la série (36) les termes de degrés égaux en x

$$A_{r',s'}x^{r'+k_1 s'}\upsilon_{k_1}^{s'}, \quad A_{r'',s''}x^{r''+k_1 s''}\upsilon_{k_1}^{s''},$$

cas auquel, en appelant τ la valeur commune de ces degrés, on a

(38) $$\begin{cases} r' + k_1 s' = \tau, \\ r'' + k_1 s'' = \tau; \end{cases}$$

soit encore

(39) $$A_{r,s}x^r u^s,$$

quelque autre terme effectif de $f(x, u)$ en donnant un dans la série (36), dont

(40) $$r + k_1 s = \theta$$

est le degré par rapport à x.

Les équations (38) conduisent d'abord à

$$r's'' - r''s' = -\tau(s' - s''), \qquad k_1(r's'' - r''s') = \tau(r' - r''),$$

d'où

(41) $$r's'' - r''s' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r' & s' \\ 1 & r'' & s'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

parce qu'on ne peut avoir ni $s' - s'' = r' - r'' = 0$, à cause de la dissemblance des termes (37), ni $\tau = 0$. Combinées avec l'équation (40), elles donnent facilement ensuite

$$(42)\qquad (\tau - \theta)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r' & s' \\ 1 & r'' & s'' \end{vmatrix} = \tau \begin{vmatrix} 1 & r & s \\ 1 & r' & s' \\ 1 & r'' & s'' \end{vmatrix},$$

en vertu de quoi la différence $\tau - \theta$ est nulle, négative ou positive, selon que le second déterminant est nul, de signe contraire ou identique à celui du premier.

Pour que les termes (37) fournissent à quelque polynome de la nature de $\Pi_{k_1}(v_{k_1})$ les termes

$$A_{r',s'}v_{k_1}^{s'},\quad A_{r'',s''}v_{k_1}^{s''},$$

il faut donc que *le déterminant* (41) *ne soit pas nul, puis que pour tout autre terme* (39) *on ait* $\theta \geqq \tau$, *c'est-à-dire que le second des déterminants de la relation* (42) *soit de signe contraire au premier, ou bien encore nul, cas auquel* $A_{r,s}v_{k_1}^{s}$ *est aussi un terme du même polynome.*

Les termes de coefficients $A_{r',s'}$, $A_{r'',s''}$, $A_{r''',s'''}$, ... qui peuvent appartenir à un même polynome de cette espèce ayant été tous découverts ainsi, les équations (38) et analogues donnent ensuite

$$(43)\qquad k_1 = -\frac{r''-r'}{s''-s'} = -\frac{r'''-r'}{s'''-s'} = \ldots = -\frac{r'''-r''}{s'''-s''} = \ldots,$$

et il faut en outre que *cette valeur de* k_1 *soit un entier positif.*

Ces trois conditions sont évidemment suffisantes et permettent d'abord d'obtenir les valeurs dont l'exposant k_1 est susceptible pour les diverses racines de l'équation proposée (1), puis de former pour chacune d'elles l'équation numérique

$$(44)\qquad \Pi_{k_1}(v_{k_1}) = 0,$$

dont les racines non nulles sont seules à garder, aux mêmes degrés de multiplicité, comme valeurs possibles de a_{k_1}.

Pour obtenir ensuite le second terme effectif de quelque racine olotrope

$$(45)\qquad a_{k_1}x^{k_1} + a_{k_2}x^{k_2} + \ldots,$$

dont le premier a été ainsi calculé, il suffit de chercher, comme nous venons de l'expliquer, le premier terme effectif d'une racine olotrope infiniment petite u_{k_1} de l'équation

$$(45\,bis) \qquad f(x,\ a_{k_1}x^{k_1}+u_{k_1})=0,$$

qui est de même nature que la proposée (1), ou bien, ce qui revient au même, de poser

$$v_{k_1}=a_{k_1}+v_{k_2}x^{k_2-k_1},$$

dans la série (36), puis d'y opérer, relativement à k_2, x, v_{k_2}, exactement comme nous venons de le faire relativement à k_1, x, v_{k_1}.

Du second terme effectif du développement (45), on passe au troisième par les mêmes moyens, et ainsi de suite.

La découverte d'une racine secondaire u_{k_i} identiquement nulle, de degré de multiplicité m, indiquera que le développement commencé n'a plus de termes effectifs postérieurs à $a_{k_i}x^{k_i}$, c'est-à-dire que la racine olotrope correspondante de l'équation (1) se réduit au polynome entier

$$a_{k_1}x^{k_1}+a_{k_2}x^{k_2}+\ldots+a_{k_i}x^{k_i},$$

avec le même degré de multiplicité m.

Les équations numériques (44) et subséquentes que ce procédé permet d'enchaîner les unes aux autres coïncident d'ailleurs avec celles de la méthode générale, *dépouillées de leurs racines nulles*, et les conséquences à tirer de leur discussion sont exactement celles du n° **137**.

139. La formation des équations numériques analogues à (44) (et de toutes celles subséquentes enchaînées avec elles dans une suite plus ou moins ramifiée) est singulièrement facilitée par le manuel graphique ci-après expliqué. Il a pour base la représentation préalable des paires d'exposants

$$(46) \qquad \ldots,\ (r,\ s),\ \ldots$$

de tous les termes effectifs de $f(x,\ u)$ [puis ultérieurement de $f(x,\ a_{k_1}x^{k_1}+u_{k_1})$, ..., nouvelles séries entières en x, u_{k_1}, ...], par des points ayant respectivement les premiers et seconds éléments de ces diverses paires, pour abscisses et ordonnées dans un

système de coordonnées rectilignes planes dont, pour fixer les idées, nous supposerons les axes, le premier horizontal, le second vertical. Comme ces exposants ne sont jamais négatifs, tous ces points ou *jalons* tombent nécessairement sur les parties positives des axes et dans leur angle. Pour $f(x, u)$ aucun d'eux ne peut se trouver à l'origine, parce que cette première série est supposée ne point avoir de terme constant.

Considérons maintenant la droite $\mathfrak{D}$ menée par deux jalons (r', s'), (r'', s'') représentant des termes de $f(x, u)$, propres à en fournir deux correspondants dans une équation du genre de (44). La première condition analytique à laquelle sont assujettis ces exposants, la non-nullité du déterminant (41), impose à la droite $\mathfrak{D}$ la condition géométrique *de ne pas passer par l'origine*. La deuxième impose à la même droite celle *de contenir tout jalon* (r, s) *correspondant à quelque autre terme de la même équation numérique et de partager le plan des axes en deux demi-plans contenant le premier l'origine, le second la totalité des autres jalons*. Car, en appelant r, s les coordonnées courantes, l'équation

$$\begin{vmatrix} 1 & r & s \\ 1 & r' & s' \\ 1 & r'' & s'' \end{vmatrix} = 0$$

représente précisément la droite $\mathfrak{D}$, et 1° le jalon (r, s) est situé sur elle quand le second des déterminants (42) est nul, 2° il tombe ou non par rapport à elle du même côté que l'origine, selon que les signes de ces deux déterminants sont identiques ou opposés. Quant à la troisième condition, elle impose d'abord à la même droite celle d'*avoir sa parallèle par l'origine dirigée à l'intérieur des angles des axes opposés au sommet, où les coordonnées d'un même point sont toujours de signes contraires*.

Il en résulte que toutes les droites $\mathfrak{D}$ ne peuvent se trouver que parmi les l droites $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{D}_l$ dont nous allons assigner les positions. Appelant s_0 la plus faible valeur de s dans les couples (46) et r_0 la plus faible valeur de r dans ceux où $s = s_0$, nous tracerons d'abord par le jalon (r_0, s_0) une droite horizontale $\mathfrak{D}_0$ qui évidemment ne laissera aucun jalon au-dessous d'elle, et n'en contiendra point à gauche de celui-ci ; puis nous la ferons tourner autour de

ce même jalon, d'une manière continue et dans le sens rétrograde, jusqu'à sa première position $\mathfrak{D}_1$ où, sans avoir été verticale, elle passe par un autre jalon au moins ou bien par plusieurs, le cas échéant (tous d'abscisses inférieures à r_0, d'ordonnées supérieures à s_0). Nous appellerons

$$(r_0, s_0),\quad (r'_0, s'_0),\quad (r''_0, s''_0),\quad \ldots,\quad (r_1, s_1)$$

la totalité des jalons qui tombent alors sur $\mathfrak{D}_1$, écrits dans l'ordre où l'on a $r_0 > r'_0 > r''_0 > \ldots > r_1$, et aussi par suite, à cause de la direction de cette droite, $s_0 < s'_0 < s''_0 < \ldots < s_1$. Nous lui ferons poursuivre ce même mouvement de rotation autour de (r_1, s_1) pris ensuite pour pivot, jusqu'à une nouvelle position $\mathfrak{D}_2$ où, toujours sans avoir passé par la direction verticale et sans avoir franchi aucun jalon, elle en contiendra deux ou plus que nous écrirons dans un ordre analogue

$$(r_1, s_1),\quad (r'_1, s'_1),\quad \ldots\quad (r_2, s_2),$$

puis de même en prenant pour pivot (r_2, s_2), puis (r_3, s_3), et ainsi de suite jusqu'à une dernière position $\mathfrak{D}_l$ contenant les jalons

$$(r_{l-1}, s_{l-1}),\quad (r'_{l-1}, s'_{l-1}),\quad \ldots,\quad (r_l = \mathfrak{f},\ s_l = \mathfrak{g}),$$

et au delà de laquelle une nouvelle rotation rétrograde autour de $(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$ ne pourrait l'amener à passer par un nouveau jalon sans lui faire atteindre ou franchir la direction verticale.

Les droites $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_2$, ..., $\mathfrak{D}_l$, contenant respectivement les groupes de jalons

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{llll} (r_0, s_0), & (r'_0, s'_0), & (r''_0, s''_0), \ \ldots, & (r_1, s_1), \\ (r_1, s_1), & (r'_1, s'_1), & \ldots\ldots\ldots\ldots, & (r_2, s_2), \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\ (r_{l-1}, s_{l-1}), & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, & (\mathfrak{f}, \mathfrak{g}), \end{array}\right.$$

et réduites aux segments compris entre leurs jalons extrêmes, forment ainsi une *enceinte* partielle à l'ensemble de tous les jalons (46), ou *graphique* de l'équation proposée (1), dont tous les côtés sont obliques à l'axe horizontal des coordonnées, en donnant des valeurs essentiellement positives à la quantité k_1 définie par les formules (43).

Mais on ne retiendra comme *utiles,* c'est-à-dire indiquant des groupes de termes de $f(x, u)$ qui conduisent à des équations numériques du genre de (44), que ceux donnant à k_1 des valeurs entières. Le côté $\mathfrak{D}_i$ sera utile ou non, selon que la valeur commune des fractions positives

$$(48)\quad \left\{ \begin{aligned} -\frac{r'_{i-1}-r_{i-1}}{s'_{i-1}-s_{i-1}} &= -\frac{r''_{i-1}-r_{i-1}}{s''_{i-1}-s_{i-1}} = \ldots = -\frac{r_i-r_{i-1}}{s_i-s_{i-1}} \\ &= -\frac{r''_{i-1}-r'_{i-1}}{s''_{i-1}-s'_{i-1}} = \ldots = -\frac{r_i-r'_{i-1}}{s_i-s'_{i-1}} = \ldots \end{aligned} \right.$$

sera ou non un nombre entier k_1. Dans le premier cas, l'équation numérique correspondante se réduit à

$$(49)\quad A_{r_i,s_i} v_{k_1}^{s_i-s_{i-1}} + \ldots + A_{r''_{i-1},s''_{i-1}} v_{k_1}^{s''_{i-1}-s_{i-1}} + A_{r'_{i-1},s'_{i-1}} v_{k_1}^{s'_{i-1}-s_{i-1}} + A_{r_{i-1},s_{i-1}} = 0,$$

après suppression des racines nulles.

Le nombre et les positions des côtés utiles sont entièrement subordonnés aux circonstances numériques de la question. Nous y adjoindrons la droite *horizontale* $\mathfrak{D}_0$ qui allonge l'enceinte en deçà, quand elle laissera l'origine au-dessous d'elle; car alors s_0 est > 0, u^{s_0} est la puissance de u d'exposant maximum qui divise tous les termes effectifs de $f(x, u)$, et l'équation proposée (1) possède la racine $u = 0$ (quelle que soit x), au degré de multiplicité s_0 marqué précisément par la hauteur de $\mathfrak{D}_0$ au-dessus de l'axe horizontal.

De nouveaux graphiques construits suivant les mêmes règles pour les séries subséquentes $f(x, a_{k_1}x^{k_1} + u_{k_1})$, ... permettront de prolonger aussi loin que possible, par des termes effectifs, les développements commencés antérieurement, et aussi de découvrir par la survenue de côtés horizontaux utiles, l'existence de racines secondaires identiquement nulles réduisant à des polynomes entiers certaines racines olotropes de l'équation proposée (1).

140. *Si la somme des degrés de multiplicité des racines olotropes inégales dont nous venons d'expliquer le calcul est égale au grade de $f(x, u)$, l'équation (1) n'a plus aucune autre racine (olotrope ou non).*

En représentant par les notations (6), (5) les racines dont il s'agit et leurs degrés de multiplicité, l'égalité supposée

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_g = \mathfrak{g}$$

entraîne ${}^{(g)}\mathfrak{g} = 0$ à cause de la relation (9); par suite (130), l'équation

$${}^{(g)}f(x, u) = 0 \quad (133)$$

ne possède aucune racine. On ne peut donc satisfaire à l'équation (1) autrement qu'en annulant identiquement l'un ou l'autre des g premiers facteurs du second membre de l'identité (7), c'est-à-dire qu'en prenant u égale à l'une ou l'autre des fonctions olotropes (6).

Mais, quand cette somme est inférieure à $\mathfrak{g}$, l'équation (1) possède des racines non olotropes (en $x = 0$) dont nous allons maintenant nous occuper.

Racines non olotropes.

141. Nous conserverons dans ce paragraphe les notations du précédent dont nous suivrons aussi le numérotage, et nous établirons d'abord ce théorème fondamental :

En appelant $\mathfrak{r}$ *une nouvelle variable indépendante, on peut assigner un entier positif* $\mathfrak{n}$ *tel, que l'équation*

$$(50) \qquad f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u) = 0,$$

de même nature et de même grade $\mathfrak{g}$ (> 0) *que l'équation proposée* (1), *ait des racines, fonctions de* $\mathfrak{r}$, *olotropes et nulles en* $\mathfrak{r} = 0$, *dont la somme des degrés de multiplicité reproduise précisément le nombre* $\mathfrak{g}$.

I. La multiplication par quelque entier positif n, de tous les nombres r exposants de x dans $f(x, u)$, change l'équation (1) en une autre de même nature et de même grade, que nous représenterons par

$$f_{[n]}(x, u) = 0,$$

et elle imprime à tous les jalons du premier graphique (139), des déplacements variés qui sont horizontaux et dirigés de gauche à

droite. Mais tous les jalons qui traçaient primitivement l'enceinte du graphique la tracent encore après sa déformation; car la multiplication, par une quantité positive quelconque, de tous les éléments d'une même colonne de l'un ou l'autre des déterminants (42), ne peut ni changer leurs signes, ni les rendre nuls quand ils ne l'étaient pas; d'ailleurs le côté horizontal a simplement glissé sur lui-même.

Comme les nombres s exposants de u ne varient pas, *tout côté utile de l'enceinte primitive* $[\mathfrak{D}_0\mathfrak{D}_1\ldots\mathfrak{D}_l]$ *reste utile après la déformation de celle-ci;* car, d'une part, la hauteur de $\mathfrak{D}_0$ au-dessus de l'axe horizontal reste la même; d'autre part, la multiplication, par n, des numérateurs de fractions telles que (48), les laisse divisibles par leurs dénominateurs. En outre, *l'équation numérique correspondante* (49) *reste la même quel que soit* n.

Mais il y a plus : *on peut trouver pour* n *une valeur* n' *rendant utile un côté oblique* $\mathfrak{D}_i$ *choisi à volonté dans l'enceinte primitive.* Car, pour amener tous les numérateurs des fractions (48) à être divisibles par leurs dénominateurs, il faut et il suffit évidemment que le nombre n par lequel on les multiplie tous soit un multiple entier quelconque n' de σ_i, dénominateur de la forme réduite $\frac{\rho_i}{\sigma_i}$ de ces mêmes fractions. La valeur minimum de n' est σ_i, c'est-à-dire un entier >1, quand $\mathfrak{D}_i$ n'était pas utile, et 1 quand ce côté l'était déjà.

II. En supposant que l'enceinte du graphique de l'équation proposée (1) ait ainsi un côté oblique devenu utile pour l'équation

$$(51)\qquad f_{[n']}(x, u) = 0,$$

en appelant a_{k_1} une racine de l'équation numérique correspondante (49), nous formerons l'équation subséquente en u_{k_1}

$$(52)\qquad f_{[n']}(x, a_{k_1}x^{k_1} + u_{k_1}) = 0,$$

et si l'enceinte du graphique de celle-ci offre encore quelque côté oblique, on trouvera de même qu'un nouveau multiplicateur convenable $n''(\geqq 1)$ des exposants de x change cette équation en une autre

$$f_{[n'n'']}(x, a_{k_1}x^{n''k_1} + u_{k_1}) = 0$$

ayant un graphique dont l'enceinte contient au moins un côté oblique utile. En d'autres termes, *on pourra pousser jusqu'au second terme effectif inclusivement le développement d'une racine olotrope hypothétique de l'équation*

$$f_{[n'n'']}(x, u) = 0.$$

Si, dans l'enceinte de son graphique, l'équation (52) avait un côté horizontal utile, elle admettrait la racine olotrope $u_{k_1} = 0$ (identiquement); par suite, *l'équation* (51) *aurait la racine olotrope entière* $u = a_{k_1} x^{k_1}$, *à un degré de multiplicité évidemment égal à celui de* a_{k_1} *considérée comme racine de l'équation numérique dont la résolution a fourni ce coefficient* (**136**, I, *in fine*).

III. Le même raisonnement recommencé indéfiniment pour les équations subséquentes en u_{k_2}, u_{k_3}, ... conduit à cette conclusion évidente : *on peut assigner une suite de multiplicateurs entiers*

$$(53) \qquad n', \quad n'', \quad n''', \quad \ldots,$$

tels que pour un des $\mathfrak{g}$ *rubans choisi à volonté dans la liasse définie au n°* **137**, III, *toute coupure puisse être évitée, ou tout au moins que la première à opérer soit repoussée aussi loin qu'on voudra, par le changement de l'équation proposée en*

$$(54) \qquad f_{[n'n''n'''\ldots]}(x, u) = 0.$$

Le premier cas se présente quand il survient un graphique dont l'enceinte contient un côté horizontal utile auquel on s'arrête; la suite (53) est alors limitée, et le ruban considéré donne pour l'équation (54) une racine olotrope se réduisant à un polynôme entier.

On se trouve dans le second, quand les graphiques successifs à construire contiennent tous dans leur enceinte des côtés obliques que l'on choisit pour prolonger le développement commencé; la suite (53) est alors illimitée.

IV. *Quand l'emploi d'un nouveau multiplicateur* $n^{(j)}$ *de valeur minimum* > 1 *est nécessaire au calcul d'un nouveau*

terme effectif $a_{k_j} x^{k_j}$, *l'équation numérique dont dépend* a_{k_j} *offre au moins deux racines inégales.*

Pour que cette nécessité s'impose dans le calcul de a_{k_1}, il faut que l'on ait choisi, pour opérer, quelque côté oblique $\mathfrak{D}_i$ de l'enceinte $[\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D}_1 \ldots \mathfrak{D}_l]$, donnant lieu à l'inégalité $\sigma_i > 1$. Comme tous les dénominateurs des fractions (48) sont divisibles par σ_i, on a notamment, en appelant $q_i, \ldots, q''_{i-1}, q'_{i-1}$ certains quotients entiers,

$$s_l - s_{l-1} = \sigma_l q_i, \quad \ldots, \quad s''_{i-1} - s_{i-1} = \sigma_l q''_{i-1}, \quad s'_{i-1} - s_{l-1} = \sigma_i q'_{i-1},$$

ce qui permet d'écrire l'équation (49)

$$A_{r_i, s_i} (\upsilon_{k_1}^{\sigma_i})^{q_i} + \ldots + A_{r'_{i-1}, s'_{i-1}} (\upsilon_{k_i}^{\sigma_i})^{q'_{i-1}} + A_{r_{i-1}, s_{i-1}} = 0.$$

Tous les coefficients étant $\neq 0$, les racines le sont toutes aussi; en appelant donc a_{k_1} l'une quelconque d'entre elles et θ quelque racine $\neq 1$ de l'équation binome $\theta^{\sigma_i} = 1$, qui en possède certainement de telles (109), θa_{k_1} quantité $\neq a_{k_1}$ est évidemment une autre racine de l'équation ci-dessus. (On pourrait encore considérer que le premier membre de la même équation ne peut se réduire à une puissance d'aucun binome linéaire en υ_{k_1}, parce que les exposants de cette inconnue dans les termes effectifs n'appartiennent pas à une progression arithmétique de raison $= 1$.)

Le même raisonnement s'applique au calcul de a_{k_2}, ..., car nous avons constaté implicitement dans l'alinéa II, que la poursuite du développement ne comporte jamais que la simple répétition, sur d'autres données, des opérations expliquées pour le calcul de son premier terme effectif.

V. *Quand la suite* (53) *est illimitée et qu'on en réduit tous les termes à leurs valeurs minimums, le nombre de ceux qui sont* > 1 *ne peut surpasser* $\mathfrak{g} - 1$.

1° *Si* $\mathfrak{g} = 1$, *le calcul de* a_{k_1} *n'exige l'intervention d'aucun multiplicateur de valeur minimum* > 1, *et l'équation numérique dont ce coefficient dépend est unique et linéaire.*

Entre les exposants $s_0, s_1, \ldots, s_l (= \mathfrak{g})$ fournis par le tracé de

l'enceinte du premier graphique, on a l'égalité générale évidente

$$s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \ldots + (s_l - s_{l-1}) + \ldots + (\mathfrak{g} - s_{l-1}) = \mathfrak{g}.$$

Si donc $\mathfrak{g} = 1$, l termes du premier membre se réduisent à o et l'autre à 1. Mais s_0 ne peut être celui-ci parce qu'alors tous les autres seraient nuls; le tableau (47) ne contiendrait aucun groupe, et l'équation (51) ne conduirait pas, comme nous le supposons implicitement, à quelque développement commençant par le terme effectif $a_{k_1} x^{k_1}$.

Donc $s_0 = 0$; ce tableau contient un groupe unique, composé seulement de deux paires d'exposants dans lesquelles la différence des valeurs de s se réduit à 1; la suite de fractions égales (48) n'en contient donc qu'une dont le dénominateur est 1, valeur minimum du multiplicateur n' (I).

2° *Même chose a lieu pour le calcul de $a_{k_{j+1}}$, quand a_{k_j} est racine simple de l'équation numérique qui en détermine la valeur, en particulier quand cette équation est linéaire.*

Car le grade par rapport à u_{k_j} de l'équation

$$f_{[n'n''\ldots n^{(j)}]}(x,\ a_{k_1} x^{n^{(j)}\ldots n'''n''k_1} + a_{k_2} x^{n^{(j)}\ldots n'''k_2} + \ldots + a_{k_j} x^{k_j} + u_{k_j}) = 0,$$

toujours égal au degré de multiplicité de a_{k_j} (136, I, *in fine*), se réduit à 1, et $a_{k_{j+1}}$ s'obtient en traitant cette équation par rapport à u_{k_j} comme l'équation proposée (1) l'a été par rapport à u, pour obtenir la valeur de a_{k_1}. On peut alors recommencer le raisonnement ci-dessus (1°).

3° Quand la valeur minima du multiplicateur $n^{(j)}$ est > 1, l'équation qui fournit a_{k_j} a des racines non toutes égales (IV), par suite de degrés de multiplicité tous inférieurs à son degré.

Le degré de l'équation qui donne $a_{k_{j+1}}$ est donc inférieur à celui de la précédente, puisqu'il ne peut surpasser le degré de multiplicité de a_{k_j} (136, I).

Si donc l'emploi d'un pareil multiplicateur s'impose $\mathfrak{g} - 1$ fois, il faut que la première valeur $\mathfrak{d}_{k_1}$ de ce degré qui ne peut surpasser $\mathfrak{g}$ (136, I) soit égale à $\mathfrak{g}$, et que sa valeur pour l'équation numérique venant immédiatement après celle que le $(\mathfrak{g} - 1)^{\text{ième}}$ multiplicateur a permis de former, soit égale à $\mathfrak{g} - (\mathfrak{g} - 1) = 1$. A partir de ce moment, aucun multiplicateur de cette espèce ne devient plus nécessaire (2°).

VI. En supposant les multiplicateurs (53) réduits à leurs valeurs minimums, puis en appelant n_1 leur produit quand leur suite est limitée, ou le produit de ceux > 1 quand elle ne l'est pas (V), le produit $n'n''n'''\ldots$ finit, dans le second cas, par conserver la valeur constante n_1.

Il est donc certain (III) que le changement de l'équation (1) en

$$f_{[n_1]}(x, u) = 0$$

supprime toute coupure dans le ruban choisi, en même temps, par suite, dans tous ceux de la liasse, sur lesquels la multiplicité des racines des équations numériques a pu faire inscrire les mêmes coefficients.

En appelant n_2 un second multiplicateur que l'on trouvera par des calculs semblables, le changement de l'équation (1) en

$$f_{[n_2]}(x, u) = 0$$

laissera intacte quelque liasse partielle d'autres rubans ; et de même avec d'autres multiplicateurs $n_3, \ldots, n_h$, jusqu'à l'épuisement de tous les rubans.

Comme les multiplicateurs $n_1, n_2, \ldots, n_h$ conservent évidemment toutes leurs propriétés quand on les multiplie par des entiers quelconques, les $\mathfrak{g}$ rubans de la liasse resteront tous intacts par le changement de l'équation (1) en

$$f_{[\mathfrak{n}]}(x, u) = 0, \tag{54 bis}$$

$\mathfrak{n}$ désignant un quelconque de leurs multiples communs. Cette dernière, en d'autres termes, possède des racines olotropes dont les degrés de multiplicité ont une somme égale à $\mathfrak{g}$, ce qui achève la démonstration de notre théorème, à cause de l'identité évidente $f_{[\mathfrak{n}]}(\mathfrak{r}, u) = f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u)$.

Si les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_h$ sont les plus petits de ceux qui jouissent des mêmes propriétés, leur plus petit commun multiple sera évidemment la valeur minimum de $\mathfrak{n}$.

VII. On arrive à la même conclusion par un autre raisonnement qu'il n'est pas sans intérêt d'indiquer sommairement.

Comme aux côtés $\mathfrak{O}_0, \mathfrak{O}_1, \ldots, \mathfrak{O}_l$ de la première enceinte,

s'ils sont utiles, correspondent des équations numériques (49) dont la somme des degrés effectifs, égale à

$$s_0 + (s_1 - s_0) + \ldots + (\mathfrak{g} - s_{l-1})$$

d'après le tableau (47), reproduit le grade $\mathfrak{g}$ de l'équation (1), la somme totale des degrés de multiplicité des racines de ces $l+1$ équations est précisément égale à ce même nombre $\mathfrak{g}$ (13).

D'autre part, on constatera facilement que, dans le passage d'un côté utile de cette première enceinte à l'équation subséquente (45 *bis*), le grade de celle-ci (par rapport à u_{k_1}) est précisément égal au degré de multiplicité auquel a_{k_1} avait appartenu, comme racine, à l'équation numérique dont la résolution a fourni ce coefficient; et de même, dans le passage d'un côté utile d'une enceinte ultérieure quelconque, à l'équation transformée subséquente.

Par conséquent, si les enceintes des graphiques successifs ne contiennent jamais que des côtés utiles, il est certain que dans le prolongement opéré simultanément et parallèlement, des développements de toutes les racines de l'équation (1), les coefficients de ces divers développements seront, relativement aux équations numériques qui les fournissent, des racines dont la somme des degrés de multiplicité conserve indéfiniment la valeur $\mathfrak{g}$.

L'utilité de tous les côtés de toutes les enceintes à construire successivement pour l'équation précédente (54 *bis*) ayant été assurée par l'emploi du multiplicateur $\mathfrak{n}$, il est donc certain aussi que cette équation elle-même, l'équation (50) par suite, possèdent des racines olotropes dont la somme des degrés de multiplicité est précisément $\mathfrak{g}$.

142. La proposition précédente doit être complétée par des observations essentielles.

I. *Soient*

(55) $$b_1 t^{p_1} + b_2 t^{p_2} + \ldots$$

le développement (réduit à ses termes effectifs) de quelqu'une des racines de l'équation (50), *m son degré de multiplicité, et* ϖ *le plus grand entier qui divise à la fois* $\mathfrak{n}, p_1, p_2, \ldots$; *posons*

en outre

(55 *bis*) $$\frac{n}{\varpi}=\nu,\quad \frac{p_1}{\varpi}=\varpi_1,\quad \frac{p_2}{\varpi}=\varpi_2,\quad \ldots.$$

et appelons

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_\nu$$

les ν *racines de l'équation binome*

(56) $$\alpha^\nu = 1 \quad (109).$$

Deux quelconques des ν *séries entières*

(57) $$\left\{\begin{array}{l} b_1(\alpha_1 t^{\varpi})^{\varpi_1}+b_2(\alpha_1 t^{\varpi})^{\varpi_2}+\ldots,\\ b_1(\alpha_2 t^{\varpi})^{\varpi_1}+b_2(\alpha_2 t^{\varpi})^{\varpi_2}+\ldots.\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ b_1(\alpha_\nu t^{\varpi})^{\varpi_1}+b_2(\alpha_\nu t^{\varpi})^{\varpi_2}+\ldots,\end{array}\right.$$

[*comprenant* (55)] ***ne sont pas identiques, et, comme*** (55), ***chacune d'elles est une racine multiple de degré*** m ***de l'équation*** (50).

L'identité de celles de ces séries où figurent α_i et α_j $(i \neq j)$ entraînerait effectivement

$$\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)^{\varpi_1}=\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)^{\varpi_2}=\ldots=1=\left(\frac{\alpha_i}{\alpha_j}\right)^{\nu},$$

puisque ces quantités sont deux racines de l'équation binôme (56), d'où, contrairement à l'hypothèse, $\frac{\alpha_i}{\alpha_j}=1$, parce que les entiers ν, ϖ_1, ϖ_2, ... n'ont aucun diviseur commun >1 (116 *bis*).

Le second point est évident parce que la fonction

$$f(t^n, u) = f[(t^{\varpi})^\nu, u]$$

reste identique à elle-même quand on y substitue $\alpha_i t^{\varpi}$ à t^{ϖ}.

Le raisonnement pourrait encore se faire d'une manière moins expéditive, mais plus directe, par la simple discussion des équations entières qui nous ont fourni successivement les coefficients b_1, b_2, ... (141, IV).

II. *En posant*

(57 *bis*) $$\psi(t) = b_1 t^{\varpi_1} + b_2 t^{\varpi_2} + \ldots,$$

fonction de t olotrope et nulle en $t=0$, et en appelant ${}^{(h)}f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u)$ une fonction de $\mathfrak{r}$, u, olotrope en $\mathfrak{r}=u=0$, de grade nul, et dans tous les termes effectifs du développement de laquelle les exposants de $\mathfrak{r}$ sont divisibles par $\mathfrak{n}$, on a l'identité

$$(58)\quad f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u) = \ldots \left\{ [u-\psi(\alpha_1\mathfrak{r}^{\varpi})]^m [u-\psi(\alpha_2\mathfrak{r}^{\varpi})]^m \ldots [u-\psi(\alpha_\nu\mathfrak{r}^{\varpi})]^m \right\} \ldots {}^{(h)}f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u),$$

où les points remplacent des groupes de facteurs semblables à celui mis en évidence entre des accolades, et où deux quelconques des facteurs linéaires en u placés entre crochets ne peuvent être identiques.

On a de plus pour chaque groupe

$$(59)\qquad \varpi\nu = \mathfrak{n},$$

et pour leur ensemble

$$(60)\qquad \Sigma[\nu m] = \mathfrak{g}.$$

Comme l'équation (50) ne peut avoir la racine $\psi(\mathfrak{r}^{\varpi})$ sans avoir aussi, au même degré de multiplicité, toutes les autres du groupe (57) (I), la relation (7) appliquée à $f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u)$, en faisant intervenir la totalité des racines de cette même équation, donne une identité de la forme

$$f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u) = \ldots \left\{ [u-\psi(\alpha_1\mathfrak{r}^{\varpi})]^m \ldots [u-\psi(\alpha_\nu\mathfrak{r}^{\varpi})]^m \right\} \ldots {}^{(h)}F(\mathfrak{r}, u),$$

où tous les facteurs entre crochets sont différents, pour laquelle les égalités (9), (55 *bis*) ont lieu, et où ${}^{(h)}F(\mathfrak{r}, u)$ est forcément de grade 0.

Maintenant, le développement de l'expression

$$(61)\qquad [u-\psi(\alpha_1\mathfrak{r}^{\varpi})][u-\psi(\alpha_2\mathfrak{r}^{\varpi})]\ldots[u-\psi(\alpha_\nu\mathfrak{r}^{\varpi})]$$

en série entière par rapport à $\mathfrak{r}$, se décompose évidemment en termes de la forme

$$B(\Sigma\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\ldots\alpha_\nu^{k_\nu})\,\mathfrak{r}^{(k_1+k_2+\ldots+k_\nu)\varpi},$$

où le coefficient B est indépendant de $\mathfrak{r}$, et où le second facteur est une fonction symétrique des racines de l'équation binome (56), de la nature de celles faisant l'objet du théorème du n° **114**.

Comme cette fonction symétrique se réduit à o, quand la somme

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_\nu$$

n'est pas divisible par ν, les exposants de $\mathfrak{r}$ dans tous les termes effectifs du développement de (61) sont divisibles par $\nu\varpi = \mathfrak{n}$, et la relation est nécessairement de la forme

$$f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u) = \ldots \{[\Psi(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u)]^m\} \ldots {}^{(h)}F(\mathfrak{r}, u),$$

où les composantes ..., Ψ, ... sont olotropes en o, o.

Dans les termes effectifs du dernier facteur ${}^{(h)}F(\mathfrak{r}, u)$, il faut donc aussi que les exposants de $\mathfrak{r}$ soient tous divisibles par $\mathfrak{n}$, sans quoi ils ne pourraient l'être dans ceux de $f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u)$, produit de tous ces facteurs. On a donc

$${}^{(h)}F(\mathfrak{r}, u) = {}^{(h)}f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u),$$

ce qu'il restait à constater.

143. Ce même théorème conduit immédiatement au suivant.

Toute racine de l'équation proposée (1) *est de la forme*

$$\psi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right) = b_1 x^{\frac{\varpi_1}{\nu}} + b_2 x^{\frac{\varpi_2}{\nu}} + \ldots,$$

fonction composée de quelque fonction radicale simple de la forme $x^{\frac{1}{\nu}}$ (118) *et de quelque composante de la nature de* (57 *bis*), *dans laquelle les exposants* $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ *des termes effectifs et l'indice* ν *n'admettent aucun diviseur commun.*

Les racines pour lesquelles $\nu = 1$ *sont olotropes en* $x = 0$ (*on retombe ainsi sur celles dont nous nous sommes occupé dans le paragraphe précédent*); *les autres ne le sont pas, mais chacune d'elles est accompagnée, au même degré de multiplicité, par toutes celles qui correspondent aux* $\nu - 1$ *autres déterminations du radical* $x^{\frac{1}{\nu}}$.

La somme des degrés de multiplicité de toutes les racines inégales est égale au grade $\mathfrak{g}$ *du premier membre* $f(x, u)$.

La substitution $\mathfrak{r} = x^{\frac{1}{n}}$ transforme effectivement l'identité (58) en

$$(62)\quad f(x, u) = \ldots \left\{ \left[u - \psi\left(\alpha_1 x^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]^m \left[u - \psi\left(\alpha_2 x^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]^m \ldots \left[u - \psi\left(\alpha_\nu x^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]^m \right\} \ldots {}^{(h)}f(x, u).$$

pour laquelle l'égalité (60) subsiste, et le dernier facteur étant de grade o ne peut s'évanouir par la substitution à u d'aucune fonction de x tendant vers o avec cette variable (130); les seules racines de l'équation (1) sont donc les fonctions ψ figurant entre les crochets, dont la nature a été spécifiée conformément à notre énoncé dans le numéro précédent.

Comme ν est positif, $x^{\frac{1}{\nu}}$ et, par suite, toutes ces racines tendent vers o avec x (103).

A cause de l'égalité (59), $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{\varpi}$ est l'une des déterminations du radical $x^{\frac{1}{\nu}}$, dont l'ensemble est

$$\alpha_1 x^{\frac{1}{\nu}},\quad \alpha_2 x^{\frac{1}{\nu}},\quad \ldots,\quad \alpha_\nu x^{\frac{1}{\nu}}\quad (109, \text{IV}).$$

Pour une valeur de $\nu = 1$, cet ensemble se réduit à x, et l'on a *une* racine (simple ou multiple) de la forme

$$b_1 x^{\varpi_1} + b_2 x^{\varpi_2} + \ldots,$$

partant olotrope.

Pour une valeur de $\nu > 1$, cet ensemble contient *plusieurs* termes et donne ν racines non olotropes en $x = 0$. Car, si l'on avait, par exemple,

$$b_1 x^{\frac{\varpi_1}{\nu}} + b_2 x^{\frac{\varpi_2}{\nu}} + \ldots = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1 x + \mathfrak{b}_2 x^2 + \ldots,$$

il viendrait aussi en changeant x en x'^{ν}

$$b_1 x'^{\varpi_1} + b_2 x'^{\varpi_2} + \ldots = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{b}_1 x'^{\nu} + \mathfrak{b}_2 x'^{2\nu} + \ldots,$$

identité impossible puisque les exposants sont divisibles par ν dans le second membre, alors qu'ils ne le sont pas dans tous les termes effectifs du premier.

A ces ν racines correspondent, dans la relation (62), ν binomes élevés à des puissances d'un même exposant m auquel nous conservons le nom de *degré de multiplicité* des racines dont il s'agit,

comme si elles étaient olotropes. Il est évident, en effet, que la substitution $u = \psi\left(x^{\frac{1}{\nu}}\right)$ annule identiquement $f(x, u)$ et ses $m - 1$ premières dérivées par rapport à u, mais non la $m^{\text{ième}}$ parce que toutes les racines considérées sont inégales (**142**, II).

La fin de l'énoncé est l'égalité (60) formulée en langage ordinaire.

144. Pour étendre tout ce qui précède au cas de valeurs initiales quelconques x_0, u_0 rendant $f(x, u)$ nulle, mais toujours olotrope, il suffit d'y remplacer x, u par les différences $x - x_0$, $u - u_0$. Car la double substitution $x - x_0 = x'$, $u - u_0 = u'$ ramène l'équation proposée (1) à cette autre

$$'f(x', u') = f(x_0 + x', u_0 + u') = 0,$$

à résoudre à partir de $x' = u' = 0$ valeurs pour lesquelles son premier membre est aussi olotrope et nul.

Si, comme il importe de le faire toujours, on a divisé $f(x, u)$ par $(x - x_0)^{\mathfrak{f}}$, plus haute puissance de $x - x_0$ figurant comme facteur dans tous les termes effectifs de son développement par la formule de Taylor, le grade de $'f(x', u')$ est l'ordre $\mathfrak{g}$ de la première des fonctions

$$f, \quad \frac{df}{du}, \quad \frac{d^2 f}{du^2}, \quad \dots$$

que l'hypothèse numérique $x = x_0$, $u = u_0$ n'annule pas, c'est-à-dire le degré de multiplicité (3) de u_0 considérée comme racine de l'équation numérique

$$f(x_0, u) = 0. \tag{63}$$

En désignant encore par $\psi(t)$ la composante définie ci-dessus (**143**), mais augmentée de la constante u_0, le théorème précédent se change en celui-ci :

Chaque racine de l'équation proposée (1), *tendant vers u_0 quand x tend vers x_0, est de la forme*

$$\psi\left[(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right] = u_0 + b_1 (x - x_0)^{\frac{\varpi_1}{\nu}} + b_2 (x - x_0)^{\frac{\varpi_2}{\nu}} + \dots, \tag{64}$$

où le radical $(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ est susceptible de ses ν déterminations indistinctement.

Toute racine où $\nu = 1$ est olotrope en x_0. Les autres ne le sont pas, et celles qui sont formées avec la même composante ψ et les diverses déterminations d'un même radical $(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ ont toutes un même degré de multiplicité.

La somme des degrés de multiplicité de toutes les racines inégales reproduit $\mathfrak{g}$, même nombre pour la racine numérique u_0 de l'équation (63), *qui est leur valeur initiale commune.*

L'identité (62) *devient enfin*

$$(65)\ f(x, u) = \ldots \left\{ \left[u - \psi\left(\alpha_1 (x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]^m \ldots \left[u - \psi\left(\alpha_\nu (x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]^m \right\} \ldots {}^{(h)}f(x, u),$$

${}^{(h)}f(x, u)$ désignant ici une fonction qui en x_0, u_0 est toujours olotrope, mais ne s'y évanouit plus.

145. En raisonnant comme au n° **142**, II, on voit sans peine que le produit partiel

$$\left[u - \psi\left(\alpha_1 (x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right] \times \ldots \times \left[u - \psi\left(\alpha_\nu (x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right)\right]$$

de ν facteurs binomes du second membre de l'identité précédente, formés avec la même composante ψ et les ν déterminations d'un même radical $(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}$, se réduit à une fonction $\Psi(x, u)$ entière et de degré ν par rapport à u, olotrope en x_0 par rapport à x. Aucun autre groupement de ces facteurs ne pourrait donner des produits partiels de cette nature.

La formule

$$(65\ bis) \qquad f(x, u) = \ldots [\Psi(x, u)]^m \ldots {}^{(h)}f(x, u)$$

décompose donc $f(x, u)$ en un produit de puissances de facteurs non identiques, tous olotropes en $x = x_0$, entiers et de degrés minima par rapport à u, accompagnés d'un facteur complémentaire ${}^{(h)}f(x, u)$ olotrope mais non nul en $x = x_0$, $u = u_0$.

Si, contrairement à ce que nous supposons maintenant, $f(x, u)$ s'évanouissait quelle que soit u pour $x = x_0$, le produit comprendrait en outre un facteur de la forme $(x - x_0)^{\mathfrak{f}}$.

Cette formule est applicable à toute fonction olotrope de deux variables, mais seulement pour les valeurs de x, u suffisamment voisines de x_0, u_0.

146. La présence de racines multiples complique évidemment beaucoup leur séparation et leur développement, ainsi que tous les calculs où l'équation (1) est intéressée. Comme en Algèbre, *on évite ces difficultés en déduisant de $f(x, u)$, par des différentiations relatives à u et des divisions successives convenables, les premiers membres d'équations semblables à la proposée, mais n'ayant plus que des racines simples égales aux racines simples, doubles, triples, etc. de celle-ci.*

Il faut toujours commencer par cette simplification quand elle est praticable, et raisonner en la supposant effectuée. Ici les opérations portent sur des séries et non plus sur de simples polynomes entiers; mais, à cela près, leur mécanisme déduit de la relation (65) ou (65 *bis*) est analogue à celui de la méthode dite des *racines égales,* ce qui nous dispense d'y revenir.

147. En vertu de la relation (65) *aucune racine de l'équation* (1) *ne peut annuler $f^{(0,1)}(x, u)$ identiquement aussi, sans être multiple.* On peut toujours alors, comme nous venons de le voir, ramener cette équation à d'autres n'ayant plus que des racines simples et *dont les premiers membres, encore olotropes, ne peuvent jamais par suite s'évanouir identiquement à la fois, eux et leurs dérivées premières par rapport à u.*

Cette décomposition du premier membre $f(x, u)$ s'étend évidemment, par voie de cheminement, à toutes les valeurs des variables pour lesquelles il reste olotrope. C'est à elle que nous faisions allusion dans le n° 322 de notre première Partie.

Autres phases singulières des racines de la même équation.

148. Nous passons à l'examen d'autres cas, très intéressants aussi, qui échappent à la théorie générale des fonctions implicites et qui se ramènent immédiatement à celui que nous venons de traiter si longuement.

On dit que l'équation

$$(1) \qquad f(x, u) = 0,$$

résolue par rapport à u, a *une racine infinie* en $x = x_0$, quand une de ses racines, calculée (par cheminement) pour quelque valeur de x infiniment voisine de x_0, est infinie.

L'équation

$$f\left(x, \frac{1}{u'}\right) = 0$$

est alors satisfaite pour $x = x_0$, $u' = 0$, et s'il arrive, chose très fréquente, *qu'elle y ait un premier membre olotrope ou bien seulement qu'elle soit équivalente à quelque autre*

$$(2) \qquad 'f(x, u') = 0$$

jouissant de cette propriété, les notions précédemment acquises rendent très facile l'étude de ce qui se passe.

L'équation (2) possède alors (**144**) une ou plusieurs racines infiniment petites, simples ou multiples, dont chacune est de la forme

$$\begin{aligned} u' &= b'_0(x - x_0)^{\frac{\varpi}{\nu}} + b'_1(x - x_0)^{\frac{\varpi+1}{\nu}} + \ldots \\ &= (x - x_0)^{\frac{\varpi}{\nu}}\left[b'_0 + b'_1(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}} + b'_2(x - x_0)^{\frac{2}{\nu}} + \ldots\right], \end{aligned}$$

où b'_0 n'est pas nul et où, dans les termes effectifs, les numérateurs des exposants et leur dénominateur commun ν n'ont aucun diviseur commun > 1. Il en résulte

$$u = \frac{1}{u'} = (x - x_0)^{-\frac{\varpi}{\nu}}\left[\frac{1}{b'_0} + \ldots\right],$$

ce qui donne

$$(3) \qquad u = b_0(x - x_0)^{\frac{-\varpi}{\nu}} + b_1(x - x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\nu}} + \ldots,$$

série procédant suivant les puissances de $(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ *à exposants entiers et croissants, les premiers négatifs, où, comme tout à l'heure,* b_0 *n'est pas nul, dans laquelle aucun entier* > 1 *ne peut diviser à la fois les numérateurs et le dénominateur commun* ν *des exposants des termes effectifs.*

C'est une fonction composée du radical $(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ et de la compo-

sante $b_0 t^{-\varpi} + b_1 t^{-\varpi+1} + \ldots$, infinie mais méromorphe en $t = 0$ (40). Si l'on y réduisait à o les coefficients des termes à exposants négatifs, on retomberait sur la forme (64) du n° **144**, que l'on peut ainsi considérer comme contenue dans ce développement.

149. On dit encore que pour x infinie l'équation (1) a une racine finie u_0, ou infinie, quand une de ses racines, calculée (par cheminement) pour quelque valeur infinie de x, tend vers u_0 dans le premier cas, est infinie dans le second. L'équation

$$f\left(\frac{1}{x' - x'_0}, u\right) = 0 \tag{4}$$

possède alors une racine finie ou infinie en $x' = x'_0$, et l'on est ramené aux deux cas précédemment étudiés, quand cette équation, ou sa transformée en u', est équivalente à une autre dont le premier membre est olotrope en $x' = x'_0$, $u = u_0$, ou en $x' = x'_0$, $u' = 0$.

Pour des valeurs de x' suffisamment voisines de x'_0, chacune des racines considérées de l'équation auxiliaire (4) est de la forme

$$u = u_0 + b_0(x' - x'_0)^{\frac{\varpi}{\nu}} + b_1(x' - x'_0)^{\frac{\varpi+1}{\nu}} + \ldots$$

dans le premier cas (**144**), de la forme

$$u = b_0(x' - x'_0)^{\frac{-\varpi}{\nu}} + b_1(x' - x'_0)^{\frac{-\varpi+1}{\nu}} + \ldots$$

dans le second (**148**). En remplaçant donc $x' - x'_0$ par $\frac{1}{x}$, et en supposant $\bmod x$ suffisamment grand, il vient pour le premier cas

$$u = u_0 + b_0 x^{-\frac{\varpi}{\nu}} + b_1 x^{-\frac{\varpi+1}{\nu}} + \ldots, \tag{5}$$

et pour le second

$$u = b_0 x^{\frac{\varpi}{\nu}} + b_1 x^{\frac{\varpi-1}{\nu}} + \ldots. \tag{6}$$

Dans l'expression (5), les numérateurs et le dénominateur commun des exposants des termes effectifs n'ont aucun diviseur commun > 1. C'est une fonction composée de la composante

$$u_0 + b_0 t^{-\varpi} + b_1 t^{-(\varpi+1)} + \ldots,$$

olotrope à l'infini (51) et du radical $x^{\frac{1}{\nu}}$.

Dans l'expression (6), il faut supposer b_0 non $=0$ et même propriété arithmétique aux exposants. C'est une fonction composée du même radical et de la composante

$$b_0 t^{\varpi} + b_1 t^{\varpi-1} + \ldots,$$

méromorphe à l'infini (51).

150. *Toutes les considérations développées dans ce Chapitre sont applicables aux équations entières;* car si $f(x, u)$ est un polynome entier en x, u, l'équation (1) a son premier membre indéfiniment olotrope, et ses transformées en $u' = \frac{1}{u}$, $x' = x'_0 + \frac{1}{x}$ équivalent évidemment à des équations entières en x, u', ou x', u, ou x', u'.

151. On rencontre assez souvent les séries procédant suivant les puissances du même argument $(x - x_0)$, à exposants fractionnaires, positifs ou négatifs, croissants ou décroissants, auxquelles nous a conduits la résolution de l'équation (1) dans les principaux cas échappant à la théorie générale. En représentant par

$$(7) \qquad A_0 t^{-\varpi} + A_1 t^{-\varpi+1} + \ldots + A_{\varpi} + A_{\varpi+1} t + \ldots,$$

le développement d'une composante méromorphe en $t = 0$ (olotrope quand $A_0 = \ldots = A_{\varpi-1} = 0$), par ν un entier n'ayant aucun facteur qui divise tous les exposants de t dans les termes effectifs, leur type général s'obtient évidemment en remplaçant t par $(x - x_0)^{\frac{1}{\pm\nu}}$.

En appelant R un rayon de convergence du développement (7), puis δ une quantité positive inférieure à R^{ν} ou supérieure à $R^{-\nu}$ selon que le signe à placer devant ν est $+$ ou $-$, *une série de cette espèce*

$$(8) \qquad A_0 (x - x_0)^{\frac{-\varpi}{\pm\nu}} + A_1 (x - x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}} + \ldots,$$

convergera pour toute valeur de x donnant $\operatorname{mod}(x - x_0) < \delta$ *dans le premier cas (sauf $x = x_0$ quand les coefficients des termes à exposants négatifs ne sont pas tous nuls) ou* $\operatorname{mod}(x - x_0) > \delta$ *dans le second.*

152. *Pour toute valeur de x tombant dans ses limites de convergence (sauf x_0 quand il s'agit du signe $+$), la somme de la série* (8) *est olotrope.*

Car alors la différence $x - x_0$ n'est pas nulle, et $(x - x_0)^{\frac{1}{\pm\nu}}$ est olotrope (**125**), de plus non nulle (**71**, VIII). La somme de la série (8) est donc olotrope aussi, en vertu de la théorie des fonctions composées (**248***), comme formée avec la fonction simple, $t = (x - x_0)^{\frac{1}{\pm\nu}}$ et la composante (7), toutes deux olotropes pour les valeurs considérées de x et t.

153. En $x = x_0$, et quand il s'agit du signe $+$, il y a plusieurs cas à distinguer.

I. Pour $\nu = 1$, la série (8) est méromorphe, avec x_0 pour infini de degré de multiplicité ϖ (quand A_0 non $= 0$), olotrope quand

$$A_0 = A_1 = \ldots = A_{\varpi-1} = 0.$$

II. Pour $\nu > 1$, *la série n'est ni olotrope ni méromorphe,* ce dont on s'assure immédiatement en raisonnant comme au n° **143**. Elle entre dans une phase singulière d'une nature spéciale, qui est nouvelle pour nous, et qui nous autoriserait à proposer pour cette fonction la qualification de *rhizomorphe*.

Quand x tend vers x_0, avec A_0 non $= 0$, elle est infinie, *d'ordre (fractionnaire)* $\frac{\varpi}{\nu}$ *par rapport à* $(x - x_0)^{-1}$, comme on le dit quelquefois (**103**).

Si $A_0 = A_1 = \ldots = A_{\varpi-1} = 0$, elle tend vers A_ϖ; si en outre les coefficients des premiers termes à exposants positifs s'évanouissent jusqu'à celui de $(x - x_0)^{\frac{\mu}{\nu}}$ exclusivement, elle est infiniment petite *d'ordre* $\frac{\mu}{\nu}$ *par rapport à* $(x - x_0)$.

154. Quand il s'agit du signe $-$, il n'y a lieu de se poser de pareilles questions que pour des valeurs infinies de x.

I. Pour $\nu = 1$, la série (8) *est visiblement méromorphe ou olotrope à l'infini* (**51**), selon que l'exposant de son premier terme effectif est positif ou non.

II. Pour $\nu > 1$, elle ne l'est pas, et on peut encore la dire *rhizomorphe* à l'infini.

Elle est alors infinie, finie ou infiniment petite, de tel ou tel *ordre fractionnaire,* selon que dans son premier terme effectif l'exposant est positif, nul ou négatif (105).

Il est bon d'observer en passant, que la fonction radicale simple $x^{\frac{n}{m}}$ constitue le cas particulier le plus simple de la série (8), celui où elle contient un seul terme effectif en $(x - 0)$.

155. *Pour les valeurs de x ci-dessus définies* (152), *la série* (8) *est de celles dont on peut exécuter la différentiation ou l'intégration en opérant séparément sur chacun de ses termes.*

En supposant d'abord qu'il s'agit du signe $+$, nous décomposerons la série en la somme de l'expression

$$(9) \qquad A_0(x - x_0)^{-\frac{\varpi}{\nu}} + A_1(x - x_0)^{-\frac{\varpi-1}{\nu}} + \ldots + A_{\varpi-1}(x - x_0)^{-\frac{1}{\nu}}$$

contenant tous ses termes à exposants négatifs, et de la série

$$(10) \qquad A_\varpi + A_{\varpi+1}(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}} + A_{\varpi+2}(x - x_0)^{\frac{2}{\nu}} + \ldots$$

formée par ses termes à exposants nul et positifs.

Sauf en x_0, tous les termes de cette dernière sont olotropes; en outre pour toutes les valeurs de x rendant $\operatorname{mod}(x - x_0) < \delta'$ $(\delta' < \delta)$, leurs modules demeurent inférieurs à ceux positifs de la série

$$\operatorname{mod} A_\varpi + \operatorname{mod} A_{\varpi+1} R' + \operatorname{mod} A_{\varpi+2} R'^2 + \ldots,$$

qui est convergente parce que $R' = (\delta')^{\frac{1}{\nu}}$ est inférieur à $R\left(> \delta^{\frac{1}{\nu}}\right)$, rayon de convergence de la série (7).

Les théorèmes des nos 274*, 275* sont donc applicables à la série (10) et, par suite évidemment, à la proposée (8), parce que les termes de l'expression (9) sont en nombre essentiellement limité.

Le cas où il s'agit du signe $-$ à prendre devant ν se traite exactement de la même manière.

156. Une différentiation de cette série donne ainsi (118)

$$\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{-\varpi}{\pm\nu}A_0(x-x_0)^{\frac{-\varpi}{\pm\nu}}+\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}A_1(x-x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}}+\ldots\right],$$

expression qu'en se prémunissant contre l'ambiguïté, on peut écrire aussi

$$\frac{-\varpi}{\pm\nu}A_0(x-x_0)^{\frac{-\varpi}{\pm\nu}-1}+\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}A_1(x-x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}-1}+\ldots,$$

série de même nature que la proposée.

Des différentiations répétées conduisent à des résultats analogues.

Quand l'exposant du premier terme effectif de la série (8) est positif, sa somme est infiniment petite avec $(x-x_0)$ si les exposants vont en croissant, infinie avec x s'ils vont en décroissant. Mais comme chaque différentiation diminue tous les exposants de 1, on peut arriver à des dérivées qui sont infinies dans le premier cas, infiniment petites dans le second.

157. Quand la même série ne contient point de terme effectif en $(x-x_0)^{-1}$, son intégration donne (118)

$$(x-x_0)\left[\frac{A_0}{\frac{-\varpi}{\pm\nu}+1}(x-x_0)^{\frac{-\varpi}{\pm\nu}}+\frac{A_1}{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}+1}(x-x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}}+\ldots\right]$$
$$=\frac{A_0}{\frac{-\varpi}{\pm\nu}+1}(x-x_0)^{\frac{-\varpi}{\pm\nu}+1}+\frac{A_1}{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}+1}(x-x_0)^{\frac{-\varpi+1}{\pm\nu}+1}+\ldots,$$

c'est-à-dire encore une série de même nature que la proposée; l'augmentation subie par les exposants donne lieu à des observations inverses de celles qui terminent le numéro précédent.

Quand elle contient un pareil terme, l'intégrale est compliquée, comme pour les fonctions méromorphes, d'un terme *logarithmique* que nous discuterons bientôt (170 *et suiv.*, *inf.*).

158. Parfois on a à discuter une *expression rationnelle par rapport à des fonctions rhizomorphes d'une variable x infiniment voisine d'une valeur critique commune* $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire de

la forme

$$F\left[\psi_1\left((x-a)^{\frac{1}{\nu_1}}\right),\quad \psi_2\left((x-a)^{\frac{1}{\nu_2}}\right),\quad \ldots\right],$$

où F est une composante rationnelle, où $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont des fonctions méromorphes (ou olotropes) pour la valeur o de leurs variables uniques. Cette discussion se ramène immédiatement à celle des nos **44** *et suiv.* par la substitution

$$x = a + t^N,$$

en appelant N quelque multiple commun des entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots$, le plus petit par exemple; car alors $\psi_1\left[(x-a)^{\frac{1}{\nu_1}}\right], \ldots$ se changent en $\psi_1\left(t^{\frac{N}{\nu_1}}\right), \ldots$ fonctions toutes méromorphes en $t = 0$.

Après simplification et développement de l'expression transformée en une série procédant suivant les puissances de t à exposants entiers positifs ou négatifs, la substitution inverse

$$t = (x-a)^{\frac{1}{N}}$$

donne un développement dont l'examen rend visible ce qui se passe en $x = a$.

Tout cela est trop facile pour que nous insistions; nous ferons seulement remarquer que l'on se trouve ici dans un de ces cas signalés au n° **46**, où la règle de Lhôpital n'est plus applicable. Si, par exemple, on essayait de s'en servir, seulement pour discuter en $x = 0$ l'expression très simple

$$\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}},$$

les différentiations parallèles qu'elle comporte conduiraient dès le premier ordre à des termes toujours infinis.

Observations complémentaires sur le calcul par cheminement des fonctions implicites considérées dans ce Chapitre.

159. La théorie générale des fonctions implicites, combinée avec le théorème fondamental du calcul par cheminement des fonctions localement olotropes (307* *et suiv.*) (173*), exige, pour

que la discussion d'une racine déterminée u de l'équation

$$(1)' \qquad f(x, u) = 0$$

soit possible dans une aire limitée donnée S_x, que u n'y soit jamais infinie, puis que pour toute valeur de x y tombant, associée à la valeur correspondante de u, $f(x, u)$ soit une fonction olotrope de deux variables, puis enfin que pour les mêmes valeurs de x, u on n'ait jamais

$$(2) \qquad f^{(0,1)}(x, u) = 0.$$

Mais les notions nouvelles que nous venons d'acquérir nous permettent maintenant de nous soustraire à ces diverses restrictions, la seconde naturellement exceptée, moyennant toutefois, relativement à la première, que l'équation

$$(3) \qquad f\left(x, \frac{1}{u'}\right) = 0$$

jouisse de la propriété spécifiée au n° **148**.

Quand l'équation (1) a été traitée par la méthode esquissée aux nos **146**, **147**, ce que nous supposerons désormais, elle forme avec (2) un système d'équations numériques simultanées aux inconnues x, u, dont les couples de racines ayant leurs premiers éléments

$$(4) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

à l'intérieur de l'aire S_x sont en nombre évidemment limité.

Il en est de même (4) pour les racines

$$(5) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots$$

de l'équation, à premier membre olotrope,

$$F(x, 0) = 0$$

qu'on obtient en faisant $u' = 0$ dans l'équation (3) convenablement transformée.

Rien ne s'oppose d'ailleurs à ce que quelques-unes de ces quantités appartiennent aussi à la suite (4); car quand x tend vers a_1, par exemple, il peut fort bien arriver qu'une certaine racine de l'équation (1) soit finie et fasse tendre $f^{(0,1)}(x, u)$ vers 0, en même

temps qu'une autre racine soit infinie. Mais alors chacune de ces racines se comporte comme si l'autre n'existait pas, et les choses se passent à peu près comme en une valeur de x où l'équation (1) aurait plusieurs racines multiples numériquement inégales.

Ces valeurs (4) (5) de x sont les seules évidemment qui, dans l'aire S_x, soient critiques pour telles ou telles racines u de l'équation (1) (**146***).

160. Quand la valeur initiale de x choisie pour commencer le cheminement est une quantité a appartenant à la suite (4), et que la valeur correspondante b choisie pour u est racine simple de l'équation numérique

$$f(a, u) = 0,$$

on rentre dans la théorie générale, et nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit au n° **307***. Mais quand b est racine multiple, *sa connaissance ne suffit plus à l'exécution du cheminement,* à cause de l'ambiguïté naissant de l'existence possible de *plusieurs* racines de l'équation (1) se réduisant toutes à b pour $x = a$.

Celles de ces racines qui sont olotropes en $x = a$ ne peuvent se distinguer les unes des autres que par les premiers *schémas* de leur développement (**172***), poussés les uns et les autres jusqu'aux points où ils diffèrent par quelque *article*. Pour préciser celle qu'on entend calculer par cheminement, on indiquera donc son premier schéma choisi naturellement parmi ceux que fournit la méthode expliquée dans les paragraphes précédents.

Mais pour les autres qui sont de la forme $\psi\left[(x-a)^{\frac{1}{\nu}}\right]$ où ν est > 1, *l'indication du schéma* [nous voulons dire des coefficients du développement de la composante olotrope $\psi(t)$] *ne suffit plus à lever l'ambiguïté,* à cause de la multiplicité des valeurs du radical $(x-a)^{\frac{1}{\nu}}$. Il faut alors indiquer, en outre, celle de ces valeurs qu'on entend substituer dans $\psi(t)$ pour commencer l'opération. Au fond, les conditions du cheminement sont totalement modifiées par cette intervention d'un élément étranger au schéma, et encore par l'emploi d'un autre développement que celui de Taylor. Cette valeur a de x correspond alors à ce qu'on nomme souvent un *point de ramification* pour les racines u en question.

161. Quand la valeur initiale α de x fait partie de la suite (5) et que celle de u est infinie, les choses se passent de la même manière, à cela près que les composantes $\psi(t)$ ne sont que méromorphes en $t = 0$, et que leurs schémas contiennent des coefficients de termes à exposants négatifs; on abandonne encore la série de Taylor.

Si l'équation (1) possède *une seule* racine, méromorphe en $x = \alpha$, l'ambiguïté n'existe pas; pour *plusieurs* racines de cette espèce elle se lève par le choix fait entre les schémas réduits à des termes assez nombreux pour mettre leur non-identité en évidence. Pour les racines non méromorphes, il faut y ajouter comme ci-dessus l'indication de la valeur à prendre parmi les ν distinctes de $(x - \alpha)^{\frac{1}{\nu}}$. En α on a encore, mais d'une autre manière, un point de ramification.

Quand la valeur initiale de x appartient à la fois aux deux suites (4), (5), les deux ordres de faits qui viennent d'être signalés se présentent simultanément sans modifications réciproques.

162. Une deuxième question à résoudre consiste à *assigner le résultat auquel un cheminement déterminé conduit en* $\mathfrak{a}$, *valeur finale de x appartenant à telle ou telle des suites* (4), (5), *ou bien à toutes deux à la fois.*

Soient

$$(6) \qquad \mathfrak{b}_1, \quad \mathfrak{b}_2, \quad \ldots, \quad \text{et} \quad \mathfrak{b}_\infty \text{ (au figuré)}$$

les valeurs numériques distinctes, finies et infinie, des racines que l'équation

$$f(\mathfrak{a}, u) = 0$$

peut posséder, et $\mathfrak{a}'$ une valeur de x choisie sur le chemin considéré, de manière :

1° Que les développements (olotropes, méromorphes ou rhizomorphes) des racines distinctes de l'équation (1) qui tendent vers les quantités (6) quand x tend vers $\mathfrak{a}$, soient tous convergents pour $x = \mathfrak{a}'$, ce qui est réalisable dans les cas courants, en particulier dans celui où ces quantités (6) sont en nombre limité;

2° Que pour $x = \mathfrak{a}'$ ces développements prennent des valeurs numériques inégales, ce qui est réalisable puisqu'ils diffèrent les

uns des autres, soit par leurs composantes $\psi(t)$ (olotropes ou méromorphes), soit par les valeurs des radicaux de la forme $(x - \mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ à y substituer à t. Appelons enfin

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \mathfrak{b}'_1, & \mathfrak{b}''_1, & \ldots, \\ \mathfrak{b}'_2, & \mathfrak{b}''_2, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\ \mathfrak{b}'_\infty, & \mathfrak{b}''_\infty, & \ldots \end{array}\right.$$

les groupes de valeurs numériques dont il s'agit.

Quand x arrive en $\mathfrak{a}'$, u atteint une valeur nécessairement égale à quelqu'une $\mathfrak{b}_i^{(j)}$ de ces quantités. Cela posé, il est évident que, quand x passe de $\mathfrak{a}'$ à $\mathfrak{a}$ par un dernier pas, *u offre $\mathfrak{b}_i$ pour valeur finale (finie ou infinie)*, et qu'en $x = \mathfrak{a}$, *u est olotrope, méromorphe ou rhizomorphe selon que $\mathfrak{b}_i^{(j)}$ est la valeur numérique qu'a prise en $x = \mathfrak{a}'$ un développement de la nature homonyme.*

163. Il est bon d'observer qu'on pourrait encore achever le cheminement d'une manière directe, c'est-à-dire à l'aide d'un développement de u, fait à partir d'une valeur de x non égale à $\mathfrak{a}$, mais suffisamment voisine de cette quantité.

I. Supposons d'abord que l'on ait $\mathfrak{a} = 0$, que u y prenne la valeur finale zéro, et nommons $\mathfrak{n}$ un entier tel que toutes les racines de l'équation

$$(8)\qquad f(\mathfrak{r}^{\mathfrak{n}}, u) = 0,$$

qui s'évanouissent pour $\mathfrak{r} = 0$, y soient olotropes (**141**).

On peut évidemment délimiter une aire $S_\mathfrak{r}$ renfermant l'origine $\mathfrak{r} = 0$, de plus assez petite pour que toutes les racines considérées de l'équation (8) y soient olotropes; on pourra donc choisir dans cette aire une valeur $\mathfrak{r}_i$ de x, à module suffisamment petit pour que les développements de toutes ces racines, faits à partir de $\mathfrak{r}_i$, aient des rayons de convergence tous supérieurs à $\operatorname{mod}\mathfrak{r}_i$, et par suite, pour qu'en y faisant $\mathfrak{r} = 0$ ils convergent, eux et aussi les séries formées par les modules de leurs termes.

Si donc on prend $x_i = \mathfrak{r}_i^{\mathfrak{n}}$, il est certain que le développement à partir de x_i d'une racine quelconque de l'équation (1) s'évanouissant avec x converge pour $x = 0$, quand bien même cette

racine n'y serait pas olotrope. Effectivement on peut le former en substituant à $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_i$ dans le développement de la racine de l'équation (8), dont les modules des termes forment une série convergente pour $x = 0$ comme nous venons de le constater, celui de $x^{\frac{1}{n}} - x_i^{\frac{1}{n}}$ en série entière par rapport à $x - x_i$, lequel jouit de la même propriété en $x = 0$, et dont la somme a précisément pour module celle de la série formée par les modules de ses termes, cela à cause de $0 < \frac{1}{n} < 1$ (72, I *in fine*).

En prenant donc x_i suffisamment voisin de $\mathfrak{a}$, le cheminement qui conduit x en $\mathfrak{a}(= 0)$ peut être achevé comme si cette valeur n'était pas critique, par un dernier développement de u construit à partir de x_i.

II. La même conclusion subsiste évidemment quelle que soit la valeur de $\mathfrak{a}$, quand u y prend la valeur quelconque $\mathfrak{b}$; car la discussion se ramène à celle de quelque racine u' s'évanouissant avec x', de l'équation de même nature

$$f(\mathfrak{a} + x', \mathfrak{b} + u') = 0.$$

C'est elle, avec celles des n°s 160, 161, qui assure l'exactitude des observations faites à la fin des n°s 12, 48.

III. Quand u est infinie en $x = \mathfrak{a}$, les choses se passent de la même manière, à cela près qu'il faut substituer à la considération de u celle de la racine correspondante u' de l'équation transformée (3).

164. Traitons encore cette troisième question qui se présente fréquemment.

Appelant x_0, X deux valeurs non critiques de x, données dans l'aire S_x, distinguer parmi les racines de l'équation numérique

$$(9) \qquad f(X, u) = 0,$$

celles qui sont les valeurs finales de u calculées par cheminement, à partir d'une même valeur initiale u_0 (ou schéma) en x_0, sur les divers chemins qu'on peut tracer de x_0 à X dans cette aire.

I. Comme dans S_x, la fonction implicite u déterminée par la valeur initiale qu'on lui impose en x_0 est localement olotrope partout ailleurs qu'aux valeurs critiques (4) (5), il est certain, pour la raison déjà invoquée au n° 86, que *l'un quelconque des chemins considérés est laissé équivalent à lui-même (c'est-à-dire qu'il ne cesse pas de conduire pour u à la même valeur finale en* X) *par toute déformation ne lui faisant franchir aucun des points dont il s'agit.*

Si donc on trace par x_0, à volonté mais une fois pour toutes, des *boucles* (ou *lacets*)

$$(a_1),\ (a_2),\ \ldots \tag{10}$$

$$(\alpha_1),\ (\alpha_2),\ \ldots \tag{11}$$

dont chacune $(\mathfrak{a})$ enveloppe une seule fois le point correspondant $\mathfrak{a}$ à l'exclusion de tous les autres, puis un chemin $[x_0\mathrm{X}]$ conduisant à X, que nous appellerons encore *simple* comme au n° 87, *tout autre chemin tracé de x_0 à X équivaudra visiblement à quelqu'un de ceux qu'on peut former en parcourant d'abord des nombres de fois respectivement donnés, dans des sens de rotation (directs ou rétrogrades) respectivement donnés aussi, telles ou telles des boucles* (10) (11) *rangées dans un ordre de succession déterminée, puis après elles le chemin simple* $[x_0\mathrm{X}]$.

Cette observation réduit l'examen de tous les chemins imaginables à celui des tracés qu'on peut former en plaçant avant le chemin simple les diverses combinaisons de ces boucles.

II. Le parcours d'une boucle $(\mathfrak{a})$ de x_0 à x_0, y ramenant u à une valeur que laisse invariable toute déformation de cette boucle ne lui faisant franchir aucune des valeurs critiques (4) (5), nous pourrons évidemment la former : 1° d'un chemin $[x_0\mathfrak{a}']$ tracé dans son intérieur jusqu'à un point $\mathfrak{a}'$ jouissant des propriétés spécifiées dans le n° 162; 2° d'un *anneau* $[\mathfrak{a}]$ passant par $\mathfrak{a}'$ en enveloppant $\mathfrak{a}$ une seule fois et de telle sorte que la distance maximum de tous ses points à $\mathfrak{a}$ soit inférieure aux plus petits des rayons de convergence des développements des racines de l'équation (1) qui ont pour limites les quantités (6) quand x tend vers $\mathfrak{a}$; 3° du chemin $[\mathfrak{a}'x_0]$, géométriquement identique à $[x_0\mathfrak{a}']$, mais

parcouru en sens contraire; et nous donnerons la même forme spéciale à chacune des autres boucles (10) (11).

III. Supposons maintenant qu'il s'agisse *d'un chemin* $(x_0 X)$ *réductible à la boucle* $(\mathfrak{a})$ *à parcourir une seule fois avant le chemin simple* $[x_0 X]$, et soient $\mathfrak{b}^{(0)}$ la valeur acquise par u en $\mathfrak{a}'$ après le parcours du chemin $[x_0 \mathfrak{a}']$, puis ${}^{(0)}\psi\left[(x-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$ celui des développements des racines de l'équation (1) tendant vers $\mathfrak{b}$ quand x tend vers $\mathfrak{a}$, qui prend la valeur $\mathfrak{b}^{(0)}$ pour $x = \mathfrak{a}'$.

Si $\nu = 1$, le parcours de l'anneau $[\mathfrak{a}]$ ramène u en $\mathfrak{a}'$ à sa valeur primitive $\mathfrak{b}^{(0)} = {}^{(0)}\psi(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})$, et le parcours ultérieur de $[\mathfrak{a}' x_0]$ ramène u en x_0 à sa valeur initiale. *Les choses se passent comme si la boucle* $(\mathfrak{a})$ *n'avait pas été placée avant le chemin simple.*

Mais si ν est > 1, et si l'on nomme α la racine principale directe de l'équation binôme

$$\alpha^\nu = 1,$$

le parcours de l'anneau $[\mathfrak{a}]$ fait passer $(x-\alpha)^{\frac{1}{\nu}}$ de $(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ (en désignant ainsi la valeur qu'il faut attribuer à ce radical en $\mathfrak{a}'$ pour que ${}^{(0)}\psi\left[(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right] = \mathfrak{b}^{(0)}$) à $\alpha^{\pm 1}(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ selon que le sens de rotation est direct ou rétrograde (**126**), et *u revient en* $\mathfrak{a}'$ *avec une nouvelle valeur* $\mathfrak{b}^{(\pm 1)} = {}^{(0)}\psi\left[\alpha^{\pm 1}(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$. Le parcours postérieur du chemin $[\mathfrak{a}' x_0]$ *ramène u à une valeur différente de sa valeur initiale,* et la dernière marche à faire sur le chemin simple $[x_0 X]$ conduit cette fonction en X *à une valeur finale différente aussi de celle qu'elle y aurait atteinte sans l'adjonction de la boucle* $(\mathfrak{a})$ *faite en tête de lui.*

Pour $\nu = 2$ on a $\alpha = \alpha^{-1} = -1$, et *le sens du parcours de la boucle* $(\mathfrak{a})$ *est sans influence sur le résultat* (**113**).

IV. Quand la boucle $(\mathfrak{a})$ doit être parcourue k fois dans le sens direct ou rétrograde, les choses se passent de la même manière, à cela près que le passage de $\mathfrak{a}'$ à $\mathfrak{a}'$ sur l'anneau $[\mathfrak{a}]$ multiplie par $\alpha^{\pm k}$ la valeur primitive du radical $(x-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ (**126**), et qu'ainsi u passe de $\mathfrak{b}^{(0)} = {}^{(0)}\psi\left[(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$ à $\mathfrak{b}^{(\pm k)} = {}^{(0)}\psi\left[\alpha^{\pm k}(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$.

Si k n'est pas divisible par ν, *l'adjonction de cette boucle multiple change comme ci-dessus la valeur finale en* X *que le che-*

min simple donnerait sans elle. Mais elle ne la change pas si k est multiple de ν, à cause de $\alpha^{\pm k} = 1$.

V. *L'acquisition faite une fois pour toutes, de documents numériques en nombre limité suffit donc à la discussion de tout ce qui peut résulter de l'adjonction en tête du chemin simple, d'une seule boucle* ($\mathfrak{a}$) *répétée un nombre quelconque de fois dans un sens ou dans l'autre.*

Ces documents sont évidemment :

1° La valeur $\mathfrak{b}^{(0)}$ à laquelle u arrive en $\mathfrak{a}'$ au bout de la ligne $[x_0\,\mathfrak{a}']$;

2° Les valeurs $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, ..., $\mathfrak{b}^{(\nu-1)}$ auxquelles u revient en $\mathfrak{a}'$, après 1, 2, ..., $\nu - 1$ parcours de l'anneau $[\mathfrak{a}]$ dans le sens direct; leur choix dans la suite $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{b}''$, ... s'opère en y prenant dans un ordre convenable les $\nu - 1$ valeurs de l'expression ${}^{(0)}\psi\left[(\mathfrak{a}' - \mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$, autres que $\mathfrak{b}^{(0)}$;

3° Les valeurs u_0, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(\nu-1)}$ auxquelles u revient en x_0, après le parcours de $[\mathfrak{a}' x_0]$ fait en partant de $\mathfrak{a}'$ avec les valeurs $\mathfrak{b}^{(0)}$, $\mathfrak{b}^{(1)}$, $\mathfrak{b}^{(2)}$, ..., $\mathfrak{b}^{(\nu-1)}$ respectivement;

4° Les valeurs finales U, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, ..., $U^{(\nu-1)}$ auxquelles le parcours du chemin simple $[x_0 X]$ commencé avec les valeurs initiales u_0, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, ..., $u^{(\nu-1)}$ conduit u en X.

VI. Le chemin formé par deux boucles (simples ou multiples) précédant le chemin simple, pouvant être regardé comme résultant de l'adjonction de la première en tête d'un nouveau chemin simple qui résulterait de la combinaison de la seconde boucle avec l'ancien chemin simple $[x_0 X]$, *des documents numériques plus complets, mais toujours en nombre limité, suffisent à la détermination de la valeur finale de u résultant du parcours d'un chemin quelconque réductible à ces deux boucles et au chemin simple primitif.*

Et de même ensuite progressivement, pour le cas où au lieu de une ou deux boucles il y en aurait trois, quatre, etc., c'est-à-dire *où il s'agirait d'un chemin quelconque tracé de x_0 à X dans l'aire* S_x.

On aperçoit suffisamment, sans que nous ayons à les détailler, les résultats numériques préalables fournissant dans tous les cas

la solution du problème. Il est visible qu'ils sont contenus dans la connaissance des faits suivants :

1° *Mode de décomposition des éléments de chaque ligne du tableau* (7) *en groupes comprenant chacun les* ν *valeurs d'une même expression de la forme* $\psi\left[(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$, *rangées dans l'ordre où l'on peut les déduire de l'une d'elles en y multipliant la valeur correspondante du radical* $(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ *par les* $\nu-1$ *premières puissances de la racine principale directe* $\nu^{\text{ième}}$ *de* 1;

2° *Valeurs acquises en* $\mathfrak{a}'_1$, $\mathfrak{a}'_2$, ... [*valeurs de* x *jouant relativement aux quantités* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, ... *des suites* (4) (5) *indistinctement, des rôles analogues à celui de* $\mathfrak{a}'$ *par rapport à* $\mathfrak{a}$] *et aussi en* X, *après le parcours des lignes* $[x_0\mathfrak{a}'_1]$ $[x_0\mathfrak{a}'_2]$, ... *et du chemin simple* $[x_0 X]$, *par la fonction* u *partant de* x_0 *avec chacune des racines de l'équation numérique*

$$f(x_0, u) = 0$$

pour valeur initiale.

Mais la connaissance de tous ces résultats peut dépasser de beaucoup les besoins de la discussion dans l'aire S_x, de la racine u définie par la seule valeur initiale u_0.

165. L'étude à laquelle nous nous livrons depuis le n° **159** peut être faite dans une aire illimitée de forme quelconque, quand les quantités (4) (5) y sont en nombre limité, et même sans cette restriction, à cela près que les conclusions de l'alinéa VI du numéro précédent ne subsistent plus.

Et même, quand l'équation auxiliaire

$$(12) \qquad f\left(\frac{1}{x'-x'_0}, u\right) = 0$$

jouit des propriétés mentionnées au n° **149**, les valeurs infinies de x donnent lieu à des observations presque identiques, quant au langage, à celles faites quand x est infiniment voisine d'une valeur critique telle que $\mathfrak{a}$. Le développement à employer pour les discuter est la série (8) du n° **151** avec le signe — placé devant le dénominateur commun ν des exposants, avec la notation x'_0 substituée à x_0. Au lieu d'une boucle comme celle que

nous appelions ($\mathfrak{a}$) tout à l'heure, il y a ici à en considérer une autre composée de : 1° une ligne $[x_0\mathfrak{a}'_\infty]$ tracée de la valeur initiale x_0 de x, à une valeur $\mathfrak{a}'_\infty$ de module assez grand pour que le développement en question converge; 2° un anneau $[\infty]$, maintenant de très grandes dimensions, conduisant x de $\mathfrak{a}'_\infty$ à $\mathfrak{a}'_\infty$ par des valeurs qui tombent toutes aussi dans les limites de convergence de la même série, et enveloppant une seule fois l'origine, ou bien, comme on peut le dire encore, l'aire imperforée infinie qu'il limite *intérieurement;* 3° la ligne $[\mathfrak{a}'_\infty x_0]$.

Nous fatiguerions inutilement le lecteur en insistant davantage, car nous n'aurions qu'à lui répéter avec d'autres mots les détails de la discussion de la racine u de l'équation auxiliaire (12), dans une aire limitée contenant la seule valeur critique x'_0.

166. Toutes les considérations précédentes sont applicables aux équations entières, comme nous en avons déjà fait la remarque (**150**); c'est même pour elles qu'on a le plus souvent à les utiliser.

La plus intéressante pour nous des discussions de ce genre est celle de la racine u de l'équation binome à second membre rationnel

$$u^m = H_0(x-\mathfrak{a}_1)^{n_1}\ldots(x-\mathfrak{a}_g)^{n_g}, \tag{13}$$

que sa forme simple rendra très facile à traiter par des moyens spéciaux. On a $H_0 \neq 0$, et les exposants $m, n_1, \ldots, n_g$ sont des entiers, le premier positif, les derniers indistinctement positifs ou négatifs. Les valeurs critiques de x sont les quantités $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_g$, que nous supposons toutes inégales; elles font acquérir à l'équation (13) des racines (numériques) multiples, nulles ou infinies selon que la valeur correspondante de l'exposant n est $\gtrless 0$.

Pour x_0, X, extrémités du chemin simple, nous prendrons toujours deux valeurs de x non critiques. En représentant par $f(x)$ le second membre de notre équation, nous prendrons pour u_0, valeur initiale de u, une des m déterminations numériques (inégales) du radical $\sqrt[m]{f(x_0)}$, choisie à volonté une fois pour toutes, et nous appellerons U celle des déterminations du radical $\sqrt[m]{f(X)}$ que le parcours du chemin simple donne en X pour valeur finale de u.

I. On obtient presque immédiatement les développements des racines pour des valeurs de x suffisamment voisines d'une même valeur critique $\mathfrak{a}$ correspondant à l'exposant n. On peut effectivement écrire

$$u=(x-\mathfrak{a})^{\frac{n}{m}}\sqrt[m]{\frac{f(x)}{(x-\mathfrak{a})^n}};$$

et, comme la fonction rationnelle placée sous ce radical est olotrope et non nulle en $x=\mathfrak{a}$, ce radical lui-même l'est aussi (**125**), partant développable en une série entière par rapport à $x-\mathfrak{a}$,

$$h_0+h_1(x-\mathfrak{a})+h_2(x-\mathfrak{a})^2+\ldots,$$

où $h_0\neq 0$, qui donne

$$u=(x-\mathfrak{a})^{\frac{n}{m}}[h_0+h_1(x-\mathfrak{a})+\ldots].$$

En appelant m', n' les quotients des entiers m, n par leur plus grand commun diviseur d, puis $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ les d racines $d^{\text{ièmes}}$ de l'unité, les m déterminations de cette expression rhizomorphe se partagent en les d groupes suivants

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l}\theta_1(x-\mathfrak{a})^{\frac{n'}{m'}}[h_0+h_1(x-\mathfrak{a})+\ldots],\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \theta_d(x-\mathfrak{a})^{\frac{n'}{m'}}[h_0+h_1(x-\mathfrak{a})+\ldots],\end{array}\right.$$

qui chacun en contiennent m', et où il n'y a plus de diviseur commun entre le dénominateur de chaque exposant et son numérateur.

II. Supposons maintenant qu'on place la boucle $(\mathfrak{a})$ avant le chemin simple, et soit i l'indice de θ dans celui des développements (14) parmi les valeurs duquel pour $x=\mathfrak{a}'$ se trouve la valeur $\mathfrak{b}'$ acquise en ce point par u après le parcours de la ligne $[x_0\mathfrak{a}']$.

Une révolution faite par x dans le sens direct ou rétrograde sur l'anneau $[\mathfrak{a}]$ fait passer le radical $(x-\mathfrak{a})^{\frac{n'}{m'}}$, de sa valeur primitive en $\mathfrak{a}'$, au produit de celle-ci par la puissance d'exposant $\pm n'$ de $\alpha_{m'}$ racine principale directe $m'^{\text{ième}}$ de l'unité (**126**); comme le premier facteur θ_i est constant, comme le dernier $h_0+h_1(x-\mathfrak{a})+\ldots$

est olotrope en $\mathfrak{a}$, partant monodrome, le développement revient en $\mathfrak{a}'$ avec la nouvelle valeur $\alpha_{m'}^{\pm n'}\mathfrak{b}'$. Il en résulte qu'*après le parcours de la boucle* ($\mathfrak{a}$), *la racine u partie de x_0 avec la valeur initiale u_0 y repasse avec la nouvelle valeur $\alpha_{m'}^{\pm n'}u_0$, et par suite, qu'au lieu de* U, *elle atteint en* X *au bout du chemin simple la valeur finale* $\alpha_{m'}^{\pm n'}$U.

Le parcours préalable de la même boucle, fait k fois dans un sens ou dans l'autre, donnerait évidemment pour valeur finale $\alpha_{m'}^{\pm kn'}$U en particulier elle rendrait U de nouveau, si k était divisible par m'.

III. Il est maintenant évident *que*

$$\alpha_{m'_1}^{\pm k_1 n'_1}\alpha_{m'_2}^{\pm k_2 n'_2}\dots\alpha_{m'_g}^{\pm k_g n'_g}\mathrm{U}$$

représente la valeur finale de u en X *après le parcours d'un chemin réductible au chemin simple précédé des boucles enveloppant les valeurs critiques et décrites $k_1, k_2, \dots, k_g$ fois respectivement dans un sens ou dans l'autre.*

Ici le résultat est absolument indépendant de l'ordre dans lequel les diverses boucles se succèdent, ce qui n'a pas lieu nécessairement dans les autres cas.

IV. Considérons enfin la *boucle de l'infini* (∞), pour laquelle il suffit de prendre la quantité $\mathfrak{a}'_\infty$ avec un module supérieur à tous ceux des valeurs critiques proprement dites, et dont on peut former l'anneau avec une circonférence ayant l'origine pour centre et $\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}'_\infty$ pour rayon.

Si N désigne la somme (algébrique) des exposants $n_1, n_2, \dots, n_g$, on a (50, II) pour les valeurs de x dont les modules surpassent tous ceux des valeurs critiques, en particulier sur l'anneau [∞], le développement

$$f(x) = \mathrm{H}_0 x^{\mathrm{N}} + \mathrm{H}_1 x^{\mathrm{N}-1} + \mathrm{H}_2 x^{\mathrm{N}-2} + \dots,$$

puis

$$u = x^{\frac{\mathrm{N}}{m}}(\mathrm{H}'_0 + \mathrm{H}'_1 x^{-1} + \dots),$$

expression dont le second facteur ne peut s'évanouir pour aucune des valeurs de x que nous considérons.

En appelant ici N', m' les quotients de N, m par leur plus grand commun diviseur, et $\alpha_{m'}$ la racine principale directe de l'unité dont

l'indice est m', le parcours direct ou rétrograde de l'anneau multiplie le premier facteur par $\alpha_{m'}^{\pm N'}$ parce que x tourne une fois autour de l'origine (**119**); il ramène d'ailleurs le second facteur à sa valeur primitive en $\mathfrak{a}'_{\infty}$ parce qu'il est méromorphe à l'infini. On en conclut facilement, en raisonnant toujours de la même manière, que *k parcours de la boucle de l'infini avant le chemin simple changent* U *en* $\alpha_{m'}^{\pm kN'}$U.

Quand N est divisible par m, on a $m' = 1$, $\alpha_{m'} = 1$, et *la racine u est monodrome, partant olotrope, dans toute la partie illimitée du plan qui est géométriquement extérieure à l'anneau* $[\infty]$.

167. Revenons aux généralités pour faire deux observations intéressantes, auxquelles conduit la considération simultanée de toutes les racines de l'équation (1).

Soient x_0, X des valeurs de x non critiques, puis

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots \tag{15}$$

les racines de l'équation numérique

$$f(x_0, u) = 0,$$

puis respectivement

$$U_1,\quad U_2,\quad \ldots \tag{16}$$

celles de l'équation (1) qu'on obtient comme valeurs finales, après avoir parcouru un même chemin $[x_0 X]$ considéré comme *simple*, en prenant les quantités (15) pour valeurs initiales de u, et cherchons d'abord la nature de la permutation qu'opère dans la suite (16) l'adjonction d'une boucle $(\mathfrak{a})$ en tête du chemin simple, les quantités (15) restant toujours placées dans le même ordre de succession.

Appelons $\psi\left[(x-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$ le développement rhizomorphe à même composante ψ (olotrope ou méromorphe) d'un groupe de ν racines de l'équation (1) infiniment voisines de $\mathfrak{b} = \psi(0)$ (ou infinies) quand x tend vers $\mathfrak{a}$, puis

$$\mathfrak{b}',\quad \mathfrak{b}'',\quad \ldots,\quad \mathfrak{b}^{(\nu)} \tag{17}$$

les ν valeurs

$$\psi\left[\alpha^0(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right],\qquad \psi\left[\alpha(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right],\qquad \ldots,\qquad \psi\left[\alpha^{\nu-1}(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$$

de l'expression $\psi\left[(\mathfrak{a}'-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}\right]$, α désignant toujours la racine principale directe $\nu^{\text{ième}}$ de l'unité, puis

(18) $$u',\quad u'',\quad \ldots,\quad u^{(\nu)}$$

celles des quantités (15) qui prises pour valeurs initiales conduisent u aux valeurs (17) respectivement après le parcours de la ligne $[x_0\mathfrak{a}']$, puis enfin

(19) $$U',\quad U'',\quad \ldots,\quad U^{(\nu)}$$

les valeurs finales obtenues au bout du chemin simple, quand u part de x_0 avec les valeurs initiales (18).

Une révolution de x sur l'anneau $[\mathfrak{a}]$ dans le sens direct change généralement $(x-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$ en $\alpha(x-\mathfrak{a})^{\frac{1}{\nu}}$; les ν racines u qui parties de x_0 avec les valeurs initiales (18) arrivent en $\mathfrak{a}'$ au bout de la ligne $[x_0\mathfrak{a}']$ avec les valeurs (17) y reviennent donc après le parcours de l'anneau, avec les valeurs

$$\mathfrak{b}'',\quad \mathfrak{b}''',\quad \ldots,\quad \mathfrak{b}^{(\nu)},\quad \mathfrak{b}';$$

elles repassent ainsi en x_0 au bout de la ligne $[\mathfrak{a}'x_0]$ avec les valeurs

$$u'',\quad u''',\quad \ldots,\quad u^{(\nu)},\quad u',$$

et finissent, par suite, en X au bout du chemin simple $[x_0 X]$ avec les valeurs

$$U'',\quad U''',\quad \ldots,\quad U^{(\nu)},\quad U',$$

se déduisant de la suite (19) *par une permutation circulaire*.

Il en résulte, tout comme pour les racines de l'équation binome (**122**), que, *relativement à une valeur critique donnée de x, les quantités* (16) *se partagent en groupes ou systèmes circulaires, c'est-à-dire tels, que l'adjonction de la boucle correspondante en tête du chemin simple ne change pas la composition de chaque système, mais opère dans ses éléments une simple permutation circulaire.*

Le doublement, triplement, etc., de la boucle dans le même sens provoque deux, trois, etc. permutations circulaires dans chaque système. Son parcours en sens contraire produit la permutation circulaire opposée.

Les valeurs finales des racines qui sont monodromes autour de la valeur critique dont il s'agit peuvent être considérées comme formant des systèmes circulaires composés chacun d'un seul élément.

Il est clair que, relativement à deux valeurs critiques différentes, le partage des quantités (16) en systèmes circulaires s'opère en général de deux manières entièrement différentes aussi.

168. Quand les équations (1), (3) jouissent dans *tout le plan* servant à la notation graphique de x, des propriétés spécifiées au nº **159** pour une aire limitée S_x, le calcul par cheminement d'une racine quelconque de l'équation (1), de toutes par conséquent, ne rencontre jamais aucun obstacle et *peut être poussé indéfiniment dans toutes les directions,* soit par le développement de Taylor, soit quelquefois par ceux étudiés dans le paragraphe précédent. Comme en outre, d'après les notions acquises dans le présent Chapitre, plusieurs racines d'abord numériquement distinctes ne peuvent devenir égales sans que leurs degrés de multiplicité s'ajoutent, sans qu'une variation ultérieure de x les sépare de nouveau en plusieurs autres dont la somme des degrés de multiplicité reprend la même valeur, *la somme des degrés de multiplicité d'un groupe donné quelconque de racines conserve une valeur constante, tant qu'aucune d'elles ne devient numériquement égale à quelque autre étrangère à ce groupe.*

En comptant, comme on le fait souvent, une racine m^{uple} pour m racines simples, on peut dire que *le nombre des racines d'un groupe donné reste invariable,* aussi longtemps du moins qu'aucune autre ne vient à s'y introduire.

Cette deuxième observation constitue ce qu'on pourrait nommer le *Principe de la conservation du nombre des racines,* renfermant celui qui a lieu plus strictement pour les équations entières; il offre une importance du même ordre, et n'existe comme lui que grâce à l'extension des opérations analytiques aux quantités imaginaires.



CHAPITRE V.

LOGARITHME NÉPÉRIEN ET FONCTION EXPONENTIELLE.

Origine et propriétés fondamentales du logarithme népérien.

169. Au point de vue purement analytique, le seul auquel on puisse se placer quand on tient à concevoir les choses dans un enchaînement clair et naturel, et sauf de bien rares fonctions dont la plupart ne jouent aucun rôle sérieux même dans les spéculations abstraites, *toutes les transcendantes peuvent être considérées comme des résultats, prochains ou éloignés, d'intégrations exécutées sur des expressions de nature auparavant connue.* Cette conception, qui en fournit la classification la plus nette, place au premier rang *celles dépendant d'équations différentielles exclusivement algébriques par rapport aux variables indépendantes, aux fonctions inconnues et à leurs dérivées.*

Les *intégrales abéliennes* sont les transcendantes les plus remarquables de cette espèce; on a donné ce nom à toute intégrale indéfinie à une seule variable principale x, de la forme

$$(1) \qquad \int F(x, y)\,dx,$$

où y désigne une fonction implicite de x, racine d'une équation entière donnée

$$(2) \qquad f(x, y) = 0$$

qu'on peut supposer *irréductible,* c'est-à-dire dont le premier membre est indécomposable en facteurs entiers de degrés moindres, où F est une composante rationnelle à deux variables, donnée aussi.

170. Quand l'équation caractéristique (2) est du premier degré

seulement par rapport à y, cette fonction implicite se réduit à quelque fonction rationnelle de x, la fonction composée $F(x, y)$ également, et l'intégrale (1) à

$$\int F(x)dx, \tag{3}$$

où $F(x)$ n'est plus qu'une fraction rationnelle.

La décomposition de $F(x)$ opérée au n° 52 fournit des monomes entiers de la forme

$$ax^m$$

et des fractions simples de la forme

$$A(x-\alpha)^{-\mu}.$$

Aux monomes correspondent dans l'intégrale (3) calculée par décomposition (215*, II) les termes similaires

$$\frac{a}{m+1}x^{m+1} \qquad (215^*, \text{III});$$

aux fractions simples où $\mu \neq 1$, correspondent encore d'autres semblables

$$\frac{A}{-\mu+1}(x-\alpha)^{-\mu+1} \qquad (\textit{loc. cit.}).$$

Mais si la décomposition de $F(x)$ a donné des termes effectifs en

$$(x-\alpha)^{-1},$$

ils introduisent dans l'intégrale (3) une partie linéaire et homogène par rapport à des intégrales indéfinies telles que

$$\int \frac{dx}{x-\alpha}, \tag{4}$$

dont jusqu'ici *la nature propre nous est entièrement inconnue.*

En posant

$$\Psi(x) = \int \frac{dx}{x}, \tag{5}$$

l'intégrale (4) est $\Psi(x-\alpha)$, quelle que soit la constante α. *C'est donc en définitive à cette dernière fonction, la plus simple évidemment de toutes les intégrales abéliennes, que se ramè-*

nent ainsi tous les éléments encore inconnus de l'expression (3), *intégrale indéfinie d'une différentielle rationnelle quelconque.*

Telle est la principale cause de l'importance des diverses questions qui se rattachent à l'intégrale (5), dont nous allons maintenant faire une étude minutieuse.

171. Toutes les déterminations de l'intégrale indéfinie (5) ne différant les unes des autres que par des quantités constantes, on peut se borner à considérer une seule d'entre elles; il y a intérêt à *choisir celle qui se réduit à* o *pour* $x = 1$, c'est-à-dire la fonction (plus exactement pseudo-fonction) définie par la formule

$$u = \int_1^x \frac{dx}{x}, \tag{6}$$

où l'intégrale doit être prise sur tous les chemins partant de $x = 1$, ou bien, ce qui revient au même, définie par l'équation différentielle et la condition initiale

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \qquad u = 0 \text{ pour } x = 1. \tag{7}$$

On la nomme le *logarithme népérien* de x, et on la représente par le signe $l(x)$.

Voici les premières conséquences de cette définition.

I. *Le logarithme est localement olotrope pour toute valeur de* x *non nulle, mais non olotrope en* $x = 0$. Car la fonction fractionnaire simple $\frac{1}{x}$, qui est placée sous le signe d'intégration dans la formule (6), jouit précisément de ces mêmes propriétés (**153***) (**208***).

On peut donc développer cette fonction par la formule de Taylor à partir de x_i, *valeur initiale quelconque de* x *non* $= 0$, *et le rayon de convergence maximum de la série est* $\text{mod}\, x_i$, *distance de* x_i *à cette unique valeur singulière* o (**201***).

II. Comme la différentiation indéfinie de l'équation (7) donne immédiatement

$$\frac{d^m u}{dx^m} = (-1)^{m-1} \frac{1.2\ldots(m-1)}{x^m},$$

le développement dont il s'agit est

$$(8)\quad u = u_i + \frac{1}{1}\,\frac{x - x_i}{x_i} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - x_i}{x_i}\right)^2 + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{m}\left(\frac{x - x_i}{x_i}\right)^m + \ldots.$$

Nous l'écrirons quelquefois

$$(9)\qquad u = u_i + \lambda\left(1 + \frac{x - x_i}{x_i}\right).$$

en posant, pour abréger,

$$(10)\qquad \lambda(1 + t) = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots,$$

série entière dont le rayon de convergence maximum est 1, et dont l'étude directe, faite par la méthode employée au n° 78, III, ramènerait par une autre voie aux conclusions ci-dessus (I) (*Cf.* 80, III).

III. De ce que les quantités positives $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots$ décroissent sans cesse et indéfiniment, on conclut (100*) que *la série* (10) *qui a* 1 *pour rayon de convergence maximum est encore convergente pour toute valeur de* t, *ayant* 1 *pour module sans être* $= -1$.

Il en résulte que *la formule* (8) *est encore valable pour toutes les valeurs de* x *situées sur la circonférence de centre* x_i *et de rayon* $= \operatorname{mod} x_i$, *à l'exception de la valeur* $x = 0$. Car la série est convergente comme on vient de le voir, partant continue (126*), et le logarithme aussi, puisqu'il y est olotrope (I).

Les séries (10), (8), sont divergentes; la première pour $t = -1$, la seconde par suite pour $x = 0$. *Cette valeur de* x *n'est donc jamais accessible au cheminement, et nous l'exclurons absolument de nos calculs, comme aussi tout développement fait autrement que sous la condition*

$$\operatorname{mod}(x - x_i) < \operatorname{mod} x_i.$$

Pour le tracé des chemins praticables au cheminement, nous retombons donc exactement ici sur les règles concernant la fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$ (80, III *in fine*).

IV. Comme en $x_0 = 1$, on prend $u_0 = 0$: l'emploi répété de la

formule (9) donne au bout d'un chemin quelconque

$$(11)\quad u_i = \lambda\left(1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0}\right) + \lambda\left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1}\right) + \ldots + \lambda\left(1 + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}\right).$$

V. *Si les quantités*

$$\ldots,\quad x_{i-1},\quad x_i,\quad x_{i+1},\quad \ldots$$

forment une progression géométrique de raison q, les valeurs correspondantes de $l(x)$ sont les termes d'une progression arithmétique de raison $\lambda(1 + \overline{q-1})$.

Car les égalités supposées

$$\ldots = \frac{x_i}{x_{i-1}} = \frac{x_{i+1}}{x_i} = \ldots = q$$

donnent

$$\ldots = \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \ldots = q - 1,$$

d'où (II)

$$\ldots = u_i - u_{i-1} = u_{i+1} - u_i = \ldots = \lambda(1 + \overline{q-1})$$

[en supposant bien entendu $\mathrm{mod}(q-1) < 1$].

VI. Nous noterons enfin une relation très intéressante entre le logarithme et la fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$ des n°s 78 *et suiv.*

L'expression de la valeur de cette dernière au bout du chemin $[x_0(=1)x_1 x_2 \;..\, x_{i-1} x_i x]$ est évidemment

$$(12)\quad \psi(\mathfrak{m}, x) = \varphi\left(\mathfrak{m}, 1 + \frac{x_1 - x_0}{x_0}\right) \cdots \varphi\left(\mathfrak{m}, 1 + \frac{x_i - x_{i-1}}{x_{i-1}}\right) \varphi\left(\mathfrak{m}, 1 + \frac{x - x_i}{x_i}\right).$$

On a de plus (85)

$$\varphi^{(1,0)}_{\mathfrak{m},t}(0, 1 + t) = \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \ldots = \lambda(1 + t).$$

Si donc on fait $\mathfrak{m} = 0$ dans la formule (12) différentiée une fois par rapport à $\mathfrak{m}$, et si l'on a égard à la formule (11) construite pour le même chemin, il vient, *toujours au bout du même chemin,*

$$l(x) = \psi^{(1,0)}_{\mathfrak{m},x}(0, x).$$

C'est la relation dont il s'agit; elle permettrait de déduire facilement, des propriétés fondamentales de la fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$, celles du logarithme qui précèdent et beaucoup de celles qui vont suivre. Mais la méthode directe est évidemment préférable, bien qu'elle soit un peu plus longue.

172. *Si les variables $x', x'', \ldots, x^{(g)}$ cheminent arbitrairement (à partir de $x' = x'' = \ldots = x^{(g)} = 1$), et si*

$$K', \quad K'', \quad \ldots, \quad K^{(g)}$$

sont des exposants réels commensurables quelconques, on a toujours identiquement

$$(13) \quad l(x'^{K'} x''^{K''} \ldots x^{(g)K^{(g)}}) = K' l(x') + K'' l(x'') + \ldots + K^{(g)} l(x^{(g)}),$$

pourvu, bien entendu, que l'on ait pris 1 *pour valeur initiale commune de tous ceux des monomes $x'^{K'}, x''^{K''}, \ldots$ dont les exposants sont fractionnaires* (**118**), *et que la valeur du premier membre de cette relation soit calculée conformément aux règles de la théorie des fonctions composées* (**251***).

Pour établir cette identité dans toute sa généralité, il suffit (**252***) d'en vérifier l'exactitude sur les premiers développements des deux membres, c'est-à-dire *pour toutes les valeurs de $x', x'', \ldots$ rendant inférieurs à* 1 *les modules des excès sur* 1, *tant de ces valeurs elles-mêmes que de la quantité $x'^{K'} x''^{K''} \ldots$* (**71**, III) (**171**, I). Or c'est ce qui a lieu :

I. *Quand g se réduit à* 1, car alors les dérivées par rapport à x' des deux membres de la relation (13), savoir

$$l(x'^{K'}) = K' l(x'),$$

se réduisent respectivement à

$$\frac{K' x'^{K'-1}}{x'^{K'}} = \frac{K'}{x'} \quad (118), (171);$$

de plus ces deux membres s'annulent simultanément pour $x' = 1$;

II. *Quand g a une valeur quelconque, si on suppose l'identité démontrée pour $g - 1$ variables,* car alors les mêmes déri-

vées prennent encore les valeurs identiquement égales

$$\frac{K' x'^{K'-1} x''^{K''} \dots x^{(g)K^{(g)}}}{x'^{K'} x''^{K''} \dots x^{(g)K^{(g)}}}, \quad \frac{K'}{x'},$$

et, pour $x' = 1$, l'identité se réduit à

$$l(x''^{K''} \dots x^{(g)K^{(g)}}) = K'' l(x'') + \dots + K^{(g)} l(x^{(g)})$$

qui est supposée exacte;

III. *Quand g a une valeur quelconque, et maintenant sans condition,* car notre identité, ayant été établie pour une variable (I) est vraie pour deux, puis pour trois, et ainsi de suite (II).

173. Comme la distribution des valeurs ordinaires et singulières de x, observée pour la fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$ (80, III), se reproduit identiquement pour celle que nous étudions en ce moment, les mêmes particularités se représenteront aussi dans le calcul de cette dernière par cheminement, excepté, bien entendu, celles tenant à la nature propre du développement élémentaire (8) qui est ici entièrement différente. Par exemple, les mêmes tracés de chemins sont permis ou non, et tout chemin conduisant de x_0 à X équivaut, pour le calcul de la valeur finale de u en X, au chemin simple $[x_0 x_{(1)} \mathrm{X}]$ du n° 87, compliqué par quelque parcours de l'anneau $[\mathrm{O}_x]$ ceignant l'origine O_x.

La comparaison des valeurs finales de $u = l(x)$ au bout des divers chemins qui mènent de x_0 à X conduit à ce théorème :

En appelant U *celle qui correspond au chemin simple, et* $\mathrm{U}^{(k)}$ *celle résultant de l'insertion entre ses deux tronçons* $[x_0 x_{(1)}]$ $[x_{(1)} \mathrm{X}]$, *de l'anneau* $[\mathrm{O}_x]$ *parcouru k fois dans le sens direct* (89), *on a*

$$\mathrm{U}^{(k)} = \mathrm{U} + k\varpi, \tag{14}$$

où ϖ *est une constante spéciale dont la valeur est indépendante de la forme de l'anneau.*

I. Conservant les notations du n° 88, nous appellerons $u_{(1)}$ la valeur acquise par $l(x)$ en $x_{(1)}$, extrémité du premier tronçon du

chemin simple, puis

$$x_{(1)},\quad x_{(2)},\quad \ldots,\quad x_{(s)},\quad x_{(1)}$$

les sommets du chemin constitué par l'anneau, écrits dans l'ordre où on les rencontre en y faisant une révolution directe, et

$$u_{(1)},\quad u_{(2)},\quad \ldots,\quad u_{(s)},\quad u_{(1)}^{(1)},$$

les valeurs correspondantes de $l(x)$.

La formule générale (9) donnera

$$u_{(i+1)} = u_{(i)} + \varpi_{(i)},$$

en posant pour abréger

$$\varpi_{(i)} = \lambda\left(1 + \frac{x_{(i+1)} - x_{(i)}}{x_{(i)}}\right),$$

d'où successivement

$$u_{(2)} = u_{(1)} + \varpi_{(1)},\quad u_{(3)} = u_{(2)} + \varpi_{(2)},\quad \ldots,\quad u_{(s)} = u_{(s-1)} + \varpi_{(s-1)},\quad u_{(1)}^{(1)} = u_{(s)} + \varpi_{(s)},$$

puis en ajoutant membre à membre

$$(15)\qquad u_{(1)}^{(1)} = u_{(1)} + \varpi,$$

où l'on a posé

$$(16)\qquad \varpi = \varpi_{(1)} + \varpi_{(2)} + \ldots + \varpi_{(s)}.$$

De la formule (15) on passe immédiatement, par le raisonnement employé au numéro cité, à

$$U^{(+1)} = U + \varpi,$$

puis à la relation générale (14).

II. Avec deux anneaux directs quelconques $'[O_x]$, $''[O_x]$, et deux chemins non séparés par l'origine que nous tracerons de x_0 à X, nous formerons, comme au n° 88, IV, deux chemins composés équivalents. On en conclut

$$U + {}'\varpi = U + {}''\varpi,$$

où $'\varpi$, $''\varpi$ représentent les valeurs de la constante ϖ qui correspondent à ces deux anneaux, puis

$$'\varpi = {}''\varpi,$$

ce qui nous restait à démontrer. [On pourrait dire encore que les valeurs de l'intégrale (5), prises sur chacun des anneaux, sont égales parce que ceux-ci sont tous deux directs et que la fonction x^{-1} placée sous le signe $\int$ est olotrope dans l'espace qui les sépare (229*, V)].

Nous reviendrons incessamment (180, *inf.*) sur le calcul de la constante ϖ.

174. D'après cela, *les valeurs finales de $l(x)$ au bout du chemin simple compliqué d'anneaux directs en nombres*

$$\ldots,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots$$

sont respectivement les termes de la progression arithmétique de raison ϖ, indéfinie dans les deux sens

$$\ldots,\quad U-2\varpi,\quad U-\varpi,\quad U+0.\varpi=U,\quad U+\varpi,\quad U+2\varpi,\quad \ldots.$$

175. Nous passons aux résultats essentiels de la discussion numérique du logarithme.

En appelant ε une quantité réelle <1 en valeur absolue, et $l(x+\varepsilon x)$ la valeur que prend le logarithme quand on passe directement de x à $x+\varepsilon x$, en partant du premier de ces points avec la valeur $l(x)$, on a

$$l(x+\varepsilon x)=l(x)+h, \tag{17}$$

où h est une quantité réelle $\lesseqgtr 0$ en même temps que ε.

La formule générale (9) donne immédiatement

$$h=\lambda(1+\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{1}-\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{3}-\ldots,$$

série dont la somme est nulle si $\varepsilon=0$, négative si $\varepsilon<0$, car alors tous ses termes sont négatifs, positive enfin si $\varepsilon>0$. Effectivement et à cause de $\varepsilon<1$, ses termes sont alternativement positifs et négatifs, avec des valeurs absolues qui décroissent sans cesse et indéfiniment (101*).

176. Au point de vue graphique, on en conclut ce qui suit : *quand x se meut sur une demi-droite fixe issue de l'origine* O_x,

le point $u = l(x)$ se meut dans le plan des axes $O_u U'$, $O_u U''$ *sur une parallèle au premier de ces axes et cela dans sa direction positive ou négative, selon que, dans son mouvement, le point x s'éloigne ou se rapproche de l'origine* O_x. Effectivement le premier élément seul de $l(x)$ varie, en croissant dans le premier cas, en décroissant dans le second.

Nous verrons tout à l'heure (**178**, *inf.*) que u traverse l'axe $O_u U''$ quand x traverse la circonférence de rayon 1 décrite de l'origine O_x comme centre.

177. Le point $x_0 = 1$ se trouvant sur la partie positive de l'axe des quantités réelles, ainsi que toute valeur positive de x, on peut atteindre cette dernière par un cheminement exécuté exclusivement sur cette partie, et chaque accroissement attribué à x sera de la forme ci-dessus εx. Comme on part de $x = x_0 = 1$ avec la valeur initiale réelle $l(1) = 0$, l'application répétée de la formule (17) montre que *la valeur atteinte par $l(x)$ sera toujours réelle;* de plus *elle est unique,* parce que tous les chemins de mêmes extrémités dont les sommets appartiennent à la partie positive de l'axe des quantités réelles s'équivalent évidemment.

Cette valeur réelle de $l(x)$ est $\gtreqless 0$, *selon que la valeur positive de x à laquelle elle correspond, est* $\gtreqless 1$. Car, en partant de 1 et marchant sur l'axe $O_x X'$, d'abord dans sa direction positive, ensuite dans sa direction négative, $l(x)$ part de 0 en n'éprouvant jamais que des accroissements qui sont positifs dans le premier cas, négatifs dans le second.

178. *Quels que soient la valeur de x de module ξ et le chemin suivi pour y arriver, et si l'on représente par $'l(x)$ le premier élément de $l(x)$, on a*

$$'l(x) = l(\xi),$$

valeur réelle atteinte par $l(x)$ partant de $l(1) = 0$ quand on chemine de 1 à ξ sur la partie positive de l'axe des quantités réelles (**177**).

D'où en particulier, pour $\operatorname{mod} x = 1$,

$$'l(x) = 0.$$

Si x désigne la quantité conjuguée à x, on a sans cesse

$$\xi^2 = x\text{x} = \xi\xi,$$

et par suite (172)

$$l(\xi^2) = l(x) + l(\text{x}) = 2\,l(\xi).$$

Mais les termes du membre médian sont des quantités conjuguées, parce que x, x le sont sans cesse, et que les coefficients de la série (10) sont tous réels. Ce membre se réduit donc à $2'l(x)$, d'où

$$2'l(x) = 2\,l(\xi),$$

ce qu'il fallait prouver.

179. Ainsi donc au point de vue graphique, *quand le point x se meut sur une circonférence $[O_x, \xi]$ ayant l'origine O_x pour centre et ξ pour rayon, le second élément de $l(x)$ seul varie, et le point $u = l(x)$ se meut ainsi sur quelque parallèle à l'axe $O_u U''$.*

Quand la rotation de x est directe, la translation de u a la direction de la partie positive de l'axe dont il s'agit, et inversement.

Si le passage de x_i à x_{i+1} s'effectue par exemple dans le sens direct, le second élément du rapport $\frac{x_{i+1}}{x_i}$ est nécessairement positif (98, I), celui de $t = t' + it'' = \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i} = \frac{x_{i+1}}{x_i} - 1$ également, par suite aussi celui de

$$(17\ bis)\quad u_{i+1} - u_i = \lambda\left(1 + \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right) = \frac{1}{1}\left(\frac{x_{i+1} - x_i}{x_i}\right) - \ldots.$$

Car, t étant infiniment petit, on a $\lambda(1 + t) + l(1 = t)$, d'où (172)

$$\begin{aligned}
\lambda(1 + t' + it'') &= \lambda\left[(1 + t')\left(1 + \frac{it''}{1 + t'}\right)\right] \\
&= \lambda(1 + t') + \frac{1}{1}\,\frac{it''}{1 + t'} - \frac{1}{2}\left(\frac{it''}{1 + t'}\right)^2 + \ldots \\
&= \lambda(1 + t') + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{t''}{1 + t'}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{t''}{1 + t'}\right)^4 + \ldots\right] \\
&\quad + i\left[\frac{1}{1}\,\frac{t''}{1 + t'} - \frac{1}{3}\left(\frac{t''}{1 + t'}\right)^3 + \ldots\right],
\end{aligned}$$

expression dont les deux premières parties sont réelles, et dans

laquelle le coefficient de i finit par conserver le signe $+$ parce que t' tend vers o et t'' aussi en restant positif.

En appelant V_x, V_u *les vitesses simultanées de ces deux points, on a*

$$\frac{V_u}{V_x} = \frac{1}{\xi}. \tag{18}$$

Si l'on fait tendre x_{i+1} vers x_i, la formule (17 *bis*) donne effectivement

$$\lim \frac{\operatorname{mod}(u_{i+1} - u_i)}{\operatorname{mod}(x_{i+1} - x_i)} = \frac{1}{\xi_i}.$$

180. *L'augment* ϖ (173) *est une quantité imaginaire dont les éléments sont, le premier nul, le second positif.*

Nous calculerons plus commodément la constante ϖ en donnant à l'anneau la forme déjà utilisée au n° 100 dans la théorie de la fonction $\psi(\mu, x)$. Il vient ainsi, d'après la formule (16),

$$\varpi = 4[\lambda(1 + \overline{q_1 - 1}) + \lambda(1 + \overline{q_2 - 1}) + \ldots + \lambda(1 + \overline{q_\sigma - 1})], \tag{19}$$

les lettres $q_1, q_2, \ldots, q_\sigma$ conservant, bien entendu, le sens qu'elles avaient au numéro cité.

Pour calculer généralement $\lambda(1 + \overline{q - 1})$, nous observerons que cette quantité se confond avec la valeur acquise par $l(x)$ en q, au bout d'un pas fait directement de $x = 1$ à $x = q$ que nous décomposerons, chose évidemment permise, en deux autres conduisant, le premier de $x = 1$ à $x = q'$, premier élément de q, le second de $x = q'$ à $x = q' + iq'' = q$.

Le premier de ces deux pas donne en q'

$$l(q') = \frac{1}{1}\frac{q' - 1}{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{q' - 1}{1}\right)^2 + \ldots;$$

le second donne en q, si l'on représente par $\chi (< 1)$ la pente de q (98, II),

$$\left\{\begin{aligned} l(q) &= \lambda(1 + \overline{q - 1}) = l(q') + \lambda\left(1 + \frac{q - q'}{q'}\right) \\ &= l(q') + \lambda(1 + i\chi) = l(q') + \frac{i\chi}{1} - \frac{(i\chi)^2}{2} + \frac{(i\chi)^3}{3} - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

En mettant en évidence les éléments de $l(q)$, et posant pour abréger

$$(21) \qquad \Gamma = \frac{\chi}{1} - \frac{\chi^3}{3} + \frac{\chi^5}{5} - \ldots,$$

il vient finalement

$$\lambda(1 + \overline{q - 1}) = i\Gamma,$$

parce que mod$q$ étant $= 1$, le premier élément de

$$\lambda(1 + \overline{q - 1}) = l(q)$$

s'évanouit (**178**). La formule (19) donne donc

$$(22) \qquad \varpi = i[4(\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_\sigma)],$$

où, en vertu de la relation (21), $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\sigma$ et par suite le multiplicateur de i sont des quantités toutes positives.

Les formules (21), (22), très légèrement modifiées, sont celles qu'on emploie effectivement au calcul numérique de ϖ (**193**, *inf.*).

La non-nullité de l'augment ϖ est un point essentiel de la théorie dont nous sommes occupés. On peut l'établir d'une manière entièrement différente qui sera indiquée plus loin (**219** *bis, inf.*).

181. *Quand* X *est une quantité réelle positive, tout chemin non équivalent au segment* [1X] *de l'axe des quantités réelles donne pour* $l(X)$ *une valeur imaginaire.*

Car ce segment donne pour $l(X)$ une quantité réelle (**177**) et un chemin non équivalent, cette même quantité augmentée de $k.\varpi$, où ϖ est imaginaire (**180**) et $k \neq 0$ par hypothèse.

182. *Si* X *est une quantité non réelle positive,* $l(X)$ *est imaginaire quel que soit le chemin suivi.*

En appelant $X_{(1)}$ la trace de la demi-droite $O_x X$ sur la circonférence $[O_x, 1]$, nous remplacerons le chemin considéré par un autre équivalent composé de : 1° l'arc de cette circonférence conduisant de $x = 1$ à $x = X_{(1)}$ par une marche de sens rotatif constant; 2° par le segment de la demi-droite, qui conduit de $x = X_{(1)}$ à $x = X$.

En supposant d'abord direct l'arc considéré, qui par hypothèse

n'est pas nul, appelant n le plus grand nombre des quadrants qui y sont contenus, il est évident qu'on peut écrire

$$X_{(1)} = i^n X_{(1)}^{(0)},$$

où le dernier facteur n'a aucun élément négatif, puis décomposer i et $X_{(1)}^{(0)}$ en facteurs primaires q de modules $= 1$ et de pentes $\gamma < 1$, tels (98, II, III, IV) qu'on pourra effectuer le parcours de cet arc en faisant passer x successivement

$$\text{de } 1 \text{ à } q_1, \quad \text{puis à } q_1 q_2, \quad \text{à } q_1 q_2 q_3, \quad \ldots, \quad \text{à } q_1 q_2 \ldots q_\Sigma = X_{(1)},$$

ce qui donne comme ci-dessus (180)

$$l(X_{(1)}) = i(\Gamma_1 + \ldots + \Gamma_\Sigma),$$

le multiplicateur de i étant essentiellement positif.

Quant au segment rectiligne, son parcours laisse invariable le second élément de $l(x)$ (176).

Le cas d'un arc rétrograde se ramène immédiatement au précédent, par la considération de l'arc *conjugué* qui est alors direct, et par un raisonnement analogue à celui du n° 178.

183. Il résulte des premiers principes de la théorie du cercle, que *le second élément de $l(X)$ a pour représentation géométrique la longueur même de l'arc considéré ci-dessus, prise positivement ou négativement selon que le sens de son parcours est direct ou rétrograde.*

Ce fait se rattache aux applications géométriques, et ce n'est pas ici le lieu de l'approfondir. La formule (18) suffit toutefois à en constater l'exactitude; car pour $\xi = 1$, les vitesses des points x et $u = l(x)$ étant toujours égales, les espaces parcourus en même temps par le premier sur la circonférence $[O_x, 1]$ à partir de $x = 1$, par le second sur l'axe des seconds éléments à partir de $u = 0$, sont égaux nécessairement aussi. Les mouvements simultanés de ces deux points ont d'ailleurs les directions requises (179).

On a en particulier

$$\varpi = i.2\pi,$$

2π *représentant, comme d'habitude, la longueur de la circonférence de rayon* 1. Cette observation n'offre aucun intérêt ana-

lytique, parce que toute expression est susceptible de quelque représentation géométrique, et qu'à ce point de vue il n'importe en rien que ce soit l'une ou l'autre. Mais elle était nécessaire pour justifier *l'usage de représenter par* $2\pi i$ *l'augment du logarithme népérien,* usage auquel nous nous conformerons désormais.

184. *Quand x est infiniment petite ou infinie, le second élément de $l(x)$ est indéterminé, mais le premier est infini, négatif dans le premier cas, positif dans le second.*

On a effectivement

$$l(x) = l(\xi) + iu'',$$

où $l(\xi)$ est la détermination réelle du logarithme de ξ, module de x (**178**), où u'' représente l'arc de cercle défini ci-dessus (**183**). Cette dernière quantité est indéterminée, comme le mouvement giratoire dont x peut être animée en se rapprochant ou s'éloignant de l'origine.

Si l'on suppose ensuite que ξ croisse de o à ∞ par des valeurs en progression géométrique croissante de raison q (positive et > 1), les valeurs correspondantes de $l(\xi)$ seront les termes d'une progression arithmétique de raison $\lambda(1 + \overline{q - 1}) = l(q) > 0$ (**171**, V) (**177**), partant croissante; par suite $l(\xi)$ croîtra de $-\infty$ à $+\infty$.

Les choses se passeront de la même manière pour tout autre mode de croissance de ξ, car la dérivée $\frac{1}{\xi}$ de $l(\xi)$ (**171**) étant toujours positive, cette fonction est toujours croissante (**19** *et suiv.*).

185. Le signe $l(X)$, posé sans autre indication, représente assez souvent l'ensemble des valeurs que $l(x)$ acquiert en X au bout de tous les chemins pouvant être tracés de $x = 1$ à $x = X$, et qu'on nomme alors *les logarithmes de* X. Quelquefois aussi il représente l'un de ces logarithmes, spécifié d'une manière ou d'une autre.

Ce point de vue comporte quelques observations :

I. *Si k représente un entier absolument indéterminé (positi nul ou négatif), tous les logarithmes de* X *sont renfermés dans l'expression*

$$l(X) + k.2\pi i,$$

où $l(X)$ *désigne l'un d'entre eux choisi arbitrairement* (173) (183).

II. *Tous ces logarithmes sont imaginaires, sauf le cas où* X *est une quantité réelle positive, et où l'un d'eux, mais un seul, est réel* (177) (181) (182).

Dans ce dernier cas, la notation $l(X)$ représente habituellement cette détermination réelle unique.

III. *La relation* (13) *cesse en général d'être exacte quand on y remplace les déterminations voulues des logarithmes, par d'autres prises au hasard; mais elle le redevient par l'addition au second membre, de la constante*

$$(23)\qquad (-k + k'K' + k''K'' + \ldots + k^{(g)}K^{(g)})2\pi i,$$

où k, k', ... *sont des entiers convenablement choisis.* Car les déterminations des logarithmes requises pour l'exactitude de cette relation sont respectivement égales à d'autres quelconques augmentées de tels ou tels multiples entiers de $2\pi i$ (I).

IV. *Mais quand les quantités* x', x'', ..., *sont toutes réelles positives, et quand on adopte pour* $x'^{K'}$, $x''^{K''}$, ... *leurs déterminations positives* (94), *pour leurs logarithmes et celui de leur produit, leurs déterminations réelles, la relation* (13) *subsiste toujours sous la même forme extérieure.* Car le choix de pareilles déterminations rendant réels à la fois les deux membres de cette relation, il faut de toute nécessité que dans le terme additionnel (23) le facteur entre parenthèses se réduise à o.

A un facteur constant près (208 *et suiv., inf.*), cette formule est alors celle qui fait des logarithmes un instrument si expéditif pour l'exécution indirecte des calculs numériques usuels. Les cas particuliers les plus employés sont

$$(24)\qquad \begin{cases} l(x'x''\ldots x^{(g)}) = l(x') + l(x'') + \ldots + l(x^{(g)}), \\ l\left(\dfrac{x'}{x''}\right) = l(x') - l(x''), \\ l(x'^{K'}) = K'l(x'). \end{cases}$$

V. Les seconds éléments des logarithmes de X sont ce qu'on nomme les *arguments* de cette quantité; ils sont représentés

géométriquement par les arcs de cercle définis au n° **183**, augmentés des multiples entiers de la longueur 2π de la circonférence de rayon 1.

En égalant les seconds éléments des deux membres de la formule (13) modifiée comme nous l'avons expliqué ci-dessus (III), on obtient en particulier une représentation géométrique de la multiplication, de la division et de l'extraction des racines. Mais nous n'en avons que faire, et nous n'insisterons pas.

186. Les logarithmes des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité ont des valeurs remarquables qu'il est utile de calculer.

En appelant $\alpha_m = \Phi\left(\frac{1}{m}\right)$ la racine principale directe (**113**), chacune des autres a pour expression $\alpha_m^n = \Phi\left(\frac{n}{m}\right)$, où n est quelque entier positif $< m$; en représentant alors par $l(\alpha_m^n)$ la valeur de $l(x)$ au bout du plus court chemin qui conduit x, dans le sens direct, de 1 à α_m^n sur la circonférence de centre O_x et de rayon $= 1$, *on a toujours*

$$(25) \qquad l(\alpha_m^n) = n\,\frac{2\pi i}{m}.$$

Quand on a $\operatorname{mod}(\alpha_m - 1) < 1$, les quantités

$$1, \quad \alpha_m, \quad \alpha_m^2, \quad \ldots, \quad \alpha_m^n, \quad \ldots, \quad \alpha_m^{m-1}, \quad \alpha_m^m (= 1)$$

jalonnent un chemin fermé qui est praticable pour le calcul de $l(x)$, parce qu'on y a sans cesse

$$(26) \qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\alpha_m^{i+1} - \alpha_m^i}{\alpha_m^i}\right) = \operatorname{mod}(\alpha_m - 1) < 1,$$

d'où $\operatorname{mod}(\alpha_m^{i+1} - \alpha_m^i) < \operatorname{mod}\alpha_m^i$ (**171**, III). D'autre part, le passage de chaque sommet au suivant ajoute à $l(x)$ l'accroissement de valeur constante

$$\Lambda = \lambda\left(1 + \frac{\alpha_m^{i+1} - \alpha_m^i}{\alpha_m^i}\right) = \lambda(1 + \overline{\alpha_m - 1}) \quad (\mathbf{171}, \text{ II}).$$

Enfin le chemin considéré fait faire à x une seule révolution de sens direct autour de l'origine O_x, et son premier tronçon limité

à α_m^n conduit $l(x)$ à la valeur cherchée. Il en résulte immédiatement

$$m\Lambda = 2\pi i \quad (183), \qquad l(\alpha_m^n) = n\Lambda,$$

d'où la formule (25).

Quand on a, au contraire, $\text{mod}(\alpha_m - 1) \geqq 1$, on prendra un multiple de m, $M = mq$ assez grand pour donner $\text{mod}(\alpha_M - 1) < 1$ (**113** *bis*, II), et la considération du chemin analogue, mais maintenant praticable,

$$1, \quad \alpha_M, \quad \alpha_M^2, \quad \ldots, \quad \alpha_M^{nq}, \quad \ldots, \quad \alpha_M^{M-1}, \quad \alpha_M^M = 1,$$

conduira à

$$l(\alpha_M^{nq}) = nq\,\frac{2\pi i}{M} = n\,\frac{2\pi i}{m},$$

par suite à la formule (25) encore, à cause de $\alpha_M^{nq} = (\alpha_M^q)^n = \alpha_m^n$ (**113** *bis*, I).

On notera les cas particuliers suivants

$$l(-1) = l(\alpha_2^1) = 1\,\frac{2\pi i}{2} = \pi i,$$

$$l(i) = l(\alpha_4^1) = 1\,\frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi i}{2},$$

$$l(-i) = l(\alpha_4^3) = 3\,\frac{2\pi i}{4} = \frac{3}{2}\pi i.$$

S'il s'agissait du plus court chemin conduisant de 1 à α_m^n sur la même circonférence, mais dans le sens rétrograde, il faudrait évidemment remplacer la formule (25) par

$$l(\alpha_m^n) = -2\pi i + n\,\frac{2\pi i}{m} = -(m-n)\,\frac{2\pi i}{m}.$$

186 *bis*. On a quelquefois à calculer l'accroissement éprouvé par $l(x)$ quand x chemine d'une valeur particulière x_0 (non $= 0$) à αx_0, produit de celle-ci par quelque racine de l'unité. En supposant $\alpha = \alpha_m^n$, et ce chemin équivalent au plus petit arc direct que ces points découpent sur la circonférence ayant O_x pour centre avec $\text{mod}\,x_0$ pour rayon, la considération du chemin

$$x_0, \quad \alpha_M x_0, \quad \alpha_M^2 x_0, \quad \ldots, \quad \alpha_M^{nq} x_0, \quad \ldots, \quad \alpha_M^M x_0 = x_0$$

conduit comme ci-dessus à

$$(27) \qquad l(\alpha_m^n x_0) - l(x_0) = n\,\frac{2\pi i}{m}.$$

S'il s'agissait du plus petit arc de sens rétrograde découpé par les mêmes points sur la même circonférence, on trouverait

$$(28) \qquad l(\alpha_m^n x_0) - l(x_0) = -(m-n)\,\frac{2\pi i}{m}.$$

Pour $m = 2$, $n = 1$, on aurait par exemple

$$l(-x_0) - l(x_0) = \pm \pi i,$$

selon que la demi-circonférence à considérer serait directe ou rétrograde.

Tous les autres chemins donnent évidemment à l'accroissement de $l(x)$ l'une ou l'autre des valeurs (27), (28), sauf des multiples entiers de $2\pi i$ qui s'aperçoivent immédiatement.

187. Le logarithme ne cessant d'être olotrope que pour une valeur nulle (ou infinie) de la variable (**171**, I), *les phases singulières de la fonction composée* $l\mathrm{U}(x, y, \ldots)$ *ne peuvent correspondre qu'à celles de la fonction simple* $\mathrm{U}(x, y, \ldots)$, *ainsi qu'aux valeurs de* $x, y, \ldots,$ *la rendant nulle ou infinie.*

Comme au n° **126**, le calcul par cheminement de $l\mathrm{U}(x, y, \ldots)$ se ramène au tracé de la ligne décrite par $u = \mathrm{U}(x, y, \ldots)$, puis au calcul de $l(u)$ sur ce chemin (**171**, II). Quand $\mathrm{U}(x, y, \ldots)$ est décomposable en facteurs plus simples, la relation (13) peut rendre l'opération très facile. On en trouvera plus loin un exemple (**190**, *inf.*).

Pour différentier $l\mathrm{U}(x)$, on a la formule évidente (**256***)

$$\frac{dl\mathrm{U}(x)}{dx} = \frac{1}{\mathrm{U}(x)}\,\mathrm{U}'(x).$$

Une fonction composée de $l(x)$ se trouve naturellement dans une phase singulière, tout au moins critique, quand x est infiniment petite ou infinie. Assez souvent on a intérêt à y remplacer x par e^y, pour étudier ensuite ce qui s'y passe quand on rend le premier élément de y infini, négatif ou positif (**201**, *inf.*). Par exemple,

on trouve ainsi que, pour x infiniment petite positive, $x^{\mu}[l(x)]^{\nu}$ tend vers zéro, quels que soient les exposants commensurables positifs μ, ν (207, *inf.*).

188. Le logarithme népérien que nous connaissons maintenant par ses valeurs numériques et par ses propriétés caractéristiques, à peu près comme nous connaissions auparavant les fonctions rationnelles, les monomes irrationnels, etc., fournit le dernier élément qui nous manquait pour opérer l'intégration d'une fonction rationnelle quelconque (170), et pour compléter, dans tous les cas, l'expression que nous avons donnée de l'intégrale indéfinie d'une fonction méromorphe dans une aire limitée donnée, ou d'un développement rhizomorphe (41) (157).

Quand la fonction sous le signe d'intégration contient dans son développement un terme de la forme

$$\frac{A}{x - \mathfrak{a}}$$

où A n'est pas nul, il lui correspond évidemment dans celui de l'intégrale le terme

$$A\,l(x - \mathfrak{a})$$

introduisant dans sa phase singulière en $x = \mathfrak{a}$ une complication *logarithmique*. De ce chef, par exemple, *l'intégrale augmente de* $A.2\pi i$ *à chaque révolution directe de x autour du point* $\mathfrak{a}$; effectivement, nous avons déjà remarqué au n° 126 que la différence $x - \mathfrak{a}$ se meut par rapport à sa propre origine, comme x relativement au point $\mathfrak{a}$ (173) (183), etc.

189. Voici la plus importante des propositions se rattachant aux considérations de ce genre : *Si la fonction $f(x)$ est méromorphe dans l'aire limitée et imperforée* S, *mais olotrope sur son contour* (C), *l'intégrale définie* $\int_{(C)} f(x)\,dx$, *prise en parcourant ce contour une fois dans le sens direct, est liée au résidu intégral de $f(x)$ dans l'aire considérée* (56) *par la relation*

$$\int_{(C)} f(x)\,dx = 2\pi i \mathop{\mathcal{E}}_{S} f(x). \tag{29}$$

En intégrant par décomposition, après avoir substitué à $f(x)$ le second membre de la relation (14) du n° **39**, et en représentant par $F(x)$ celui de la formule (16) du n° **41**, il vient évidemment

$$(30) \quad \int f(x)\,dx = F(x) + A_{\mu_1-1}^{(1)} l(x-\alpha_1) + \ldots + A_{\mu_\gamma-1}^{(\gamma)} l(x-\alpha_\gamma).$$

Quand x revient à son point de départ après avoir parcouru le contour (C), le terme $F(x)$, méromorphe dans l'aire S partant monodrome, revient à sa valeur initiale et ne donne rien dans l'intégrale définie. Mais comme le contour constitue un anneau direct autour de l'un quelconque des points α_1, α_2, ..., chaque logarithme augmente de $2\pi i$ (**188**). Il reste donc

$$\int_{(C)} f(x)\,dx = 2\pi i\left(A_{\mu_1-1}^{(1)} + \ldots + A_{\mu_\gamma-1}^{(\gamma)}\right),$$

où, par définition, la somme entre parenthèses est précisément le résidu intégral figurant dans la relation (29).

En faisant varier la nature de $f(x)$ et la forme du contour (C), en exécutant des transformations variées, Cauchy, auteur de ce théorème, en a déduit les valeurs d'une foule d'intégrales définies, les unes nouvelles, les autres déjà obtenues, mais par des procédés bien plus pénibles. Dans notre troisième Partie, nous expliquerons cette élégante méthode sur plusieurs exemples.

On a cru qu'elle réduisait des *intégrations* aux simples *différentiations* nécessaires pour calculer les résidus, et l'on s'en est étonné. Mais la relation transitoire (30) montre bien qu'au fond l'intégration est simplement ramenée à d'autres intégrations dont les résultats sont fournis, une fois pour toutes, par la théorie du logarithme.

190. Nous plaçons ici un autre théorème de Cauchy qui porte encore son nom.

Les mêmes choses étant admises que dans le précédent, avec la condition, pour $f(x)$, *de n'avoir aucun zéro sur le contour* (C), *si l'on nomme m la somme des degrés de multiplicité des zéros de* $f(x)$ *intérieurs à l'aire* S, μ *la même somme pour les infinis de cette fonction et* $\Delta lf(x)$ *la variation que fait éprouver à* $lf(x)$ *le parcours du contour* (C) *dans le sens direct, on a*

$$(31) \qquad m - \mu = \frac{\Delta lf(x)}{2\pi i}.$$

En choisissant convenablement les déterminations des logarithmes, la relation (2) du n° 31, combinée avec la formule (13), donne immédiatement

$$lf(x) = \Sigma m_i l(x - a_i) - \Sigma \mu_\iota l(x - \alpha_\iota) + l\mathfrak{f}(x).$$

d'où, après le parcours direct du contour (C),

$$\Delta lf(x) = \Sigma m_i \Delta l(x - a_i) - \Sigma \mu_\iota \Delta l(x - \alpha_\iota) + \Delta l\mathfrak{f}(x).$$

Dans le second membre de cette égalité, le dernier terme se réduit à zéro, car, $\mathfrak{f}(x)$ étant olotrope et sans zéro dans l'aire S, $l\mathfrak{f}(x)$ y est localement olotrope (187), par suite monodrome, puisque cette aire est imperforée (173*). D'autre part, on a, comme tout à l'heure,

$$\Delta l(x - a_i) = \Delta l(x - \alpha_\iota) = 2\pi i.$$

Il reste donc

$$\Delta lf(x) = (\Sigma m_i - \Sigma \mu_\iota) 2\pi i,$$

ce qu'il suffisait de prouver.

191. Quand $f(x)$ est olotrope dans l'aire S, le nombre μ est nul, et la formule (31) ramène au calcul de $\Delta lf(x)$ celui de m, somme des degrés de multiplicité des racines de l'équation

$$f(x) = 0, \tag{32}$$

situées à l'intérieur du contour (C).

En prenant, par exemple, pour $f(x)$ le polynôme entier de degré effectif k,

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k = x^k [a_k + e(x)],$$

où $a_k \neq 0$ et où $e(x)$ tend vers zéro quand x est infinie, puis pour S un cercle ayant son centre à l'origine et son rayon assez grand pour que sur sa circonférence on ait constamment

$$\operatorname{mod} e(x) < \operatorname{mod} a_k, \tag{33}$$

on trouve immédiatement

$$\Delta lf(x) = k \Delta l(x) + \Delta l[a_k + e(x)] = k.2\pi i.$$

Effectivement $\Delta l(x) = 2\pi i$ parce que la circonférence est un

certain anneau tracé autour de l'origine, et $\Delta l[a_k + e(x)] = 0$, à cause de la condition (33), parce que le mouvement de x fait décrire à $a_k + e(x)$ un contour fermé qui peut évidemment se déformer jusqu'à des dimensions insensibles, sans franchir l'origine spéciale à laquelle on supposerait cette quantité pour un instant rapportée.

La formule (31) fait donc retrouver $m = k$, principe fondamental de la théorie des équations entières. Mais cette démonstration n'est pas bonne, en ce sens qu'elle implique des considérations trop indirectes et par surcroît trop étrangères à l'Algèbre pure. Nous ne la reproduisons qu'à titre de curiosité, et nous lui préférons celles que nous avons données aux nos **13**, **15**, cette dernière principalement.

192. Si de plus l'équation (32) n'a que des racines simples à l'intérieur du contour (C), *la formule* (31) *en réduit le dénombrement même au calcul de* $\Delta\, lf(x)$.

Cette quantité contient $2\pi i$ autant de fois évidemment qu'autour de l'origine O_u de $u = f(x)$ il faut superposer d'anneaux identiques (directs), pour réaliser un chemin fermé jusque auquel, mais sans lui faire franchir cette origine, on puisse déformer le contour fermé (Q) que la marche de x sur (C) fait décrire à u. Le nombre de ces anneaux a une relation très simple avec le nombre et la disposition des intersections par la ligne (Q), des parties positives et négatives de l'axe $O_u U'$, points où le rapport $\frac{u''}{u'}$ des éléments de u s'évanouit; on constatera sans peine qu'*il est précisément la moitié de l'excès du nombre de fois que, pendant le mouvement de x sur* (C), *le rapport* $\frac{u''}{u'}$ *passe en s'annulant du négatif au positif, sur le nombre de fois que le même rapport passe semblablement du positif au négatif.* La simple discussion de ce rapport, faite sur le contour (C) à ce point de vue, procure ainsi le dénombrement des racines; Cauchy a complété son théorème par l'indication de procédés spéciaux pour l'effectuer dans certains cas intéressants pour la théorie des équations entières; mais ces développements sont trop en dehors de notre cadre, et nous ne pouvons nous y engager.

193. Voici, pour terminer ce paragraphe, la méthode la plus expéditive pour exécuter le calcul numérique du nombre π.

Pour $m=8$, $n=1$, la formule (25) montre que $\frac{\pi}{4}$ est le second élément du logarithme de $\alpha_8 = \Phi(\frac{1}{8})$ racine principale directe $8^{\text{ième}}$ de l'unité, ce logarithme étant calculé sur le chemin défini au commencement du n° **186**.

En faisant $\alpha_8 = \alpha' + i\alpha''$, où $\alpha'' > 0$ puisqu'il s'agit d'une racine principale directe, la relation $\alpha_8^2 = \alpha_4 = i$ (**113** *bis*) conduit à $\alpha'^2 - \alpha''^2 = 0$, $2\alpha'\alpha'' = 1$, égalités montrant que α' est positif aussi, de plus égal à α'', qu'en conséquence α_8 est une quantité primaire de pente $=1$. D'après cela, nous formerons d'abord les puissances

$$(34) \qquad 1, \quad q, \quad q^2, \quad \ldots, \quad q^g, \quad q^{g+1},$$

d'une quantité primaire quelconque q de module 1 et de pente $\chi < 1$, en allant assez loin pour que, toutes ces puissances restant primaires, les pentes des deux dernières comprennent 1. En représentant un instant par $\mathfrak{P}(a)$ la pente de la quantité a supposée primaire, l'emploi répété de la formule

$$\mathfrak{P}(ab^{\pm 1}) = \frac{\mathfrak{P}(a) \pm \mathfrak{P}(b)}{1 \mp \mathfrak{P}(a)\mathfrak{P}(b)} \quad (98, \text{ II}, 1^\circ, 2^\circ)$$

fera connaître successivement les pentes des quantités (34), par suite l'exposant g et aussi les pentes χ', χ'', toutes deux inférieures à χ, des quantités primaires, de module 1 aussi,

$$q' = \frac{\alpha_8}{q^g}, \qquad q'' = \frac{q^{g+1}}{\alpha_8}.$$

Posons maintenant

$$(35) \qquad \Gamma = \frac{\chi}{1} - \frac{\chi^3}{3} + \ldots, \qquad \Gamma' = \frac{\chi'}{1} - \ldots, \qquad \Gamma'' = \frac{\chi''}{1} - \ldots.$$

Si $\chi' < \chi''$, le chemin sans rebroussement

$$[1, \quad q, \quad q^2, \quad \ldots, \quad q^g, \quad \alpha_8]$$

donne facilement, comme au n° **180**,

$$\frac{\pi}{4} = g\Gamma + \Gamma'.$$

Si au contraire $\chi'' < \chi'$, on préfèrera le chemin

$$[1, q, q^2, \ldots, q^g, q^{g+1}, \alpha_8],$$

où le dernier pas est rétrograde, et l'on aura visiblement

$$\frac{\pi}{4} = (g+1)\Gamma - \Gamma''.$$

En choisissant pour χ une très petite fraction, χ' et χ'' en seront de plus petites encore, les séries (35) convergent très rapidement, tous leurs termes sont des quantités commensurables, et l'on obtient facilement une grande approximation. Une manière d'opérer particulièrement avantageuse consiste à prendre $\chi = \frac{1}{5}$, ce qui donne $g+1=4$, $\chi'' = \frac{1}{239}$, puis

$$\frac{\pi}{4} = 4\Gamma - \Gamma''.$$

Fonction exponentielle.

194. L'étude des fonctions engendrées par l'*inversion* des intégrales abéliennes (**329***) (**169**) est assurément l'une des parties les plus intéressantes de toute leur théorie. Nous avons à la faire actuellement pour le logarithme népérien.

La résolution par rapport à u de l'équation

$$l(u) = x$$

donne une fonction de x qui est indéfiniment olotrope, et dont le développement par la formule de Maclaurin est

$$(1) \qquad u = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots.$$

Cette équation étant satisfaite numériquement pour $x=0$, $u=1$, hypothèses qui laissent son premier membre olotrope et n'annulent pas $\frac{1}{u}$ dérivée de celui-ci par rapport à u, possède une seule racine olotrope en $x=0$ et y prenant la valeur $u=1$ (**307***);

et cette racine est déterminée aussi bien par l'équation différentielle immédiate et la condition initiale

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} = u, \quad u = 1 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

Comme les formules ultimes relatives à cette dernière équation (290*) ont la forme générale évidente

$$(3) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = u,$$

on trouve immédiatement la série (1) pour premier développement de l'intégrale u.

Le rayon de convergence de cette série est d'ailleurs illimité; effectivement, pour tout module R attribué à x, le module $\frac{R}{m+1}$ du rapport d'un terme au précédent est infiniment petit pour m infini, d'où il résulte que celui du terme général est infiniment petit, à plus forte raison fini (114*).

L'intégrale cherchée est donc bien la fonction indéfiniment olotrope dont la formule (1) fournit le développement.

195. En représentant provisoirement cette fonction par $\varphi(x)$, il est évident que *la résolution de l'équation*

$$\varphi(x) = u,$$

faite à partir de $u = 1$, $x = 0$, *reproduit* $l(u)$; car cette équation finie équivaut à l'équation différentielle $\varphi'(x)\frac{dx}{du} = 1$, ou bien $\frac{dx}{du} = \frac{1}{u}$, accompagnée de la condition initiale $x = 0$ pour $u = 1$, et, par définition (171), le premier développement de l'intégrale de cette dernière est précisément celui de $l(u)$.

196. *La différentiation de la fonction* $\varphi(x)$ *la reproduit indéfiniment; en d'autres termes, on a, quel que soit l'indice m,*

$$\varphi^{(m)}(x) = \varphi(x).$$

Cette identité n'est pas autre chose que la formule ultime (3)

écrite d'une autre manière. D'ailleurs la différentiation de la série (1) la rend évidente *à posteriori*.

Cette fonction ne peut donc s'évanouir numériquement pour aucune valeur de x. Car alors la relation précédente entraînerait la nullité simultanée de ses dérivées de tous ordres, par suite (**187***), la nullité identique de $\varphi(x)$. Or ceci ne peut avoir lieu, puisque les coefficients de la série (1) ne sont pas tous nuls.

197. A la propriété caractéristique du logarithme népérien (**172**) correspond par inversion celle de $\varphi(x)$ que nous allons énoncer, et qui est fondamentale.

Au bout de chemins quelconques issus de

$$x' = x'' = \ldots = x^{(g)} = 0,$$

on a identiquement

$$(4)\quad [\varphi(x')]^{K'}[\varphi(x'')]^{K''}\ldots[\varphi(x^{(g)})]^{K^{(g)}} = \varphi(K'x' + K''x'' + \ldots + K^{(g)}x^{(g)}),$$

pourvu que ces radicaux partent des valeurs initiales

$$[\varphi(0)]^{K'} = [\varphi(0)]^{K''} = \ldots = 1.$$

Les trajets imposés à x', x'', ... font suivre aux quantités

$$(5)\qquad X' = \varphi(x'),\qquad X'' = \varphi(x''),\qquad \ldots$$

des chemins au bout desquels on a la relation (13) du numéro cité

$$l(X'^{K'}\ldots X^{(g)K^{(g)}}) = K'\,l(X') + \ldots + K^{(g)}\,l(X^{(g)}) = K'x' + \ldots + K^{(g)}x^{(g)},$$

parce que (**195**) les formules (5) donnent inversement

$$l(X') = x',\qquad l(X'') = x'',\qquad \ldots.$$

Or, et cela par définition (**194**), la résolution de cette dernière par rapport à la quantité dont le logarithme figure dans son premier membre donne précisément celle que l'on veut établir (4) après substitution de $\varphi(x')$, $\varphi(x'')$, ... à X', X'', ...

198. Quand les nombres K', K'', ... sont tous entiers, l'identité (4) ne renferme que des fonctions indéfiniment olotropes; par suite, *elle subsiste indépendamment de toute condition*

accessoire. Dans ce cas, la considération de la série (1) en fournit une démonstration bien facile.

La formule de Taylor, indéfiniment applicable à la fonction $\varphi(x)$ (**206***), donne pour toute valeur de x et de h, à cause de l'identité (3),

$$(6) \qquad \varphi(x+h) = \varphi(x)\varphi(h),$$

d'où facilement

$$\varphi(x'+x''+\ldots+x^{(g)}) = \varphi(x')\varphi(x'')\ldots\varphi(x^{(g)}),$$

puis en prenant $x' = x'' = \ldots = x^{(g)} = x$,

$$(7) \qquad \varphi(gx) = [\varphi(x)]^g.$$

On a, d'autre part, à cause de (1), (6),

$$1 = \varphi(0) = \varphi(x-x) = \varphi(x)\varphi(-x);$$

on en conclut

$$\varphi(-x) = [\varphi(x)]^{-1},$$

puis en vertu de (7)

$$(8) \qquad \varphi(-gx) = [\varphi(x)]^{-g}.$$

Une combinaison évidente de toutes ces formules particulières conduit ensuite à la forme de l'identité générale (4) que nous avons en vue.

199. *Aux valeurs de x en progression arithmétique*

$$\ldots, \quad x_{i-1}, \quad x_i, \quad x_{i+1}, \quad \ldots$$

de raison h, correspondent pour $\varphi(x)$ des valeurs en progression géométrique de raison $\varphi(h)$.

Car les relations supposées

$$\ldots = x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \ldots = h$$

donnent (**197**)

$$\ldots = \frac{\varphi(x_i)}{\varphi(x_{i-1})} = \frac{\varphi(x_{i+1})}{\varphi(x_i)} = \ldots = \varphi(h).$$

200. La relation (4) donne en particulier

$$\varphi(\mathrm{K}x) = [\varphi(x)]^{\mathrm{K}},$$

d'où pour $x = 1$

$$\varphi(\mathrm{K}) = [\varphi(1)]^{\mathrm{K}}.$$

On représente par la lettre e la constante $\varphi(1)$, en posant

$$e = \varphi(1) = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots = 2,7182818\ldots.$$

On a ainsi

$$\varphi(x) = e^x,$$

pour toute valeur de x réelle et commensurable, formule qu facilite beaucoup la conception de pareilles valeurs de notre fonction.

Pour x non réelle commensurable, le signe e^x n'a point de sens; mais rien n'empêche évidemment de lui en attribuer un, en posant pour toute valeur de x, ceci *conventionnellement* quand il y a lieu,

$$\varphi(x) = e^x.$$

C'est la notation que nous adopterons désormais conformément à l'usage. Elle a le double avantage de fournir les valeurs de notre fonction dans tous les cas où elle a un sens propre, et de rappeler aux yeux l'analogie parfaite de sa propriété caractéristique (197) avec les règles du calcul des exposants. D'où le nom de fonction *exponentielle,* auquel on ajoute quelquefois le mot *népérienne* pour la distinguer d'autres fonctions analogues dont nous parlerons plus loin (209, *inf.*).

201. La discussion numérique de la fonction exponentielle se ramène immédiatement à celle du logarithme népérien, en vertu de cette observation que le théorème du n° 11 rend évidente.

Si le parcours par u d'un chemin quelconque $[1, \mathrm{U}]$ *fait décrire à*

$$x = l(u)$$

le chemin $[0, \mathrm{X}]$, *on aura certainement*

$$e^{\mathrm{X}} = \mathrm{U}.$$

Il y a cependant quelques faits intéressants à établir directement.

I. *Quand x est réelle et croît de* $-\infty$ *à* $+\infty$, e^x *est réelle et croît de* o *à* $+\infty$.

Le premier point résulte de ce que tous les coefficients de la série (1) sont réels. Comme ils sont en outre positifs, e^x est positive aussi pour $x > 0$, et même pour $x < 0$ à cause de $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (197).

Enfin e^x dérivée première de e^x (194) étant ainsi toujours positive, e^x est toujours croissante, et même à l'infini à cause de $e^x > x$. Quand x décroît jusqu'à $-\infty$, e^x tend vers zéro, parce que $-x$ est une quantité positive infinie et que l'on a $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$.

II. *Quand x', premier élément de $x = x' + ix''$, est nul, on a*

$$\text{(9)} \qquad \operatorname{mod} e^x = \operatorname{mod} e^{ix''} = 1.$$

A cause de la réalité tant des coefficients de la série (1) que de x'', les quantités

$$e^{ix''}, \quad e^{-ix''}$$

sont conjuguées, et le carré de leur module commun se réduit à 1, à cause de

$$(\operatorname{mod} e^{ix''})^2 = e^{ix''} e^{-ix''} = e^0 = 1 \quad (197).$$

III. *Dans les autres cas on a*

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{mod} e^{x'+ix''} = e^{x'}.$$

Car $e^{x'}$ est une quantité positive (I) donnant (197)

$$\frac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'} = e^{ix''},$$

quantité de module 1 (II).

IV. *Quand x se meut de $-\infty$ à $+\infty$ sur une parallèle à l'axe O_xX', menée à la distance x'' de cet axe, $u = e^x$ marche de* o *à* ∞ *sur la demi-droite tracée de l'origine O_u à l'extrémité d'un arc de longueur $\pm x''$ mesuré à partir du point $u = 1$ sur la circonférence* $[O_u, 1]$, *dans le sens de rotation direct ou dans le sens rét·ograde selon que x'' est* $\gtrless 0$. Car $x = l(u)$ décrit

précisément cette parallèle quand u se meut sur la demi-droite en question (176) (183).

V. *Quand x se meut uniformément de $-\infty$ à $+\infty$ sur une parallèle à l'axe O_xX'', menée à la distance x' de cet axe, $u = e^x$ tourne uniformément dans le sens direct sur la circonférence $[O_u, e^{r'}]$ en passant en $u = e^{x'}$ au moment où x passe en x', et en y faisant une révolution entière chaque fois que x se déplace de 2π sur la parallèle considérée.* Car $x = l(u$ décrit précisément cette parallèle, quand u décrit de la manière indiquée la circonférence en question (179).

VI. *Si m, n sont deux entiers, le premier positif, et si α_m désigne toujours la racine principale directe $m^{\text{ième}}$ de l'unité, on a*

$$e^{n\frac{2\pi i}{m}} = \alpha_m^n,$$

d'où, en particulier,

$$e^{\pm\pi i} = -1, \qquad e^{\pm\frac{\pi i}{2}} = \pm i.$$

Ces formules sont des conséquences évidentes de celles inverses du n° 186; elles fournissent pour les racines de l'unité, des expressions que l'existence des Tables trigonométriques (250, *inf.*) rend les plus convenables pour leur calcul numérique.

202. Comme la fonction exponentielle est indéfiniment olotrope, elle a pour phase singulière unique celle correspondant aux valeurs infinies de x.

En vertu de la relation (10), combinée avec les conclusions des alinéas qui la précèdent dans le n° 201, *elle est infinie quand le premier élément de x est infini positif, infiniment petite quand il est infini négatif, indéterminée dans tous les autres cas.*

Un pareil mode de variation sépare absolument cette fonction de toutes celles à une seule variable que nous avions rencontrées dans les Chapitres précédents, chacune de ces dernières tendant vers une limite déterminée ou bien étant infinie pour des valeurs infinies *quelconques* de la variable. On dit qu'elle possède à l'infini une *singularité essentielle* (259, *inf.*).

203. *L'équation numérique*

$$e^u = X$$

est impossible ou possible, selon que X *est* $= 0$ *ou non. Dans le dernier cas, elle a pour seules racines toutes les déterminations de* $l(X)$ (185).

Nous savons (11) que cette équation n'a pas d'autres racines que les valeurs acquises par la racine variable u de l'équation

$$e^u = x,$$

définie par une condition initiale quelconque, en particulier par $u = 0$ pour $x = 1$, au bout de tous les chemins pouvant conduire x de 1 à X. Nous savons d'autre part (195) que cette racine variable est précisément $l(x)$.

Cela posé, si $X = 0$, tous ces chemins conduiront le premier élément de $l(x)$ à l'infini négatif (184); si au contraire X est non $= 0$, ils donneront naturellement toutes les déterminations de $l(X)$, savoir

$$U + k.2\pi i,$$

en appelant U l'une d'elles choisie à volonté, et k un entier quelconque positif nul ou négatif (173) (183).

204. La *périodicité* est une propriété extrêmement curieuse et importante qui, sous des formes variées, appartient à une infinité de fonctions engendrées par l'inversion des intégrales abéliennes. Dans la suite, nous aurons à en parler longuement; mais, pour le moment, il faut nous borner à la définir sommairement et à constater qu'elle appartient déjà à l'exponentielle.

Soient $f(x)$ une fonction d'une seule variable, et Π une constante donnée non $= 0$; on dit que $f(x)$ *admet* Π *pour période* si, quel que soit l'entier m (positif ou négatif), on a identiquement

$$f(x + m\Pi) = f(x).$$

Les fonctions douées ainsi de quelque période sont dites *périodiques*.

Cela posé, la fonction exponentielle admet $\pm 2\pi i$ *pour période.*

Car, par ce qui précède (203), et quelle que soit x, l'équation

(11) $$e^u = e^x$$

a pour racines toutes les quantités de la forme $x + m.2\pi i$.

Cette période est *élémentaire* (260, *inf.*) parce que l'équation (11) n'a pas d'autres racines.

205. Relativement aux parties aliquotes de sa période $2\pi i$, l'exponentielle jouit d'une sorte de périodicité imparfaite. Car, en appelant m un entier positif et α_m la racine principale directe $m^{\text{ième}}$ de l'unité, on a (201, VI)

$$e^{x+n\frac{2\pi i}{m}} = e^{n\frac{2\pi i}{m}} e^x = \alpha_m^n e^x.$$

L'addition à x *d'un multiple entier de* $\frac{2\pi i}{m}$ *reproduit donc encore l'exponentielle, mais au facteur* α_m^n *près,* qui se réduit à 1 quand n est multiple de m.

206. La composante e^u étant indéfiniment olotrope, *la fonction composée* $e^{U(x,y,\ldots)}$ *l'est elle-même aussi longtemps que la fonction simple* $U(x, y, \ldots)$ *jouit de cette propriété* (248*).

Quand la fonction simple est une fonction méromorphe $U(x)$ d'une seule variable, on voit sans peine que *les infinis de* $U(x)$ *sont des points singuliers essentiels de* $e^{U(x)}$ (259, *inf.*).

La différentiation de $e^{U(x)}$ donne

$$\frac{de^{U(x)}}{dx} = e^{U(x)}\,U'(x).$$

207. L'observation suivante est utile à la discussion de beaucoup d'expressions compliquées d'exponentielles.

Quelque grand que soit l'exposant positif fractionnaire μ, *le rapport*

$$\frac{e^x}{x^\mu}$$

est infini pour des valeurs positives infinies de x.

Car, à cause du développement (1), ce rapport est supérieur à

$$\frac{x^{M-\mu}}{1.2\ldots M},$$

où M est un entier quelconque supérieur à μ.

Logarithmes vulgaires et autres fonctions connexes.

208. La relation fondamentale (13) du n° **172**, étant linéaire et homogène par rapport aux logarithmes qu'elle renferme, reste exacte quand on les multiplie tous par une même constante quelconque a que nous supposerons non $= 0$. Ces produits sont les valeurs de la fonction

$$al(x)$$

pour $x = x', x'', \ldots$ et se nomment *les logarithmes* de ces quantités, *pris dans le système de module a*. On représente cette fonction par $\log_a(x)$, et l'on appelle *base* du système la quantité $A = e^{\frac{1}{a}}$ dont le logarithme de cette espèce est $= 1$.

D'après cette définition, les logarithmes népériens appartiennent au système qui a pour base $e^{\frac{1}{1}} = e$.

209. Il n'y a intérêt à considérer ces nouveaux logarithmes, que dans le cas où a, module du système, est une quantité réelle, et où l'on fait abstraction de leurs déterminations imaginaires. Ils sont encore réels, quand ils appartiennent à des quantités positives, et ils conservent les propriétés exprimées par les formules (24) du n° **185**.

Quand x est une quantité positive, on peut considérer $u = \log_a(x)$ comme la racine réelle unique de l'équation

$$e^{\frac{u}{a}} = x.$$

La fonction $e^{\frac{x}{a}}$ jouit évidemment des propriétés caractéristiques de l'exponentielle; de plus, elle est égale à la détermination positive de $\left(e^{\frac{1}{a}}\right)^x$, quand x est réelle commensurable (**118**), (**197**). Pour

ce double motif, on la représente souvent par

$$A^x.$$

L'équation précédente s'écrit alors

$$A^u = x.$$

Quand on donne la base $A = e^{\frac{1}{a}}$ (réelle positive), le module est évidemment fourni par la formule

$$(1) \qquad a = \frac{1}{l(A)},$$

d'où

$$A^x = e^{x l(A)} = 1 + \frac{x l(A)}{1} + \ldots,$$

en se bornant à la détermination réelle de $l(A)$.

210. En prenant $A = 10$, base du système de la numération décimale, *les logarithmes des puissances de* 10 *deviennent précisément égaux à leurs exposants.* C'est cette particularité, très avantageuse dans la pratique, qui a fait adopter les logarithmes de cette espèce pour l'abréviation des calculs numériques, sous le nom de *logarithmes* de Briggs ou *vulgaires,* pour la désignation desquels on se contente du signe log.

D'après la formule (1), leur module a pour valeur

$$\frac{1}{l(10)},$$

et l'on a généralement

$$\log(x) = \frac{l(x)}{l(10)}.$$

Cet emploi des logarithmes vulgaires est à la fois l'origine historique des transcendantes dont nous nous occupons, et la plus utile de leurs applications pratiques.

211. Comme un logarithme vulgaire est le quotient de deux logarithmes népériens, la construction d'une Table de logarithmes exige seulement le calcul des logarithmes népériens de toutes les

quantités positives. Les quantités incommensurables ne figurant jamais dans les calculs numériques que par leurs valeurs approchées, et, le logarithme d'une fraction pouvant s'obtenir par la différence de ceux de ses termes, *la question revient en dernière analyse au calcul des logarithmes népériens des nombres entiers positifs.*

L'emploi répété du développement (8) du n° **171** y suffirait, car il donne immédiatement, pour toute valeur de N au moins égale à 1,

$$l(N+1) = l(N) + \frac{1}{N} - \frac{1}{2N^2} + \frac{1}{3N^3} - \ldots,$$

d'où, en partant de $l(1) = 0$, on déduirait successivement $l(2)$, $l(3)$, ... On remarquera la formule

$$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

Mais on obtient des séries d'une convergence infiniment plus rapide, en opérant comme il suit.

Pour $x_i = 1$, $x = 1 \pm h$, ce même développement donne

$$l(1+h) = \frac{h}{1} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \ldots,$$
$$l(1-h) = -\frac{h}{1} - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} - \ldots,$$

puis par soustraction

$$l(1+h) - l(1-h) = l\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = 2\left(\frac{h}{1} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \ldots\right),$$

formule valable comme les deux précédentes seulement pour $\bmod h < 1$. En y faisant donc $h = \frac{1}{2N+1}$, elle devient

$$l\left(\frac{N+1}{N}\right) = l(N+1) - l(N) = 2\left[\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \ldots\right],$$

série très rapidement convergente pour peu que N ne soit pas très petit. Elle fournit de proche en proche comme ci-dessus les logarithmes de 2, 3, 4, ... Cet artifice donne une idée des moyens

indirects par lesquels les calculateurs habiles savent abréger leur travail.

Les logarithmes sont en général des nombres incommensurables dont les Tables peuvent seulement contenir des valeurs approchées. Le degré d'approximation dont on se contente est déterminé par cette condition générale, que *les erreurs, dont l'emploi de logarithmes inexacts peut entacher les résultats des calculs numériques, puissent facilement être maintenues au-dessous de celles que pourrait faire commettre la mesure directe des grandeurs physiques correspondantes.* Les meilleures Tables usuelles donnent les logarithmes avec sept décimales exactes; si les artistes parvenaient à augmenter beaucoup la précision des instruments de mesure, il faudrait, pour n'en pas perdre le bénéfice, augmenter parallèlement l'approximation des Tables.

212. La fonction $\psi(\mathfrak{m}, x)$ étudiée dans le Chapitre III s'exprime très simplement au moyen de l'exponentielle et du logarithme népérien. D'après ce que nous avons vu au n° 85, le premier développement de cette fonction est

$$\varphi\left(\mathfrak{m}, 1+\frac{x-1}{1}\right) = 1 + \frac{\mathfrak{m}\, l(x)}{1} + \frac{\mathfrak{m}^2[l(x)]^2}{1.2} + \ldots = e^{\mathfrak{m} l(x)},$$

car la série représentée par T n'est pas autre chose que $\lambda(1+t)$ qui fournit le premier développement de $l(x)$ (171, II). On a donc identiquement, au bout de tous les chemins imaginables,

$$(2) \qquad \psi(\mathfrak{m}, x) = e^{\mathfrak{m} l(x)} \quad (177^*).$$

Comme l'exponentielle est indéfiniment olotrope et que le logarithme népérien ne cesse de l'être (localement) qu'en $x = 0$, cette valeur de x est la seule qui soit critique pour cette fonction composée. En étudiant la fonction ψ, nous avons vu ce qui s'y passe quand $\mathfrak{m}$ est réel (102 *et suiv.*).

Pour $\mathfrak{m}$ imaginaire, cette fonction n'y est jamais olotrope; car l'adjonction à un chemin quelconque, d'un anneau direct enveloppant le point $x = 0$ augmente $l(x)$ de $2\pi i$ et, par suite, multiplie la fonction par $e^{\mathfrak{m}2\pi i}$, facteur qui ne peut être égal à $1 = e^{0.2\pi i}$ puisque $\mathfrak{m}$ n'est pas un nombre entier (204).

On notera la relation

$$\Phi(\mathfrak{m}) = e^{\mathfrak{m}2\pi i}$$

provenant de ce que le facteur en question se confond nécessairement avec le multiplicateur $\Phi(\mathfrak{m})$ du n° 90.

Pour rappeler à la fois les propriétés caractéristiques de cette fonction, identiques à celles des monomes à exposants entiers ou fractionnaires, et aussi les valeurs qu'elle prend quand $\mathfrak{m}$ est réel commensurable, on écrit

$$\psi(\mathfrak{m}, x) = e^{\mathfrak{m}l(x)} = x^{\mathfrak{m}}.$$

212 *bis.* La formule (2) rend facile la discussion de $x^{\mathfrak{m}}$ pour des valeurs de x infiniment petites ou infinies. En supposant par exemple $\mathfrak{m}$ réel non $= 0$, puis appelant ξ le module de x, et $l(\xi)$ la détermination réelle de son logarithme, on trouvera immédiatement

$$\operatorname{mod} x^{\mathfrak{m}} = e^{\mathfrak{m}l(\xi)},$$

où l'exposant est toujours infini, offrant le signe final + quand x est infinie avec $\mathfrak{m} > 0$, ou bien infiniment petite avec $\mathfrak{m} < 0$, offrant le signe final — quand x est infinie avec $\mathfrak{m} < 0$, ou bien infiniment petite avec $\mathfrak{m} > 0$. Cette fonction est donc infinie ou infiniment petite, selon qu'il s'agit des deux premiers cas ou des deux derniers.

213. *Pour $\mathfrak{m}$ infini d'une manière quelconque, on a*

$$\lim\left(1 + \frac{x}{\mathfrak{m}}\right)^{\mathfrak{m}} = e^{x}, \tag{3}$$

si toutefois l'on adopte la détermination de $l\left(1 + \frac{x}{\mathfrak{m}}\right)$ qui tend vers zéro.

En vertu de cette dernière hypothèse, on a effectivement

$$l\left(1 + \frac{x}{\mathfrak{m}}\right)^{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\,l\left(1 + \frac{x}{\mathfrak{m}}\right) = x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{\mathfrak{m}}\right)^2 - \dots\right],$$

d'où, ce qui équivaut à (3),

$$\lim l\left(1+\frac{x}{m}\right)^m = x,$$

parce que la somme de la série entre crochets tend vers 1.

214. On rencontre encore d'autres expressions compliquées d'exposants non réels commensurables; les considérations précédentes en fournissent facilement l'interprétation. Par exemple, au lieu de x^x, il faut lire $\psi(x, x) = e^{x l(x)}$, ... Mais les questions de ce genre offrent un bien médiocre intérêt.



CHAPITRE VI.

FONCTIONS CIRCULAIRES.

Tangente et cotangente.

215. L'inversion de l'intégrale indéfinie d'une différentielle rationnelle, qui nous a conduit à la fonction exponentielle dans son cas le plus simple, donne encore quelques fonctions, non plus indéfiniment olotropes comme celle-ci, mais indéfiniment méromorphes; nous allons étudier les plus intéressantes.

En représentant par $p(u)$, $\mathfrak{p}(u)$ deux polynomes entiers, de degrés effectifs k, $\mathfrak{k}$, sans diviseur commun, la condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales de l'équation différentielle

$$(1) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{p(u)}{\mathfrak{p}(u)}$$

soient indéfiniment méromorphes est que l'on ait

$$k \leqq 2, \qquad \mathfrak{k} = 0.$$

Considérons l'intégrale particulière précisée par la condition initiale $u = u_0$ pour $x = x_0$, en supposant que u_0 n'annule pas $p(u)$, sans quoi cette intégrale serait $u = u_0$ identiquement.

I. Si l'on avait $\mathfrak{k} > 0$, le dénominateur $\mathfrak{p}(u)$ aurait quelque zéro $\mathfrak{b}$ (13), (15), et comme la fonction inverse x de u satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{\mathfrak{p}(u)}{p(u)} \quad (329^*),$$

quelque valeur $\mathfrak{a}$ de x rendant $u = \mathfrak{b}$ serait finie; car on en trou-

verait évidemment de semblables en prenant

$$\mathfrak{a} = x_0 + \int_{u_0}^{\mathfrak{b}} \frac{\mathfrak{p}(u)}{p(u)}\, du,$$

le tracé du chemin d'intégration évitant les zéros de $p(u)$. D'après l'équation (1), $\frac{du}{dx}$ serait donc infinie en $x = \mathfrak{a}$, partant non olotrope, et u ne le serait pas non plus (165*).

II. L'hypothèse $\mathfrak{k} = 0$ réduit l'équation (1) à la forme

$$\frac{du}{dx} = p(u), \tag{2}$$

et l'hypothèse $k \gtreqless 2$ rend finie quelque valeur α de x pour laquelle u devient infinie. Des valeurs de ce genre sont effectivement fournies par la formule

$$\alpha = x_0 + \int_{u_0}^{\infty} \frac{du}{p(u)},$$

en prenant l'intégrale sur quelque chemin tracé de u_0 à l'infini sans passer par la valeur $u = 0$ ni par les zéros de $p(u)$, et cette intégrale est essentiellement finie : car la substitution $u = \frac{1}{t}$ (334*) la change en

$$-\int_{\frac{1}{u_0}}^{0} \frac{t^{k-2}}{t^k p\left(\frac{1}{t}\right)}\, dt,$$

où le chemin d'intégration, tracé par les valeurs de $t = \frac{1}{u}$, peut maintenant être supposé limité, parce que u ne passe pas par la valeur 0, et ne contient évidemment que des valeurs de t, ordinaires pour la fonction placée sous le signe $\int$.

Or, si l'on avait $k > 2$, l'inverse arithmétique $v = \frac{1}{u}$ de l'intégrale u, qui prend la valeur $v = 0$ pour $x = \alpha$, n'y serait pas olotrope; elle satisfait effectivement à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = p\left(\frac{1}{v}\right),$$

c'est-à-dire

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v^k p\left(\frac{1}{v}\right)}{v^{k-2}},$$

où le second membre est le quotient de deux polynomes entiers en v, sans diviseur commun, dont le second s'annule pour $v=0$ (I).

L'intégrale u ne serait donc pas méromorphe en $x=\alpha$, puisqu'elle y serait infinie sans que son inverse arithmétique y fût olotrope (42).

III. Pour $k=1$, on peut écrire

$$p(u) = g(u-a),$$

où $g \neq 0$, et l'équation différentielle (2) donne par inversion, comme ci-dessus (I),

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{g(u-a)},$$

d'où, généralement (170), (171),

$$x = \frac{1}{g}\, l(u-a) + \mathrm{C};$$

puis inversement (194), (200),

$$u = a + e^{g(x-\mathrm{C})},$$

fonction de x qui est indéfiniment olotrope.

IV. Pour $k=2$ on a (14), soit

$$p(u) = g(u-a)^2,$$

soit

$$p(u) = g(u-a)(u-b), \qquad (b \text{ non } = a).$$

1° Dans le premier cas, l'inversion donne

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{g(u-a)^2},$$

puis (215*, III)

$$x = -\frac{1}{g(u-a)} + \mathrm{C},$$

d'où

$$u = a - \frac{1}{g(x - C)},$$

fonction rationnelle et par suite indéfiniment méromorphe.

2° Dans le second cas, on trouve de même

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{g(u-a)(u-b)} = \frac{1}{g(a-b)}\left(\frac{1}{u-a} - \frac{1}{u-b}\right),$$

par la décomposition du second membre en fractions simples (52). L'intégration donne ensuite (215*, II, III), (170), (171),

$$(3) \quad \begin{cases} x = C + \dfrac{1}{g(a-b)}[l(u-a) - l(u-b)] \\ \quad = C + \dfrac{1}{g(a-b)}\, l\,\dfrac{u-a}{u-b} \quad (172), \end{cases}$$

d'où (194), (200),

$$(4) \qquad \frac{u-a}{u-b} = e^{g(a-b)(x-C)}.$$

La résolution de cette équation donne pour u une fraction dont les deux termes sont des fonctions linéaires de cette dernière exponentielle et par suite indéfiniment olotropes. L'intégrale u est donc indéfiniment méromorphe (29).

216. En prenant

$$p(u) = u^2 + 1,$$

l'équation différentielle (2) devient

$$(5) \qquad \frac{du}{dx} = u^2 + 1,$$

et ses intégrales, toutes indéfiniment méromorphes (215, IV), jouissent de propriétés relativement simples et intéressantes. Celle que détermine la condition initiale

$$(6) \qquad u = 0, \quad \text{pour} \quad x = 0,$$

se confond pour les valeurs réelles de x, avec la fonction connue dès les éléments sous le nom de $\operatorname{tang} x$. En lui conservant cette

notation, les considérations précédentes fournissent bien facilement son expression au moyen de l'exponentielle.

Dans les formules (3), (4) il faut faire

$$g = 1, \qquad a = -b = i;$$

la première devient

$$(7) \qquad x = C + \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{u-i}{u+i}\right),$$

puis, pour $x = u = 0$,

$$0 = C + \frac{1}{2i} \quad -1) = C + \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (186),\ (185,\ \text{I}).$$

d'où, par exemple,

$$(8) \qquad C = -\frac{\pi}{2};$$

la seconde devient alors

$$(9) \qquad \frac{u-i}{u+i} = e^{2i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\pi}e^{2ix} = -e^{2ix} \quad (197),\ (201,\ \text{VI}),$$

et donne

$$(10) \qquad u = \operatorname{tang} x = i\,\frac{1-e^{2ix}}{1+e^{2ix}}.$$

217. La formule précédente combinée avec les propriétés générales de la fonction exponentielle fait connaître immédiatement toutes celles de $\operatorname{tang} x$.

I. *Les infinis de* $\operatorname{tang} x$ *sont les quantités réelles*

$$(11) \qquad \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

car ce sont les zéros du dénominateur $1 + e^{2ix} = e^{2ix} - e^{2i\frac{\pi}{2}}$ (201, VI), (204), qui ne peuvent annuler le numérateur. Ces derniers étant tous simples parce que la dérivée $2ie^{2ix}$ ne peut s'évanouir (196), les infinis en question sont simples aussi (31 *et suiv.*).

II. *Le développement de* $\operatorname{tang}(x+h)$ *par la formule de Taylor est donc possible toutes les fois que x n'a pas une des*

valeurs (11) *et que* mod h *est inférieur à la plus courte des distances de* x *aux mêmes valeurs singulières* (**201***).

En faisant $u = \operatorname{tang} x$ dans les expressions ultimes des dérivées de u tirées de l'équation différentielle (5) (**290***), on obtiendrait les coefficients de ce développement sous forme de polynomes entiers en $\operatorname{tang} x$; mais les calculs se compliquent rapidement ([1]).

III. *La fonction* $\operatorname{tang} x$ *admet la période* $\pm\pi$ (**204**) *qui est élémentaire* (**260**, *inf.*); car l'équation numérique en X,

$$\operatorname{tang} X = \operatorname{tang} x,$$

revient à

$$e^{2iX} = e^{2ix},$$

d'où l'on tire immédiatement (**204**)

$$X = x + m\pi.$$

IV. A cause de cette périodicité commune tant de $\operatorname{tang} x$ que de ses infinis (I), tous les résidus de cette fonction ont la même valeur (**56**), (**252**, *inf.*). En faisant tendre x vers l'infini $\frac{\pi}{2}$, on trouve pour le résidu correspondant

$$i.\lim(1 - e^{2ix}).\lim \frac{x - \frac{\pi}{2}}{1 + e^{2ix}}.$$

Le second facteur est égal à $1 - e^{i\pi} = 2$; le troisième a pour valeur le rapport de celles que prennent pour $x = \frac{\pi}{2}$ les dérivées des deux termes de la fraction correspondante (**46**), c'est-à-dire $\frac{1}{2ie^{i\pi}} = -\frac{1}{2i}$. *Il reste donc*

$$-1$$

pour valeur commune de tous ces résidus.

([1]) En dehors de cas très simples dont le nombre est extraordinairement petit, nous sommes dans l'ignorance la plus profonde sur les expressions générales des coefficients des développements des fonctions. Il y a là sans doute matière à bien des recherches intéressantes. Ces ténèbres épaisses ont été cependant percées çà et là par la perspicacité de M. D. André, mon ami et regretté Collègue, dont le talent sur l'Analyse combinatoire est tout à fait hors de pair. En particulier, il a donné ces expressions sous les formes les plus élégantes pour les développements de $\operatorname{tang} x$ et de $\operatorname{séc} x$ (*Comptes rendus*, t. LXXXVIII, 1879).

V. *Si $x = x' + ix''$ est infini,* tang x *tend vers* $\pm i$ *quand* $\pm x''$ *est infini positif.*

Car on peut écrire

$$\operatorname{tang} x = i\,\frac{1 - e^{2ix'}e^{-2x''}}{1 + e^{2ix'}e^{-2x''}},$$

où, à cause de la réalité de x', x'', $e^{2ix'}$ conserve 1 pour module (201, II), où $e^{-2x''}$ est infiniment petit dans le premier cas, infini dans le second (201, I).

Mais *quand x'' n'est pas infini avec un signe final invariable, cette fonction est évidemment indéterminée.*

Elle possède à l'infini une singularité essentielle (259, *inf.*).

VI. *On a les identités*

$$\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x, \tag{12}$$

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\operatorname{tang} x}. \tag{13}$$

Le second membre de la formule (10) change effectivement de signe, quand on multiplie ses deux termes par e^{2ix} après y avoir changé x en $-x$.

A cause de $e^{i\pi} = -1$, la substitution de $x + \frac{\pi}{2}$ à x dans le même second membre le change en $i\,\frac{1 + e^{2ix}}{1 - e^{2ix}}$, expression qui est son inverse arithmétique changé de signe.

VII. *Pour l'addition et la soustraction des arguments, on a les formules*

$$\operatorname{tang}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tang} x \pm \operatorname{tang} y}{1 \mp \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y}. \tag{14}$$

La formule (10) donne

$$\operatorname{tang}(x + y) = i\,\frac{1 - e^{2ix}e^{2iy}}{1 + e^{2ix}e^{2iy}} \quad (197),$$

d'où l'on déduit la première des relations dont il s'agit en substituant à e^{2ix}, e^{2iy} leurs expressions en tang x, tang y tirées de la même formule (10).

La seconde s'obtient de la même manière, ou bien par la combinaison de la première et de l'identité (12).

VIII. En partant de la première des formules (14), on arrive de proche en proche à la *multiplication de l'argument. On obtient ainsi pour* $\tan g\, mx$ *une fraction rationnelle en* $\tan g\, x$, *dans l'un au moins des termes de laquelle cette dernière fonction entre au degré effectif m.*

La substitution de $\frac{x}{m}$ à x dans cette relation entre $\tan g\, mx$ et $\tan g\, x$ conduit ainsi, pour la *division de l'argument,* à une équation entière de degrés m, 1 entre $\tan g \frac{x}{m}$ et $\tan g\, x$.

IX. *Les zéros de* $\tan g\, x$ *sont les quantités réelles*

$$(15) \qquad k\pi,$$

zéros simples de $1 - e^{2ix}$ numérateur du second membre de la formule (10). *Tous sont donc simples aussi.*

X. *Pour des valeurs réelles de* x, $\tan g\, x$ *est toujours réelle.* C'est ce qui résulte du calcul du second élément de $\tan g\, x$, exécuté au moyen de la formule (10), dans cette hypothèse qui rend $\mathrm{mod}\, e^{2ix} = 1$ (201, II), ou bien encore de l'équation différentielle génératrice (5) et de la condition initiale (6) où tout est réel (28 *bis*).

Ajoutons qu'*alors* $\tan g\, x$ *est sans cesse croissante,* car sa dérivée première est toujours positive en vertu de l'équation (5) (19).

218. La fonction inverse $\operatorname{arc} \tan g\, x$ est la racine u de l'équation

$$\tan g\, u = x.$$

Elle s'exprime immédiatement par des logarithmes, à l'aide de la formule (7) que la permutation de x, u et l'attribution à C de la valeur (8) changent en

$$(16) \qquad u = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\, l(x - i) - \frac{1}{2i}\, l(x + i).$$

Les phases singulières de cette fonction correspondent aux

valeurs de x qui annulent l'une ou l'autre des quantités soumises au signe l (187), c'est-à-dire à $x = \pm i$.

Ses diverses déterminations sont

$$u + \frac{1}{2i} m.2\pi i = u + m\pi \quad (185).$$

Tous les chemins conduisant de x_0 à X, valeurs de x non $= \pm i$, sont réductibles à l'un d'entre eux précédé de boucles enveloppant une fois, les unes le point i, les autres le point $-i$. L'adjonction d'une boucle du premier genre, parcourue dans le sens direct ou rétrograde, augmente de $\pm\pi$ la valeur finale U de $\operatorname{arc\,tang} x$, parce que la quantité $x - i$ fait alors un tour direct ou rétrograde autour de sa propre origine (126), et que $l(x - i)$ augmente de $\pm 2\pi i$ (173). L'adjonction d'une autre boucle augmente U de $\mp\pi$, parce que le logarithme correspondant est précédé du signe $-$.

219. La série de Maclaurin est applicable au développement de $\operatorname{arc\,tang} x$, jusqu'à $\operatorname{mod} x = 1$, plus courte distance de l'origine aux valeurs singulières $x = \pm i$ (201*). De

$$\frac{x}{\mp i} = \pm ix, \qquad l(-i) = \frac{3\pi i}{2} + m'.2\pi i, \qquad l(i) = \frac{\pi i}{2} + m''.2\pi i \quad (186),$$

on tire (172), (171, II)

$$(17)\quad \begin{cases} l(-i+x) = l(-i) + l(\;+ix) \\ \qquad\qquad = \dfrac{3\pi i}{2} + m'.2\pi i + \dfrac{ix}{1} + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{ix^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots \end{cases}$$

$$(18)\qquad l(i+x) = \frac{\pi i}{2} + m''.2\pi i - \frac{ix}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{ix^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots,$$

moyennant quoi la formule (16) donne immédiatement

$$(19)\qquad u = \operatorname{arc\,tang} x = m\pi + \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Les séries (17) et (18) étant convergentes l'une et l'autre pour toutes valeurs de x de module 1, sauf $+i$ qui fait diverger la première et $-i$ qui fait diverger la seconde (171, III), cette dernière (19) l'est pareillement; à cause de sa continuité (126*) et

de celle de arc tang$x$, elle représente encore cette fonction pour de pareilles valeurs de x.

L'inversion de l'équation (5) donnant

$$\frac{d \operatorname{arc\,tang} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - \ldots$$

pour mod$x < 1$, l'intégration de cette dernière ferait retrouver immédiatement la formule précédente.

Quand x est réelle, toutes les déterminations de arc tang$x$ le sont évidemment aussi, de plus croissantes puisque leur dérivée première commune est toujours positive en vertu de l'équation (20). D'autre part, et à cause de tang$\,0 = 0$, une seule détermination est susceptible de s'annuler, ce qui a lieu pour elle en $x = 0$ exclusivement. On en conclut facilement que pour chaque valeur positive de x, cette détermination est la plus petite de celles qui sont positives. Quand x est < 1, on obtient son développement en prenant $m = 0$ dans la relation (19), ce qui donne

$$\operatorname{arc\,tang} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots.$$

Si l'on fait ici $x = 1$, et si l'on remarque que, d'après la relation (10), les valeurs de x rendant tang$x = 1$ sont $\frac{\pi}{4} + m\pi$, parmi les positives desquelles $\frac{\pi}{4}$ est la plus petite, on arrive à la formule

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots;$$

elle est curieuse, mais sans utilité pratique, à cause de la lenteur avec laquelle converge la série.

219 *bis*. En étudiant l'équation différentielle (5) par la méthode directe que nous suivrons aux n°s 299 *et suiv., inf.*, on prouve sans difficulté : 1° que ses intégrales sont toutes indéfiniment méromorphes et ne dégénèrent jamais en des constantes; 2° que les racines de l'équation numérique

$$\operatorname{tang} x = \mathrm{U}$$

sont, quelle que soit $U \neq \pm i$, les valeurs de l'intégrale définie

$$\int_0^U \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2i}\int_0^U \frac{du}{u-i} - \frac{1}{2i}\int_0^U \frac{du}{u+i},$$

prises sur tous les chemins conduisant de o à U, qu'elles sont par suite de la forme $X + m\Pi$, où X représente l'une d'elles et Π la valeur de la même intégrale prise sur l'une ou l'autre, à volonté, des deux boucles enveloppant les valeurs singulières $\pm i$ respectivement; 3° que la même intégrale est finie quand U s'éloigne à l'infini sur un chemin ne faisant autour de $\pm i$ que des lacets en nombre limité (*Cf.* 296, 1°, *inf.*). De tout quoi, et en raisonnant exactement comme au n° 302, VIII, *inf.*, on conclut l'inégalité $\Pi \neq 0$. C'est la seconde démonstration dont nous avons parlé au n° 180 *in fine,* car il est évident, par la relation précédente, que Π est précisément la période de l'exponentielle, au diviseur $2i$ près.

220. La combinaison des relations (12), (13) donne immédiatement

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tang} x}.$$

On affecte le signe spécial $\cot x$ à la représentation de la valeur commune des deux membres de cette identité, et l'on a ainsi, d'après la formule (10),

$$\cot x = \frac{1}{\operatorname{tang} x} = i\,\frac{e^{2ix}+1}{e^{2ix}-1}. \qquad (21)$$

Les propriétés de cette nouvelle fonction se déduisent si facilement de celles de $\operatorname{tang} x$, que nous nous contenterons d'énoncer les principales.

I. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dx} = -v^2 - 1,$$

autre cas particulier de l'équation (2), et à la condition initiale

$$v = 0, \qquad \text{pour } x = \frac{\pi}{2}.$$

On s'en assurera par la substitution $u = \frac{1}{v}$ faite dans l'équation (5), et par la prise en considération des conclusions de l'alinéa I du n° **217**.

II. Elle est indéfiniment méromorphe comme $\tang x$ dont elle a la période $\pm \pi$ (*loc. cit.*, III) toujours élémentaire (**260**, *inf.*), avec ses zéros (15) pour infinis et ses infinis (11) pour zéros, les uns et les autres tous simples.

Ses résidus ont tous la valeur

$$+1.$$

III. On a les identités

$$\cot(-x) = -\cot x, \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\cot x} \quad (\mathbf{217}, \text{VI}),$$

et aussi

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\cot x} = \tang x. \tag{22}$$

IV. La valeur de $\cot x$ est réelle pour toutes les valeurs réelles de x (*loc. cit.*, X), (**28** *bis*).

Etc.

221. Les deux fonctions que nous venons d'étudier ont avec $\sin x$ et $\cos x$ des relations très simples sur lesquelles on pourrait fonder pour elles une théorie toute différente, mais moins propre selon nous à mettre bien en évidence leur véritable caractère analytique (**248**, *inf.*).

Réduction des intégrales circulaires, elliptiques et ultra-elliptiques. Expressions générales et inversion des premières.

222. Après les intégrales de nature abélienne qui nous ont donné, directement ou par inversion, le logarithme et l'exponentielle (Chap. V), puis la tangente, la cotangente et leurs fonctions inverses (**215** *et suiv.*), les plus simples sont celles dont l'irrationnelle caractéristique y dépend d'une équation entière où elle entre

au deuxième degré. *Sans restreindre la généralité de l'intégrale*

$$(1) \qquad \int F(x, y)\,dx,$$

on peut toujours supposer alors que cette équation se réduit à

$$(2) \qquad y^2 - \varphi(x) = 0$$

où $\varphi(x)$ *est un polynome entier en* x, *dont le degré effectif* k *est* > 0, *et qui est dépourvu de tout zéro multiple.*

Car l'équation en question est nécessairement de la forme

$$(3) \qquad Ay^2 + 2By + C = 0,$$

A, B, C désignant des polynomes entiers quelconques en x, et en appelant $\varphi(x)$ le produit de tous les facteurs linéaires distincts de $B^2 - AC$ qui figurent dans ce polynome avec des exposants impairs, on a

$$B^2 - AC = K^2\varphi(x),$$

où K est un nouveau polynome entier en x. Cela posé, la résolution de l'équation (3) donne

$$y = -\frac{B}{A} + \frac{K}{A}\sqrt{\varphi(x)},$$

et $\varphi(x)$ ne peut se réduire à une constante, puisque alors l'équation (3) serait réductible contrairement à l'hypothèse du n° **169**. Or il est évident que toute fonction composée rationnelle de x et de y est aussi composée rationnellement de x et de $\sqrt{\varphi(x)}$, c'est-à-dire de x et de la racine d'une équation de la forme (2).

Dans cette hypothèse, où nous nous placerons désormais, on a deux théorèmes généraux que nous commencerons par établir.

223. *Une simple substitution rationnelle du premier degré* (**30***) *permet, soit d'augmenter d'une unité le degré* k *du polynome* $\varphi(x)$ *si ce nombre est impair, soit de le diminuer d'une unité s'il est pair.*

Nous écrirons

$$\varphi(x) = (a_1 + b_1x)\ldots(a_k + b_kx),$$

les coefficients $b_1, \ldots, b_k$ et les déterminants $(a_i b_j - a_j b_i)$ étant tous différents de zéro, et, appelant t une nouvelle variable d'intégration, nous exécuterons la substitution

$$(4) \qquad x = \frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t},$$

dont les coefficients provisoirement indéterminés sont assujettis à la seule condition de donner

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

et qui conduit alors à

$$dx = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma + \delta t)^2}\,dt.$$

Si $k = 2n - 1$, il vient ainsi

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\gamma + \delta t)^{2n}} \{[(a_1\gamma + b_1\alpha) + (a_1\delta + b_1\beta)t] \ldots [(a_{2n-1}\gamma + b_{2n-1}\alpha) + (a_{2n-1}\delta + b_{2n-1}\beta)t][\gamma + \delta t]\},$$

et l'expression $\chi(t)$ entre accolades est un polynome entier sans facteurs multiples, en outre de degré effectif $2n$, si les coefficients de la substitution (4) ont été choisis de manière à ne rendre $= 0$, ni δ, ni aucun des binomes $a_i\delta + b_i\beta$. On aura donc ainsi

$$F[x, \sqrt{\varphi(x)}]\,dx = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma + \delta t)^2} F\left[\frac{\alpha + \beta t}{\gamma + \delta t}, \frac{\sqrt{\chi(t)}}{(\gamma + \delta t)^n}\right] dt = F_1[t, \sqrt{\chi(t)}]\,dt,$$

où F_1 est une nouvelle composante rationnelle.

Si $k = 2n$, il vient

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\gamma + \delta t)^{2n}} \{[(a_1\gamma + b_1\alpha) + (a_1\delta + b_1\beta)t] \ldots [(a_{2n}\gamma + b_{2n}\alpha) + (a_{2n}\delta + b_{2n}\beta)t]\}$$

et l'expression $\psi(t)$ entre accolades est encore un polynome entier en t sans facteur multiple mais de degré effectif $2n - 1$ seulement, si l'on prend maintenant pour δ, β des valeurs annulant l'un des binomes $a_i\delta + b_i\beta$.

Or, on trouve comme ci-dessus,

$$F[x, \sqrt{\varphi(x)}]\,dx = -\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma+\delta t)^2}\,F\left[\frac{\alpha+\beta t}{\gamma+\delta t}, \frac{\sqrt{\psi(t)}}{(\gamma+\delta t)^n}\right]dt$$
$$= F_2[t, \sqrt{\psi(t)}]\,dt,$$

où la composante F_2 est toujours rationnelle.

224. *Quelle que soit la composante rationnelle* F, *l'intégrale* (1) *se ramène à la somme :*

1° *D'une expression rationnelle et logarithmique*

(5) $$\Upsilon(x),$$

intégrale indéfinie d'une certaine différentielle rationnelle en x;

2° *Du produit*

(6) $$\upsilon(x)y$$

d'une certaine fonction rationnelle de x, $\upsilon(x)$, *par le radical* y;

3° *D'une fonction linéaire et homogène des* $k-1$ *intégrales*

(7) $$\int\frac{dx}{y},\quad \int\frac{x\,dx}{y},\quad \ldots,\quad \int\frac{x^{k-2}\,dx}{y},$$

cette troisième partie n'existant pas toutefois si l'on a $k=1$;

4° *D'une fonction linéaire et homogène d'intégrales en nombre indéterminé, de la forme*

(8) $$\int\frac{dx}{(x-a)y},$$

où a *n'est pas un zéro de* $\varphi(x)$.

I. En mettant $F(x,y)$ sous forme d'un quotient de deux polynomes entiers en x, y, groupant dans chaque terme de cette fraction les monomes de degrés pairs en y, ainsi que ceux de degrés impairs, et mettant ce radical en facteur dans les derniers groupes, il vient

$$F(x,y) = \frac{M + M'y}{N + N'y},$$

M, M', N, N' désignant des polynomes entiers en x et en y^2, en x

seulement, par suite, si l'on y remplace y^2 par $\varphi(x)$ en vertu de l'équation (2). En multipliant ensuite les deux termes de cette dernière fraction par $N - N'y$, il viendra

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \frac{(MN - M'N'y^2) + (M'N - MN')y}{N^2 - N'^2y^2} \\ &= \frac{P}{X} + \frac{P_1 y^2}{Xy} = \frac{P}{X} + \frac{P'}{X}\frac{1}{y}, \end{aligned}$$

X, P, P_1, P' désignant encore des polynomes entiers en x; on en conclut

$$\int F(x,y)\,dx = \int \frac{P}{X}\,dx + \int \frac{P'}{X}\frac{dx}{y},$$

et la première intégrale du second membre de cette formule de décomposition donne l'expression désignée par $\Upsilon(x)$ dans notre énoncé.

II. Quant à la deuxième, si l'on décompose la fraction rationnelle $\frac{P'}{X}$ en monomes entiers et en fractions simples (52), elle deviendra une fonction composée linéaire d'intégrales des formes

$$(9) \qquad \int \frac{x^m\,dx}{y}$$

et

$$(10) \qquad \int \frac{dx}{(x-\mathfrak{a})^q y}, \quad \int \frac{dx}{(x-\mathfrak{b})^r y}, \quad \ldots,$$

m, q, r, ... étant des exposants positifs et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ... des constantes inégales.

III. Cela posé, en appelant μ un entier positif quelconque, on aura identiquement

$$\begin{aligned} D_x(x^{\mu-1}y) &= (\mu-1)x^{\mu-2}y + x^{\mu-1}D_x y \\ &= \frac{1}{y}\left[(\mu-1)x^{\mu-2}y^2 + \frac{1}{2}x^{\mu-1}D_x(y^2)\right] \end{aligned}$$

où, à cause de l'équation (2), l'expression entre crochets est un polynome entier en x,

$$A_0^{(\mu)}x^{k-2+\mu} + A_1^{(\mu)}x^{k-2+\mu-1} + \ldots + A_{k-2+\mu}^{(\mu)},$$

de degré effectif $k-2+\mu$; car, en appelant a_0 le coefficient de x^k dans $\varphi(x)$, lequel est essentiellement non $=0$, on a

$$A_0^{(\mu)}=\left(\mu-1+\frac{k}{2}\right)a_0,$$

quantité qui ne peut s'évanouir. En intégrant donc les deux membres de l'identité précédente, il vient

$$(11)\quad x^{\mu-1}y=A_0^{(\mu)}\int\frac{x^{k-2+\mu}}{y}\,dx+A_1^{(\mu)}\int\frac{x^{k-2+\mu-1}}{y}\,dx+\ldots+A_{k-2+\mu}^{(\mu)}\int\frac{dx}{y}.$$

Maintenant nous distinguerons deux cas.

1° Si $k=1$, nommons $M-1$ le plus grand des exposants m dans les intégrales (9), et faisons successivement $\mu=1, 2, \ldots, M$. La relation précédente donnera M équations dont la résolution fournira, linéairement par rapport à

$$(12)\qquad y,\quad xy,\quad x^2y,\quad \ldots,\quad x^{M-1}y,$$

les expressions des M intégrales de la forme (9) où m ne surpasse pas $M-1$. Effectivement ces équations sont linéaires, et le déterminant des coefficients de ces intégrales s'y réduit à $A_0^{(1)}A_0^{(2)}\ldots A_0^{(M)}$, produit non $=0$ comme chacun de ses facteurs.

2° Si $k>1$, nous appellerons M l'excès sur $k-2$, du plus grand des exposants m dans les intégrales (9), et nous ferons encore $\mu=1, 2, \ldots, M$. Les M équations fournies par la relation (11) ne pourront plus être résolues par rapport à la totalité des $k-2+M+1$ intégrales qui figurent dans leurs seconds membres; mais, pour la même raison que ci-dessus (1°), elles donneront les M d'entre elles où m surpasse $k-2$, exprimées linéairement au moyen des fonctions (12) et des intégrales (7).

IV. En appelant enfin χ un entier positif quelconque, on aura encore identiquement

$$(13)\quad \begin{cases} D_x[(x-a)^{-\chi+1}y]=(-\chi+1)(x-a)^{-\chi}y+(x-a)^{-\chi+1}D_xy \\ \qquad =\dfrac{1}{(x-a)^{\chi}y}\left[(-\chi+1)y^2+\dfrac{1}{2}(x-a)D_x(y^2)\right]. \end{cases}$$

Ce dernier facteur entre crochets est un polynome entier en x, de degré égal à k en général $\left(\text{moindre toutefois si } -\chi+1+\frac{k}{2}=0\right)$;

après l'avoir mis sous la forme

(14) $$B_0^{(\chi)} + B_1^{(\chi)}(x-\mathfrak{a}) + B_2^{(\chi)}(x-\mathfrak{a})^2 + \ldots + B_k^{(\chi)}(x-\mathfrak{a})^k,$$

nous distinguerons deux cas.

1° *Si* $\mathfrak{a}$ *est un zéro de* $\varphi(x)$, le polynome (14) est divisible par $x-\mathfrak{a}$, mais non par $(x-\mathfrak{a})^2$; car le quotient de sa division par $x-\mathfrak{a}$ est

$$(-\chi+1)\frac{\varphi(x)}{x-\mathfrak{a}} + \frac{1}{2}\varphi'(x),$$

expression qui, pour $x=\mathfrak{a}$, prend la valeur $\left(-\chi+\frac{3}{2}\right)\varphi'(\mathfrak{a})$ essentiellement différente de zéro, puisque $\varphi(x)$ n'a pas de zéro multiple et que χ est un entier. On a donc $B_0^{(\chi)}=0$, $B_1^{(\chi)}$ non $=0$, et la relation (13) devient, après intégration,

$$(x-\mathfrak{a})^{-\chi+1}y = B_1^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-\mathfrak{a})^{\chi-1}y} + B_2^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-\mathfrak{a})^{\chi-2}y} + \ldots$$
$$+ B_k^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-\mathfrak{a})^{\chi-k}y}.$$

Ici faisons successivement $\chi = 2, 3, \ldots, Q, Q+1$, en appelant Q la plus grande valeur de l'exposant q dans celles des intégrales (10) impliquant des puissances du même binome $x-\mathfrak{a}$. Il viendra Q équations du premier degré, permettant d'exprimer linéairement au moyen de

(15) $$(x-\mathfrak{a})^{-1}y,\quad (x-\mathfrak{a})^{-2}y,\quad \ldots,\quad (x-\mathfrak{a})^{-Q}y$$

et des intégrales

(16) $$\int\frac{dx}{y},\quad \int\frac{(x-\mathfrak{a})\,dx}{y},\quad \ldots,\quad \int\frac{(x-\mathfrak{a})^{k-2}\,dx}{y},$$

lesquelles s'expriment linéairement d'elles-mêmes au moyen des intégrales fondamentales (7), les Q intégrales de la première des formes (10) où q a les valeurs 1, 2, ..., Q (en particulier celles que nous avons à considérer). Effectivement le déterminant des coefficients de ces Q intégrales se réduit à $B_1^{(2)}B_1^{(3)}\ldots B_1^{(Q+1)}$, quantité encore non $=0$.

2° *Si* $\mathfrak{a}$ *n'est pas un zéro de* $\varphi(x)$ et si χ est >1, le coefficient $B_0^{(\chi)}$ du polynome (14), savoir $(-\chi+1)\varphi(\mathfrak{a})$, est essentiel-

lement différent de zéro, et l'intégration de la relation (13) donne

$$(x-a)^{-\chi+1}y = B_0^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-a)^{\chi}y} + B_1^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-a)^{\chi-1}y}+\ldots$$
$$+ B_k^{(\chi)}\int\frac{dx}{(x-a)^{\chi-k}y}.$$

En faisant ici $\chi = 2, 3, \ldots, Q$, il viendra $Q-1$ équations simultanées du premier degré, où le déterminant $B_0^{(2)}B_0^{(3)}\ldots B_0^{(Q)}$ des coefficients des $Q-1$ intégrales de la première des formes (10) dans lesquelles q a les valeurs $2, 3, \ldots, Q$ n'est pas nul; par suite on en pourra tirer celles de ces intégrales où $q > 1$ en fonctions composées linéaires de

$$(17) \qquad (x-a)^{-1}y,\quad (x-a)^{-2}y,\quad \ldots,\quad (x-a)^{-Q+1}$$

des intégrales (16), par suite des intégrales fondamentales (7), et finalement de l'autre intégrale fondamentale (8).

V. Si l'on opère de même pour toutes les autres intégrales (10), et si l'on réunit tous les résultats obtenus, on arrive bien à la formule de réduction spécifiée dans notre énoncé; car le groupe des expressions (12), et (15) ou (17) selon qu'il s'agit du cas 1° ou 2° de l'alinéa IV, donne ce que nous avons appelé $\upsilon(x)y$.

225. La proposition précédente a une grande importance parce qu'elle ramène toutes les intégrales (1), où le polynome $\varphi(x)$ est le même, aux expressions (5), (6) qui sont connues, et aux intégrales *fondamentales* (7), (8) qui ne le sont pas, mais *dont le nombre est essentiellement limité,* si du moins on considère comme se confondant dans leur essence, les déterminations de l'intégrale (8) qui correspondent aux diverses valeurs du paramètre a.

La facilité extrême avec laquelle le théorème du n° **223** permet de passer de celles des intégrales (1) où $k = 2n-1$ à celles où $k = 2n$, et inversement des dernières aux premières, a fait ranger les unes et les autres indistinctement, dans une seule classe caractérisée naturellement par la valeur correspondante du nombre n.

Quand on a $n = 1$, c'est-à-dire $k = 1$ ou $= 2$, les intégrales (1) sont dites *circulaires,* parce que l'une d'elles fournit l'expression

de la longueur d'un arc de cercle en fonction des coordonnées rectilignes de ses extrémités; ce sont les seules dont nous nous occuperons dans le présent Chapitre.

Si $n = 2$, c'est-à-dire si $k = 3$ ou $= 4$, les mêmes intégrales sont dites *elliptiques,* parce qu'on en rencontre toujours une en calculant de la même manière la longueur d'un arc d'ellipse; nous en parlerons longuement dans les Chapitres VIII et suivants.

Pour $n > 2$, c'est-à-dire pour $k > 4$, on a les intégrales *ultra-elliptiques;* nous n'avons pas à faire leur étude qui se rattache à la théorie générale des intégrales abéliennes.

226. Le calcul des intégrales circulaires est dominé par cette observation générale, que *toutes sont exprimables au moyen des fonctions rationnelles, radicales et logarithmiques étudiées dans les Chapitres qui précèdent celui-ci.* En conservant pour $\varphi(x)$ la notation du n° **223**, et en représentant par $\Upsilon(s)$ comme au n° **224** quelque composante rationnelle et logarithmique, provenant de l'intégration d'une certaine différentielle rationnelle en s, on a effectivement cette proposition.

L'intégrale (1), *supposée circulaire, a pour expression :*

si $k = 1$,

$$\Upsilon(\sqrt{a_1 + b_1 x}) = \Upsilon[\sqrt{\varphi(x)}]; \tag{18}$$

si $k = 2$,

$$\Upsilon\left(b_2\sqrt{\frac{a_1 + b_1 x}{a_2 + b_2 x}}\right) = \Upsilon\left[\frac{b_2}{a_2 + b_2 x}\sqrt{\varphi(x)}\right]. \tag{19}$$

I. En supposant $k = 1$, appelant s une nouvelle variable d'intégration, et posant

$$a_1 + b_1 x = s^2,$$

d'où

$$x = \frac{s^2 - a_1}{b_1}, \qquad dx = \frac{2s}{b_1}\,ds. \tag{20}$$

l'intégrale (1) se change en

$$\int \frac{2s}{b_1}\,\mathrm{F}\left(\frac{s^2 - a_1}{b_1}, s\right) ds,$$

et la fonction de s placée maintenant sous le signe $\int$ est rationnelle. Cette dernière intégrale est donc de la forme $\Upsilon(s)$, et la substitution inverse $s = \sqrt{a_1 + b_1 x} = \sqrt{\varphi(x)}$ conduit bien pour la proposée à l'expression (18).

II. En supposant enfin $k = 2$, nous exécuterons d'abord la deuxième substitution du n° **223** en prenant

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -a_2, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = b_2,$$

pour annuler le coefficient de t dans le second facteur de $\psi(t)$, c'est-à-dire en faisant

$$x = \frac{1 - a_2 t}{b_2 t}. \tag{21}$$

Il vient ainsi

$$\psi(t) = b_2 b_1 + b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) t,$$

moyennant quoi (I) l'intégrale (1) exprimée en fonction de t est de la forme

$$\Upsilon\left[\sqrt{b_2 b_1 + b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) t}\right].$$

Il suffit maintenant de transformer cette fonction par la substitution inverse de (21), savoir

$$t = \frac{1}{a_2 + b_2 x},$$

pour obtenir l'expression (19).

227. D'après ce qui précède, il est évident qu'en composant la substitution (21), rationnelle et du premier degré en t, avec la substitution entière et du second degré en s,

$$t = \frac{s^2 - b_2 b_1}{b_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)},$$

c'est-à-dire en exécutant une seule substitution rationnelle mais du deuxième degré en s, on rend rationnelle dans le dernier des cas ci-dessus la différentielle de l'intégrale circulaire considérée. Comme la substitution (20), qui jouit de la même propriété dans le premier cas, est aussi rationnelle (même entière) et du deuxième degré, *une substitution convenable de cette sorte peut toujours*

ramener le calcul d'une intégrale circulaire à l'intégration d'une différentielle rationnelle.

Cette remarque est la base des procédés en usage pour le calcul pratique des intégrales circulaires; mais ce que nous avons à en dire sera mieux placé dans notre troisième Partie.

228. On peut exécuter aussi le calcul d'une intégrale circulaire, en la ramenant d'abord à ses intégrales fondamentales par la réduction expliquée au n° **224**, puis en appliquant à ces dernières, qui sont fort simples, la méthode du n° **226**.

I. Pour $k = 1$, il y a une seule intégrale fondamentale que nous écrirons

$$\int \frac{du}{(u-\mathfrak{a})\sqrt{G(u-a)}}, \tag{22}$$

en appelant désormais u la variable d'intégration et G, a, $\mathfrak{a}$ trois constantes, la première non $= 0$, les dernières inégales. La substitution

$$u = a + s^2,$$

d'où

$$du = 2s\,ds,$$

change cette intégrale en

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{G}}\int \frac{2\,ds}{s^2-(\mathfrak{a}-a)} &= \frac{1}{\sqrt{G(\mathfrak{a}-a)}}\int\left(\frac{1}{s-\sqrt{\mathfrak{a}-a}}-\frac{1}{s+\sqrt{\mathfrak{a}-a}}\right)ds\\ &= \frac{1}{\sqrt{G(\mathfrak{a}-a)}}\, l\left[\frac{s-\sqrt{\mathfrak{a}-a}}{s+\sqrt{\mathfrak{a}-a}}\right]+C.\end{aligned}$$

La substitution inverse $s = \sqrt{u-a}$ donne pour expression définitive de l'intégrale cherchée (22)

$$\frac{1}{\sqrt{G(\mathfrak{a}-a)}}\, l\left[\frac{\sqrt{u-a}-\sqrt{\mathfrak{a}-a}}{\sqrt{u-a}+\sqrt{\mathfrak{a}-a}}\right]+C. \tag{23}$$

II. Pour $k = 2$, il y a une seule intégrale fondamentale de *première espèce* et une seule aussi de *dernière espèce,* que nous

écrirons respectivement

$$(24)\qquad \int \frac{du}{\sqrt{G(u-a)(u-b)}},$$

$$(25)\qquad \int \frac{du}{(u-\mathfrak{a})\sqrt{G(u-a)(u-b)}},$$

où les constantes G, a, b, $\mathfrak{a}$ sont la première non $=0$, les trois autres toutes inégales.

1° La substitution (21), qui est ici

$$u = \frac{1+bt}{t},$$

d'où

$$du = -\frac{1}{t^2}\,dt,$$

change l'intégrale (24) en

$$-\int \frac{dt}{t\sqrt{G(b-a)\left(t-\frac{1}{a-b}\right)}},$$

c'est-à-dire, au signe près, en ce que devient l'intégrale (22) quand on y remplace u, G, a, $\mathfrak{a}$ par t, $G(b-a)$, $\frac{1}{a-b}$, o. Cette dernière a donc pour expression (I)

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\,l\left[\frac{\sqrt{t-\frac{1}{a-b}}-\sqrt{\frac{1}{b-a}}}{\sqrt{t-\frac{1}{a-b}}+\sqrt{\frac{1}{b-a}}}\right]+C,$$

que la substitution inverse $t=\frac{1}{u-b}$ change facilement en

$$(26)\quad \frac{1}{\sqrt{G}}\,l\,\frac{\sqrt{\frac{u-a}{u-b}}+1}{\sqrt{\frac{u-a}{u-b}}-1}+C=\frac{1}{\sqrt{G}}\,l\left[u-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(u-a)(u-b)}\right]+C'.$$

2° L'expression de l'intégrale (25) s'obtiendrait de la même manière; mais on opère plus rapidement en y faisant la substitution $u=\mathfrak{a}+\frac{1}{u'}$ qui la ramène immédiatement à la précédente. Le résultat de ce calcul n'a rien d'intéressant pour nous.

229. L'ambiguïté des expressions (23), (26) se lève par des moyens fort simples dont le principe est applicable aux cas analogues qui se présentent à chaque instant.

La détermination de chaque radical écrit plusieurs fois doit naturellement être partout la même. Il faut en outre que celles des radicaux constants et les valeurs initiales des radicaux variables soient choisies de manière à assurer l'identité des premiers développements, tant de la dérivée de l'expression considérée, que de la détermination adoptée pour la fonction placée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (1). On assigne enfin au logarithme une quelconque des valeurs initiales dont il est susceptible, puis à la constante arbitraire une valeur telle, que l'expression considérée ait bien pour valeur initiale celle qu'il aura plu d'attribuer à cette intégrale.

230. Voici le plus intéressant des résultats fournis par l'inversion des intégrales circulaires.

L'inverse de l'intégrale de première espèce (26) *est une fonction indéfiniment olotrope qui est réductible à volonté, soit à une fonction composée rationnelle et du deuxième degré d'une seule exponentielle à exposant linéaire, soit à une fonction composée linéaire de deux exponentielles de cette sorte, dont les exposants sont égaux et de signes contraires.*

En égalant à x l'expression (26) de cette intégrale et tirant de l'équation ainsi formée la fraction sur laquelle porte le signe l, on trouve d'abord

$$\frac{\sqrt{\dfrac{u-a}{u-b}}+1}{\sqrt{\dfrac{u-a}{u-b}}-1} = e^{\sqrt{G}(x-C)},$$

puis, sans difficulté,

$$(27)\quad \begin{cases} u = \dfrac{(b-a)\left[e^{\sqrt{G}(x-C)}\right]^2 + 2(b+a)e^{\sqrt{G}(x-C)} + (b-a)}{4\,e^{\sqrt{G}(x-c)}} \\ = \dfrac{b-a}{4}\,e^{\sqrt{G}(x-C)} + \dfrac{b-a}{4}\,e^{-\sqrt{G}(x-C)} + \dfrac{b+a}{2}, \end{cases}$$

fonction de x évidemment olotrope dans toute l'étendue du plan,

comme chacune des deux exponentielles dont elle est linéairement composée.

La combinaison de cette formule avec les propriétés générales de l'exponentielle fournit toutes celles de la fonction u, et de même pour sa fonction inverse (26), en utilisant les propriétés des radicaux et du logarithme; de même encore pour toutes les autres intégrales circulaires. Il nous suffira amplement toutefois d'étudier les déterminations particulières dont nous parlerons dans le paragraphe suivant.

Remarquons enfin que la même fonction étant naturellement l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$(28) \qquad \frac{du}{dx} = \sqrt{G(u-a)(a-b)}$$

de même forme, plus simple encore, que l'équation différentielle fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques (**299**, *inf.*), ses propriétés générales, à elle-même et à sa fonction inverse, pourraient être déduites de cette équation par la méthode directe que nous serons forcés de suivre au numéro cité. Mais cette considération même nous dispense de faire connaître ici la méthode dont il s'agit; il importe, au contraire, de prendre la formule (27) pour base de la théorie qui va suivre, afin de laisser tout à fait en évidence sa connexité très étroite avec celle du logarithme et de l'exponentielle.

Sinus et cosinus.

231. Si l'on prend

$$(1) \qquad a = -b = G = -1, \qquad \sqrt{G} = \sqrt{-1} = +i$$

et

$$(2) \qquad C = \begin{cases} 0, \\ \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

la formule générale (27) du numéro précédent donne deux fonctions particulières très remarquables, qui, pour les valeurs réelles de x, coïncident en fait avec celles représentées dans les éléments par $\cos x$, $\sin x$. En conservant les mêmes notations pour toutes

les valeurs de x, et en nous souvenant de la dernière égalité du n° **201**, VI, nous aurons donc, mais ici par définition,

$$(3)\qquad \begin{cases} \cos x = \dfrac{(e^{ix})^2+1}{2e^{ix}} = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \\ \sin x = \dfrac{(e^{ix})^2-1}{2ie^{ix}} = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}, \end{cases}$$

fonctions indéfiniment olotropes comme nous l'avons dit au numéro précédent et dont ces formules, combinées avec les propriétés de l'exponentielle, vont nous permettre de faire très facilement l'étude simultanée.

Les développements de e^{ix}, e^{-ix} fournissent immédiatement les séries de convergence illimitée

$$(4)\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$(5)\qquad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Ces fonctions sont liées l'une à l'autre par les relations

$$(6)\qquad \cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

$$(7)\quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}, \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},$$

que les formules de définition (3) rendent évidentes, et par ces deux-ci

$$(8)\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

que donnent les mêmes équations combinées avec la dernière égalité du n° **201**, VI.

On a souvent besoin de la formule

$$(9)\qquad \lim \frac{\sin x}{x} = 1,$$

pour $\lim x = 0$; elle résulte immédiatement du développement (5).

232. La résolution par rapport à X de l'équation

$$(10)\qquad \cos X = \cos x$$

peut s'effectuer en tirant d'abord e^{iX} de l'équation du second degré, équivalente en vertu des formules (3),

$$(e^{iX})^2 - \frac{(e^{ix})^2+1}{e^{ix}} e^{iX} + 1 = 0,$$

ce qui donne facilement

$$e^{iX} = \begin{cases} \text{soit } e^{ix}, \\ \text{soit } e^{-ix}, \end{cases}$$

puis X de ces dernières équations (204), ce qui conduit à

$$iX = \begin{cases} \text{soit } \quad ix + m.2\pi i, \\ \text{soit } -ix + m.2\pi i. \end{cases}$$

Il en résulte pour X ces deux suites de valeurs

$$(11)\quad \begin{cases} \ldots,\ x - 2.2\pi, \quad x - 2\pi, \quad x, \quad x + 2\pi, \quad x + 2.2\pi, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad -x - 2\pi, \quad -x, \quad -x + 2\pi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont l'existence entraîne les identités

$$(12)\qquad \cos(x + m.2\pi) = \cos x, \qquad \cos(-x) = \cos x.$$

En opérant de la même manière, ou bien en utilisant la première des relations (8), on trouve que l'équation

$$(13)\qquad \sin X = \sin x$$

a pour racines

$$(14)\quad \begin{cases} \ldots,\ x - 2.2\pi, \quad x - 2\pi, \quad x, \quad x + 2\pi, \quad x + 2.2\pi, \ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \pi - x - 2\pi, \quad \pi - x, \quad \pi - x + 2\pi, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

d'où les identités analogues

$$(15)\qquad \sin(x + m.2\pi) = \sin x, \qquad \sin(\pi - x) = \sin x.$$

L'avant-dernière formule du n° 201, VI donne immédiatement ces deux autres relations

$$(16)\qquad \cos(x + \pi) = -\cos x, \qquad \sin(x + \pi) = -\sin x,$$

dont la combinaison avec les dernières écrites dans les lignes (12), (15) conduit à

$$\cos(-x+\pi) = -\cos x, \qquad \sin(-x) = -\sin x.$$

233. La nature des racines (11), (14) trouvées ci-dessus aux équations (10), (13) montre que *le cosinus et le sinus sont des fonctions périodiques* (**204**), avec la même période $\pm 2\pi$ qui est élémentaire (**260**, *inf.*).

Les identités (16) confèrent à nos deux fonctions une périodicité imparfaite relativement à leur demi-période π.

234. Les zéros du cosinus et du sinus s'obtiennent en résolvant les équations numériques

$$\cos x = 0, \qquad \sin x = 0.$$

A cause de la formule (5), la dernière peut s'écrire $\sin x = \sin 0$, d'où (**232**) $x =$

$$\ldots, \quad -3\pi, \quad -2\pi, \quad -\pi, \quad 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots.$$

La première écrite $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 0$ donne $x =$

$$\ldots, \quad \frac{\pi}{2} - 2\pi, \quad \frac{\pi}{2} - \pi, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \pi, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi, \quad \ldots,$$

Ces zéros sont tous simples (3), car chacun de ceux d'une fonction diffère de tous ceux de l'autre, et, par suite, ne peut annuler cette seconde fonction, c'est-à-dire la dérivée de la première au facteur numérique ± 1 près (**231**).

235. Les coefficients des séries (4), (5) étant réels, les valeurs du cosinus et du sinus le sont aussi pour toutes les valeurs réelles de x; il est facile maintenant de les discuter; nous le ferons pour le sinus entre 0 et 2π, ce qui est suffisant à cause de sa périodicité.

Comme $\sin x$ n'a aucun zéro entre ε, quantité positive infiniment petite, et $\pi - \varepsilon$, il conserve un signe constant dans cet intervalle (**22**); ce signe est $+$ parce que, $\mathrm{D}\sin x = \cos x$ se réduisant à 1 pour $x = 0$ d'après la formule (4), $\sin x$ est croissant en $x = 0$

(**19**), (**21**), et d'ailleurs $=0$. Mais, comme ses zéros sont tous simples et réels, $\sin x$ change de signe en chacun d'eux (**18**) et prend le signe — de $-\pi+\varepsilon$ à $-\varepsilon$.

Il en résulte, d'après la seconde des relations (8), que $\cos x$ est positif de 0 à $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$, négatif de $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ à π; on a, d'autre part, $\sin\frac{\pi}{2}=\cos 0=1$. De $x=0$ à $x=\frac{\pi}{2}$, le sinus croît donc de 0 à 1; de $x=\frac{\pi}{2}$ à $x=\pi$, il décroît de 1 à 0. Après quoi, la seconde des relations (16) montre que, de π à $\frac{3}{2}\pi$, $\sin x$ décroît encore de 0 à -1, que de $\frac{3}{2}\pi$ à 2π, il croît de -1 à 0.

236. Les relations de définition (3), combinées avec les propriétés fondamentales de l'exponentielle et les identités évidentes

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x, \tag{17}$$

$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x, \tag{18}$$

donnent facilement les formules

$$\left\{\begin{aligned}\cos(x\pm y)&=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y,\\ \sin(x\pm y)&=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,\end{aligned}\right. \tag{19}$$

pour l'*addition* (ou la *soustraction*) *des arguments* dans le sinus et le cosinus.

On peut en déduire de proche en proche celles relatives à la *multiplication* de l'argument, et aussi à sa *division*. Mais il y a pour cela une autre méthode bien préférable que nous indiquerons plus loin (**244**, *inf.*).

237. Les relations (19) fournissent facilement les éléments du cosinus et du sinus. La première donne, par exemple,

$$\cos x=\cos(x'+ix'')=\cos x'\,\frac{e^{-x''}+e^{x''}}{2}+i\sin x'\,\frac{e^{-x''}-e^{x''}}{2}.$$

Le premier terme du second membre et le coefficient de i dans le dernier, étant des quantités évidemment réelles, sont précisément les éléments de $\cos x$; de même pour $\sin x$.

238. La formule précédente facilite la discussion de $\cos x$ pour des valeurs infinies de la variable.

D'une part $\cos x'$, $\sin x'$ ne peuvent jamais s'évanouir en même temps, à cause de la relation (6); d'autre part, pour x'' infini, l'une des exponentielles $e^{x''}$, $e^{-x''}$ est infinie, l'autre infiniment petite. Il en résulte que, si x'' est infini, $\cos x$ l'est toujours aussi; que sinon x' est infini et $\cos x$ indéterminé. Les choses se passent de même pour $\sin x$. Chacune de ces fonctions possède une singularité essentielle à l'infini (239, *inf.*).

239. On représente par $\operatorname{arc}\cos x$, $\operatorname{arc}\sin x$, les fonctions inverses u fournies respectivement par la résolution des équations

$$\cos u = x, \tag{20}$$

$$\sin u = x. \tag{21}$$

On trouverait immédiatement leurs expressions logarithmiques et radicales en réalisant les hypothèses numériques (1), (2) dans la fonction (26) du n° **228**, après y avoir écrit x à la place de u; mais, comme on a $\operatorname{arc}\cos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\sin x$ (**231**), il suffit d'étudier cette dernière fonction, et il vaut mieux la tirer de l'équation (21) transformée par la substitution à $\sin u$ de son expression rationnelle en e^{iu}, fournie par la seconde des relations (3).

Cette équation devient ainsi

$$(e^{iu})^2 - 2ixe^{iu} - 1 = 0$$

et donne d'abord

$$e^{iu} = ix + \sqrt{1 - x^2},$$

puis

$$u = \operatorname{arc}\sin x = \frac{1}{i}\, l(ix + \sqrt{1 - x^2}). \tag{22}$$

Cette fonction composée peut cesser d'être olotrope seulement pour les valeurs de x annulant, soit l'expression placée sous le signe l, soit le radical (**187**), (**125**). Les valeurs du premier genre n'existent pas, à cause de l'identité évidente

$$(ix + \sqrt{1 - x^2})(ix - \sqrt{1 - x^2}) = -1. \tag{23}$$

Les seules phases critiques de $\operatorname{arc}\sin x$ correspondent donc à

$$x = \pm 1.$$

Ce sont même des phases singulières; effectivement quand x est très voisine de ± 1, on peut développer le logarithme de la formule (22) en la somme de $l(ix)$, fonction olotrope, et d'une série procédant suivant les puissances entières de la quantité $\frac{\sqrt{1-x^2}}{ix}$, alors très petite (**171**); or la somme des termes de la série où cette quantité est affectée d'exposants impairs ne peut évidemment être olotrope en $x = \pm 1$. La méthode des n^{os} **141** et suiv., appliquée à la résolution de l'équation (21) à partir de $x = \pm 1$, donnerait des développements rhizomorphes (**153**).

L'équation différentielle (24) du n° **242**, *inf.*, rend d'ailleurs ces divers points évidents, en montrant immédiatement que $\frac{du}{dx}$ n'a d'autres phases singulières que $x = \pm 1$ (**165***), (**125**).

240. En appelant u quelque valeur de $\arcsin x$, toutes celles qui correspondent à la même valeur de x et à la même détermination du radical sont de la forme

$$u + m\frac{2\pi i}{i} = u + m.2\pi.$$

Celles qui correspondent à la détermination opposée du radical sont de la forme

$$\pi - u + m.2\pi,$$

car l'identité (23) donne

$$l(ix + \sqrt{1-x^2}) + l(ix - \sqrt{1-x^2}) = l(-1) = i(\pi + m.2\pi).$$

Ceci s'accorde avec ce qui a été dit au n° **232**.

241. Les incidents du calcul de $\arcsin x$ par cheminement sont intéressants à étudier. Tous les chemins à considérer se composeront ici d'un chemin simple précédé de quelque combinaison des deux boucles $(+1)$, (-1), enveloppant $+1$ et -1, seules valeurs de x qui soient singulières pour cette fonction.

Nous prendrons $x_0 = 0$, la valeur initiale du radical $= +1$, celle du logarithme $= 0$. Nous tracerons le chemin simple [oX] arbitrairement, sauf la condition de ne contenir ni $+1$, ni -1, et nous appellerons U la valeur finale de $\arcsin x$ à son extrémité X.

Nous composerons la boucle $(+1)$: 1° du segment $[o(1-\varepsilon)]$ de l'axe des quantités réelles, allant de l'origine au point $1-\varepsilon$, où ε est une quantité positive très petite; 2° d'un anneau également très petit $[+1]$, commençant en $1-\varepsilon$ et y finissant après avoir enveloppé une seule fois le point $+1$; 3° du même segment $[o(1-\varepsilon)]$ parcouru en sens inverse. Pour la boucle (-1), nous prendrons la symétrique par rapport à l'origine O_x, de celle qui vient d'être tracée.

Posons

$$ix + \sqrt{1-x^2} = v = v' + iv'',$$

et plaçons d'abord la boucle $(+1)$ avant le chemin simple.

Pendant que x marche de o à $1-\varepsilon$ sur le segment $[o(1-\varepsilon)]$, on a

$$v' = \sqrt{1-x^2}, \qquad v'' = x,$$

parce que x et le radical restent réels; d'autre part, v' décroît sans cesse de $+1$ à $+\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}$, v'' croît de o à $1-\varepsilon$, et l'on a constamment $v'^2 + v''^2 = 1$. Il en résulte que le point v se meut dans le sens de rotation direct sur la circonférence $[O_v]$ ayant O_v pour centre et 1 pour rayon, en passant de $v = 1$ à

$$v = +\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)} + i(1-\varepsilon),$$

point très voisin de $v = i$.

Sur l'anneau $[+1]$, x reste très voisine de 1, le radical de o, et v de i; après son parcours, le radical écrit $i(x-1)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}$ revient en $1-\varepsilon$ avec la valeur finale $-\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}$, produit de sa valeur initiale $+\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)}$ par -1 racine carrée principale de 1 (**166**).

Quand x revient en $x = o$, marchant à rebours sur le segment rectiligne $[o(1-\varepsilon)]$, v' décroît ainsi de $-\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ à -1, et v'' de $1-\varepsilon$ à o; il s'ensuit que v marche sur la circonférence $[O_v]$, et toujours dans le sens direct, de $v = -\sqrt{\varepsilon(2-\varepsilon)} + i(1-\varepsilon)$ à $v = -1$.

Le parcours de la boucle $(+1)$ ayant ainsi pour effet de transporter v de $v = +1$ à $v = -1$, par un demi-tour direct autour de O_v, fait varier $l(v)$ de o à πi (**186** *bis*).

Poursuivons notre marche sur le chemin simple [oX]. Si pour un instant on représente par $\pm\sqrt{1-x^2}$ les valeurs atteintes en x par les déterminations du radical qui partent de $x=0$ avec les valeurs initiales ± 1 respectivement, l'identité (23) qui donne

$$l(ix-\sqrt{1-x^2})+l(ix+\sqrt{1-x^2})=l(-1)=\pi i,$$

en attribuant en $x=0$ aux deux logarithmes les valeurs initiales πi et o, montre qu'en X la valeur finale du premier est égale à l'excès de πi sur celle du second. Mais il résulte de tout ce qui précède, que la première est celle de $i\arcsin x$ après le parcours de la boucle (+1) suivie du chemin simple, que la seconde est celle de la même fonction calculée sur le chemin simple seulement, c'est-à-dire iU. *Le chemin simple précédé de la boucle* (+1) *conduit donc* $\arcsin x$ *à la valeur finale* $\pi-\mathrm{U}$.

En raisonnant de la même manière, on trouve que *l'emploi de l'autre boucle* (—1) *substituée à la première donne la valeur finale* $-\pi-\mathrm{U}$.

Si l'on place avant le chemin simple la même boucle parcourue deux fois, on retrouve U *pour valeur finale.* Car la seconde donne $\pm\pi-\mathrm{U}$, et la première placée avant celle-ci

$$\pm\pi-(\pm\pi-\mathrm{U})=\mathrm{U}.$$

Si l'on place d'abord la boucle (+1) *et ensuite la boucle* (—1), *on obtient la valeur finale* $2\pi+\mathrm{U}$. Car la seconde seule donne $-\pi-\mathrm{U}$, et ensuite $\pi-(-\pi-\mathrm{U})=2\pi+\mathrm{U}$ quand on la fait précéder de la première. *Si l'on parcourait d'abord la boucle* (—1), *puis la boucle* (+1), *puis le chemin simple, on arriverait* à $-2\pi+\mathrm{U}$.

Chacun trouvera maintenant sans difficulté la modification apportée à la valeur finale de $\arcsin x$, par l'adjonction au chemin simple, d'une suite quelconque des deux boucles arbitrairement répétées.

242. On obtiendra naturellement la dérivée de $u=\arcsin x$, en particularisant par les attributions numériques (1), (2), la fonction placée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (24) du n° **228**, et en y précisant convenablement le radical, après y avoir remplacé u par x. On peut aussi différentier l'équation (21), ce qui donne,

en vertu des relations (7),

$$(24) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

où il faut choisir celle des deux déterminations du radical qui est égale à $\cos u$.

243. Le seul développement usité de $\arcsin x$ est celui de Maclaurin, auquel l'équation différentielle (24) conduit immédiatement.

En considérant, par exemple, la détermination de $\arcsin x$ qui s'annule en $x = 0$, le radical de cette équation doit être pris avec la valeur initiale $+1$ à cause de $\cos 0 = 1$, et son développement par la formule du binome (**118**) donne

$$(25) \quad \frac{du}{dx} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}x^{2n} + \ldots.$$

En intégrant et ayant égard à la condition initiale, il vient donc

$$(26) \quad u = \arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

Si l'on choisissait la détermination de $\arcsin x$ égale à π pour $x = 0$, il faudrait, à cause de $\cos \pi = -1$, attribuer au radical la valeur initiale -1, ce qui changerait tous les signes du développement (25). On obtiendrait ainsi celui de cette détermination, en retranchant de π la série (26).

Le rayon de convergence maximum de cette série est naturellement 1, plus courte distance de zéro, valeur initiale de x, à $+1$ et -1, seules valeurs de cette variable qui soient singulières pour $\arcsin x$ (**201***). On remarquera que *cette série converge encore, et même celle des modules de ses termes, pour* $\operatorname{mod} x = 1$.

Effectivement cette série de modules est

$$(27) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{1}{2n+1} + \ldots,$$

pour laquelle

$$\frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{-1},$$

rapport du $(n+1)^{\text{ième}}$ terme au $n^{\text{ième}}$, se développe en une série entière par rapport à $\frac{1}{n}$,

$$1-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots,$$

dont le premier terme est 1, où le coefficient de $\frac{1}{n}$ est la quantité $-\frac{3}{2}$ algébriquement inférieure à -1 (69).

La série (26) restant ainsi convergente sur la circonférence de son cercle de convergence, y est continue (**126***); d'autre part, la relation (22), combinée avec la proposition du n° **103**, montre que $\arcsin x$ jouit de la même propriété pour toute valeur de x.

Il en résulte que *la formule* (26) *a lieu, même pour* $\text{mod}\, x = 1$. En particulier, *la somme de la série* (27) *est égale à* $\frac{\pi}{2}$, valeur finale de $\arcsin x$ au bout du chemin rectiligne conduisant de $x=0$ à $x=1$.

244. La théorie dont nous nous occupons comprend des formules très nombreuses, parmi lesquelles nous devons nous contenter d'indiquer les plus importantes. En appelant m un entier positif, les identités (3), (17), (18) donnent aisément

$$\cos mx = \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2} = \frac{1}{2}\left[(\cos x + i\sin x)^m + (\cos x - i\sin x)^m\right],$$

$$\sin mx = \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[(\cos x + i\sin x)^m - (\cos x - i\sin x)^m\right].$$

En développant les seconds membres, on voit ainsi que $\cos mx$, $\sin mx$ *sont exprimables en fonctions composées entières de* $\cos x$ *et* $\sin x$.

Ce sont les formules pour la *multiplication de l'argument*. En substituant $\sqrt{1-\cos^2 x}$ à $\sin x$ dans la première et $\sqrt{1-\sin^2 x}$ à $\cos x$ dans la seconde, on obtient pour $\cos mx$, $\sin mx$, des expressions renfermant seulement $\cos x$ et $\sin x$ respectivement; la première est toujours entière; la seconde est entière ou irrationnelle, selon que le nombre m est impair ou pair.

245. Si, dans ces dernières formules, on change x en $\frac{x}{m}$, elles

fournissent deux équations, la première entre $\cos x$ et $\cos\frac{x}{m}$, la seconde entre $\sin x$ et $\sin\frac{x}{m}$, qui sont entières, ou peuvent être rendues telles au moyen de transformations très simples. Ce sont celles dont la résolution par rapport à $\cos\frac{x}{m}$, $\sin\frac{x}{m}$ opère la *division de l'argument.*

246. Les formules (3) donnent encore

$$2^m \cos^m x = (e^{ix} + e^{-ix})^m,$$
$$2^m i^m \sin^m x = (e^{ix} - e^{-ix})^m.$$

Le développement des seconds membres, suivi de l'accouplement des termes où les exposants de e sont opposés, donne $\cos^m x$ en fonction composée linéaire des cosinus des quantités mx, $(m-2)x$, $(m-4)x$, ..., et $\sin^m x$ exprimé de la même manière au moyen des cosinus de ces quantités quand m est pair, de leurs sinus quand m est impair.

247. La propriété de la fonction exponentielle, d'avoir des valeurs en progression géométrique quand celles correspondantes de la variable sont en progression arithmétique (199), jointe à la facilité de la sommation des progressions géométriques, permet de sommer, facilement aussi, les valeurs du cosinus ou du sinus qui correspondent aux valeurs de x,

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \quad \ldots, \quad a+mh.$$

Pour $h \neq 0$, la sommation de la progression géométrique suivante conduit à

$$e^{ia} + e^{i(a+h)} + \ldots + e^{i(a+mh)} = \frac{e^{i[a+(m+1)h]} - e^{ia}}{e^{ih} - 1} = \frac{e^{i\left[a+\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right]} - e^{i\left(a-\frac{h}{2}\right)}}{2i \sin\frac{h}{2}},$$

d'où, en changeant a, h en $-a$, $-h$,

$$e^{-ia} + e^{-i(a+h)} + \ldots + e^{-i(a+mh)} = -\frac{e^{-i\left[a+\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right]} - e^{-i\left(a-\frac{h}{2}\right)}}{2i \sin\frac{h}{2}}.$$

Si l'on ajoute ces égalités membre à membre, il viendra, en vertu de la première des formules (3),

$$\cos a + \cos(a+h) + \ldots + \cos(a+mh)$$
$$= \frac{\sin\left[a+\left(m+\frac{1}{2}\right)h\right] - \sin\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} = \frac{\cos\left(a+\frac{mh}{2}\right)\sin\frac{(m+1)h}{2}}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Si l'on retranche la seconde de la première, on trouve une formule analogue pour la sommation des valeurs correspondantes du sinus.

Chacune de ces formules fait retrouver l'autre, quand on la différentie par rapport à a. Différentiées indéfiniment par rapport à h, elles conduisent à une foule d'autres inutiles à consigner ici.

248. Les relations très simples

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

que rendent évidentes les formules (3) du n° **231** et (10), (21) des n^{os} **216**, **220**, sont celles dont nous avons parlé au n° **221**. Elles permettraient de déduire immédiatement les propriétés de la tangente et de la cotangente, de celles du sinus et du cosinus que nous venons d'exposer.

249. En réalisant les hypothèses numériques (1) dans l'équation (28) du n° **230**, elle devient simplement

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1-u^2},$$

et il importe de retenir qu'au point de vue analytique $\sin x$ et $\cos x$ sont simplement les intégrales particulières de cette équation différentielle, caractérisées par les deux conditions initiales

$$\left.\begin{array}{ll} u = 0 & (\text{avec } \sqrt{1-u^2} = +1), \\ u = 1, & \end{array}\right\} \text{ pour } x = 0.$$

De même, arc $\sin x$ et arc $\cos x$ sont les déterminations de l'in-

tégrale circulaire spéciale de première espèce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

sous les conditions initiales respectives

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{1-x^2} = +1, & \text{arc sin o} = 0, \\ \sqrt{1-x^2} = -1, & \text{arc cos o} = \frac{\pi}{2}, \end{array}\right\} \text{pour } x = 0.$$

Le rôle joué par ces diverses fonctions dans la théorie des intégrales circulaires est identique à celui des fonctions elliptiques canoniques, dans celle des intégrales de cette dernière sorte (Chap. XII, *inf.*).

250. Quand x est réelle, $\cos x$, $\sin x$, $\tang x$, $\cot x$ le sont aussi, et la relation (17) montre que les deux premières fonctions sont respectivement alors les premier et second éléments de e^{ix}, c'est-à-dire (**201**, V) *l'abscisse et l'ordonnée rectangulaires de l'extrémité d'un arc de longueur algébrique* $= x$, *mesuré à partir du point* (1, 0) *sur la circonférence de rayon* $= 1$ *qui a l'origine pour centre*. On en conclut facilement (**248**) que $\tang x$, $\cot x$ sont les longueurs algébriques des segments des tangentes aux points (1, 0), (0, 1) de la même circonférence, compris entre ces points et les traces du rayon vecteur passant par l'extrémité de l'arc, que les fonctions

$$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \text{coséc} = \frac{1}{\sin x}$$

mesurent algébriquement les segments du même rayon vecteur allant de l'origine à ses traces ci-dessus.

Cette représentation géométrique a valu à ces six fonctions et à leurs inverses, ainsi qu'à toutes celles qui en sont composées, le nom générique de fonctions *circulaires*, et leur assigne un rôle de la plus haute importance dans toutes les questions impliquant directement ou indirectement la considération du cercle, par exemple dans la Géométrie (métrique), la Cinématique, l'Astronomie, etc. Combinée avec la facilité extrême de la comparaison numérique des arcs de cercle, elle a permis d'édifier sur les propriétés les plus

simples de la ligne droite et du cercle, la théorie de leurs valeurs réelles. C'est la méthode suivie dans les traités de *Trigonométrie,* auxquels nous renvoyons le lecteur pour les détails que nous avons dû omettre.

Mais si elle est plus élémentaire, si elle suffit aux besoins de la pratique (qu'elle dépasse même de beaucoup trop au détriment d'études mathématiques plus sérieuses), elle n'en est pas moins artificielle et imparfaite, car elle laisse dans l'obscurité la plus profonde la nature analytique propre de ces fonctions, notamment leur étroite connexité avec l'exponentielle et le logarithme.

L'utilité pratique extrême des fonctions circulaires a rendu nécessaires des Tables fournissant des valeurs numériques suffisamment approchées de $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$ pour les valeurs réelles de x, ou plutôt leurs *logarithmes vulgaires,* car on s'arrange toujours de manière à exécuter les calculs par logarithmes. Nous ferons connaître plus tard (**292**, III, *inf.*) le principe de la construction de ces Tables ; avec un peu d'attention chacun reconnaîtra que, *jointes à la Table des logarithmes des nombres, elles équivalent à une Table unique à double entrée qui donnerait les valeurs numériques de* $e^{x'+ix''}$ *pour toutes les combinaisons de valeurs des éléments* x', x'' *de l'exposant.*

CHAPITRE VII.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS CIRCULAIRES EN SÉRIES DE FRACTIONS SIMPLES ET EN SÉRIES FACTORIELLES.

Généralités sur les fonctions unipériodiques.

251. Maintenant nous aurons à employer fréquemment le moyen d'investigation spécial dont nous avons fait connaître le principe au n° **49**.

Comme sa mise en œuvre implique essentiellement la considération des infinis et des zéros des fonctions à comparer, comme, d'autre part, les fonctions dont nous aurons à nous occuper sont périodiques (**204**), il faut avant tout étudier avec soin les caractères généraux imprimés par la périodicité à la distribution de ces quantités et aux autres particularités les concernant.

Sauf mention du contraire, nous supposerons expressément que *les fonctions périodiques dont nous parlerons sont indéfiniment méromorphes (ou olotropes) et ne dégénèrent pas en des constantes.*

Pour une fonction de cette espèce $f(x)$, nous appellerons deux valeurs données a, b de la variable (et aussi les points correspondants) *congrues ou incongrues selon sa période* Π, suivant que la différence $a - b$ est ou non de la forme $m\Pi$, m désignant quelque entier (positif ou négatif).

252. *Si les valeurs initiales x_0, $x^{(0)}$ de x sont congrues, les termes semblables dans les développements de*

$$f(x_0 + h), \quad f(x^{(0)} + h),$$

en séries procédant suivant les puissances de h à exposants entiers, les premiers éventuellement négatifs (**37**), (**56**) *sont respectivement égaux.*

Car, à cause de

$$x^{(0)} + h = x_0 + h + (x^{(0)} - x_0) = x_0 + h + m\Pi,$$

l'identité fondamentale

$$(1) \qquad f(x + m\Pi) = f(x)$$

donne, quel que soit h,

$$(2) \qquad f(x^{(0)} + h) = f(x_0 + h),$$

ce qui entraîne évidemment l'égalité numérique des coefficients dont il s'agit.

En particulier, *toutes les dérivées de $f(x)$, si elle est olotrope, ont en x_0 et $x^{(0)}$ des valeurs égales; si x_0 est un zéro ou un infini, $x^{(0)}$ est aussi un zéro ou un infini de même degré de multiplicité, et dans ce dernier cas avec le même résidu, etc.*

253. *Si, dans les mêmes développements, les coefficients des termes semblables sont respectivement égaux, la différence $x^{(0)} - x_0$ est une période de $f(x)$.*

Car alors l'identité (2) a lieu pour toutes les valeurs de h à modules suffisamment petits, puis s'étend par voie de cheminement à toutes les valeurs imaginables de cette quantité (**177***). En faisant donc $h = x - x_0$, elle donne, quelle que soit x,

$$f[x + (x^{(0)} - x_0)] = f(x),$$

ce qu'il suffit évidemment de prouver.

254. *Toute période Π de $f(x)$ appartient à ses dérivées de tous ordres.* La différentiation de l'identité fondamentale (1) donne effectivement pour toute valeur de l'indice k

$$f^{(k)}(x + m\Pi) = f^{(k)}(x).$$

On remarquera bien qu'une fonction n'admet pas nécessairement une période appartenant à sa dérivée. Soit effectivement $f(x)$ une fonction douée d'une période; $f'(x)$ en est douée aussi comme nous venons de le voir, $f'(x) + C$ pareillement; cepen-

dant $f'(x)+\mathrm{C}$ est la dérivée de $f(x)+\mathrm{C}x$ qui ne possède pas cette période quand C est $\neq 0$.

255. *Une même période* Π *appartenant à la fois à* $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... *appartient aussi à une fonction composée rationnelle quelconque, finie ou différentielle, de toutes ces fonctions simples.* Car elle appartient à toutes les dérivées des fonctions $f_1, f_2, \ldots$ (254) et par suite évidemment à toute expression composée rationnellement de ces diverses fonctions simples.

Dans beaucoup de cas, une fonction composée à composante irrationnelle peut être méromorphe et admettre la période Π, ou tout au moins une période multiple de celle-ci; mais dans l'état présent de l'Analyse, il serait bien difficile de les assigner *à priori* (*cf.* 330, *inf.*).

256. *Si* $f(x)$ *admet la période* Π, $\mathrm{F}(x)=f(ax+b)$, *où* a, b *sont des constantes, la première* $\neq 0$ *admet la période* $\frac{\Pi}{a}$. Car $\mathrm{F}\left(x+m\frac{\Pi}{a}\right)=f(ax+b+m\Pi)=f(ax+b)=\mathrm{F}(x)$.

257. Nous appellerons souvent *moment* de deux quantités $a=a'+ia''$, $b=b'+ib''$ le déterminant de leurs éléments

$$\begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}.$$

Sa valeur numérique est représentée géométriquement par l'aire du parallélogramme construit sur les rayons vecteurs menés de l'origine aux points a, b.

Il s'évanouit naturellement quand l'une de ces quantités est nulle; mais, quand la seconde ne l'est pas, il est toujours de signe contraire au second élément du rapport $\frac{a}{b}$, ou bien nul en même temps que lui, à cause de

$$\frac{a}{b}=\frac{a'b'+a''b''}{b'^2+b''^2}-i\,\frac{a'b''-a''b'}{b'^2+b''^2}.$$

Ce rapport est donc réel ou non, selon que le moment est nul ou ne l'est pas. Dans le premier cas, les directions des deux rayons

vecteurs ci-dessus sont identiques ou opposées; dans l'autre cas, elles font entre elles quelque angle proprement dit.

On peut dire encore qu'*il existe ou non entre a, b une relation linéaire et homogène à coefficients réels non tous deux* $=0$, *selon que leur moment est nul ou ne l'est pas*.

258. Cela posé, si l'on considère quelque autre constante Θ offrant avec la période Π un moment non nul, et si l'on choisit arbitrairement une valeur particulière de x, $a = a' + ia''$, *toute valeur* $x' + ix''$ *de* x *est congrue à une autre de la forme*

$$a + p\Pi + t\Theta, \tag{3}$$

où p, t *sont deux quantités réelles convenables, la première comprise entre* o *et* 1. Car alors le système d'équations linéaires simultanées à coefficients réels

$$\begin{cases} \Pi' \mathrm{P} + \Theta' t = x' - a', \\ \Pi'' \mathrm{P} + \Theta'' t = x'' - a'' \end{cases}$$

est possible et déterminé, parce que le déterminant des coefficients des inconnues P, t ne s'évanouit pas; et en appelant m, $m+1$ les deux entiers consécutifs qui comprennent P, on a $\mathrm{P} = m + p$, p tombant entre o et 1. Ces équations donnent donc bien

$$x = a + p\Pi + t\Theta + m\Pi.$$

Tous les points dont les affixes sont de la forme (3) tombent évidemment dans une *bande* illimitée, comprise entre les droites menées par les points a, $a + \Pi$, parallèlement à Θ (qui n'est pas parallèle à Π). En outre, si l'on ajoute à toutes les valeurs de x tombant dans cette bande un même multiple entier de Π, $\mu\Pi$, on obtient toutes celles situées à l'intérieur de la bande de même épaisseur, à bords parallèles menés par les points

$$a + \mu\Pi, \quad a + (\mu + 1)\Pi.$$

Les points ayant pour affixes les termes de la progression arithmétique de raison Π, indéfinie dans les deux sens,

$$\ldots, \quad a - 2\Pi, \quad a - \Pi, \quad a, \quad a + \Pi, \quad a + 2\Pi, \quad \ldots,$$

partagent évidemment en segments égaux à mod Π la droite menée par a parallèlement à Π, et les droites menées par ces points parallèlement à Θ découpent le plan en bandes égales. Il résulte des observations précédentes que *les valeurs prises dans une seule de ces bandes par $f(x)$ et par ses dérivées (ou autres coefficients de ses développements) se répètent indéfiniment dans chacune des autres aux points respectivement congrus.* L'étude de cette fonction périodique peut être limitée à l'intérieur de l'une quelconque de ces bandes; pour fixer les idées on prend $=$o, la quantité arbitraire a, et l'on choisit la *première* bande, celle dont les bords passent par o et Π.

Ces bandes restent les mêmes quand on multiplie Θ par une quantité réelle; mais elles changent si l'on vient à remplacer cette quantité par une autre de direction différente.

Quand x est infinie sans rester à l'intérieur de bandes données en nombre limité, $f(x)$ est essentiellement indéterminée. *Une pareille fonction ne peut donc être méromorphe à l'infini* (51), car alors des valeurs infiniment petites quelconques de x' feraient tendre la fonction $f\left(\frac{1}{x'}\right)$ vers quelque limite, ou au moins la rendraient infinie, au lieu de la rendre indéterminée.

259. Donnons ici une définition qui ne serait pas mieux placée ailleurs. Une phase singulière dans laquelle une fonction donnée d'une seule variable, $F(x)$, entre en $x = \mathfrak{a}$, est dite *essentielle,* quand cette fonction, n'étant pas méromorphe en $\mathfrak{a}$, est néanmoins olotrope, ou au moins méromorphe, dans tout fragment d'une aire donnée contenant $\mathfrak{a}$, auquel ce même point est extérieur.

Quand $F\left(\frac{1}{x'}\right)$ entre dans une phase singulière essentielle en $x' = 0$, on dit que $F(x)$ est douée d'une *singularité essentielle à l'infini.* C'est ce qui arrive, par exemple, quand $F(x)$ étant indéfiniment méromorphe (ou olotrope) sans dégénérer en une constante, l'une ou l'autre des équations

$$F(x) = A, \qquad \frac{1}{F(x)} = 0$$

possède une infinité de racines distinctes; car alors celles de ces racines qui sont extérieures à une aire limitée quelconque S_x, étant

toujours en nombre illimité aussi, puisque l'aire en question ne peut en contenir qu'un nombre limité (31), $F\left(\frac{1}{x'}\right) - A$, $F\left(\frac{1}{x'}\right)$, possèdent en nombre illimité dans une aire limitée quelconque $S_{x'}$, contenant l'origine $x' = 0$, des zéros dans le premier cas, des infinis dans le second. Comme le contraire aurait lieu si ces fonctions étaient méromorphes dans $S_{x'}$, elles ne peuvent l'être, et cependant elles jouissent visiblement de cette propriété dans toute aire à laquelle le point $x' = 0$ est extérieur; la fonction $F\left(\frac{1}{x'}\right)$ entre donc dans une phase singulière essentielle en $x' = 0$, puisqu'elle ne peut évidemment être méromorphe en ce point.

D'après cette définition et les observations faites dans le numéro précédent, *la fonction périodique $f(x)$ possède nécessairement une singularité essentielle à l'infini.*

Nous devons nous borner à ces indications, la considération des phases singulières essentielles étant inutile aux théories dont nous avons à nous occuper.

260. Quel que soit l'entier μ, $f(x)$ supposée douée de la période Π, admet évidemment aussi la période $\Pi_1 = \mu\Pi$, que l'on dit *composée* de Π; mais, sauf le cas de $\mu = \pm 1$, cette nouvelle période n'est pas *équivalente* à Π, parce que les valeurs de l'expression $m\Pi_1$ ne comprennent pas toutes celles de $m\Pi$.

Une période de $f(x)$ est *élémentaire,* si elle n'est composée d'aucune autre ayant un module inférieur au sien. Une pareille période est évidemment celle de moindre module parmi toutes celles qui en sont composées.

Cette fonction admet nécessairement quelque période élémentaire. Car, si $\mu, \mu', \mu'', \ldots$ désignant une suite illimitée d'entiers tous > 1 en valeur absolue, $f(x)$ admettait pour période chacune des quantités $\Pi, \frac{\Pi}{\mu} = \Pi', \frac{\Pi'}{\mu'} = \Pi'', \ldots, \frac{\Pi^{(i-1)}}{\mu^{(i-1)}} = \Pi^{(i)}, \ldots,$ le module de $\Pi^{(i)}$ décroîtrait sans cesse et indéfiniment pour i infini, et, en supposant $f(x)$ olotrope en x_0, l'équation $f(x) - f(x_0) = 0$, qui est satisfaite quel que soit i par $x = x_0 + \Pi^{(i)}$, posséderait une infinité de racines dans une aire limitée quelconque contenant le point x_0; $f(x)$ se réduirait donc à une constante (4), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si Π est une période élémentaire, $\Pi \times (-1) = -\Pi$ en est une aussi, et la seule autre qui puisse évidemment exister.

En prenant une période élémentaire de $f(x)$ pour base du tracé expliqué au n° 258, on obtient, pour une même direction de la constante auxiliaire Θ, des bandes de largeur commune *minima,* qu'il convient, à cause de cela, de considérer préférablement à toutes autres. Ce sont les bandes *élémentaires* de $f(x)$; il est évident qu'au point de vue graphique leur ensemble coïncide avec celui que fournit l'autre période élémentaire.

261. *Si, outre la période élémentaire* Π, $f(x)$ *admet encore une autre période* Ω, *de deux choses l'une : ou bien* Ω *est composée de* Π, *ou bien le moment* (257)

$$\begin{vmatrix} \Pi' & \Pi'' \\ \Omega' & \Omega'' \end{vmatrix}$$

des deux périodes n'est pas nul.

Si ce déterminant est nul, on a

$$\Omega' = k\Pi', \qquad \Omega'' = k\Pi'',$$

d'où $\Omega = k\Pi$, k désignant quelque quantité réelle non nulle. En appelant donc m un entier quelconque, n et $n+1$ deux entiers consécutifs donnant $n \leqq mk < n+1$, par suite $mk = n + \eta$, où η est une quantité réelle positive et < 1, on aura

$$m\Omega = mk\Pi = n\Pi + \eta\Pi.$$

Attribuons maintenant à m une infinité de valeurs distinctes m_1, m_2, ...; il est impossible que $\eta_1, \eta_2, \ldots$ valeurs correspondantes de η, soient toutes inégales. Car, en supposant $f(x)$ olotrope en x_0, et à cause de

$$f(x_0 + \eta\Pi) = f(x_0 + n\Pi + \eta\Pi) = f(x_0 + m\Omega) = f(x_0),$$

l'équation $f(x) - f(x_0) = 0$ aurait pour racines les quantités $x_0 + \eta\Pi$, qui sont toutes inégales et en nombre illimité. Comme toutes ces quantités tombent à l'intérieur du cercle qui a x_0 pour centre et $\operatorname{mod}\Pi$ pour rayon, $f(x)$ dégénérerait en une constante (4), ce qui est contraire à l'hypothèse.

En appelant donc i, j deux indices convenables, on a

$$m_i\Omega - n_i\Pi = m_j\Omega - n_j\Pi,$$

c'est-à-dire

$$(m_i - m_j)\Omega = (n_i - n_j)\Pi,$$

et, comme $m_i - m_j$, $n_i - n_j$ ne peut être nul, puisque Ω ne l'est pas.

Si μ, ν sont les quotients des divisions de ces différences par leur plus grand commun diviseur, cette relation s'écrit

$$\frac{\Pi}{\mu} = \frac{\Omega}{\nu}$$

et donne

$$(4) \qquad \Pi = \mu\upsilon, \qquad \Omega = \nu\upsilon,$$

υ désignant la valeur commune des derniers rapports.

Soit enfin p, q un couple de solutions entières de l'équation

$$\mu p + \nu q = 1,$$

qui est possible puisque μ, ν sont premiers entre eux.

Les égalités (4) donnent

$$\upsilon = p\Pi + q\Omega,$$

moyennant quoi υ est aussi une période de $f(x)$, et Π en est composée à cause de la première. Mais, Π étant élémentaire, il faut que $\mu = \pm 1$, d'où $\upsilon = \pm \Pi$, et la dernière des mêmes relations donne $\Omega = \pm \nu\Pi$, ce qu'il fallait établir.

262. Nous appellerons *unipériodiques* les fonctions de cette espèce, c'est-à-dire celles dont toutes les périodes sont composées d'une seule période élémentaire.

Pour ce qui les concerne, il y a quelque chose à ajouter aux observations faites précédemment sur toutes les fonctions périodiques.

1. *Si les fonctions $f(x), f'(x), \ldots$ du* n° **254** *sont toutes unipériodiques, elles ont nécessairement les mêmes périodes élémentaires.*

Soient effectivement Π une période élémentaire de $f(x)$, par suite (élémentaire ou non) de $f'(x)$, et ϖ une période élémentaire

de cette dérivée. L'intégration de

$$f'(x+\varpi)=f'(x)$$

donne, en appelant C quelque constante,

$$(5) \qquad f(x+\varpi)=f(x)+C,$$

d'où

$$(6) \qquad f(x+m\varpi)=f(x)+mC.$$

Comme Π, période quelconque de $f'(x)$ supposée unipériodique, est nécessairement composée de sa période élémentaire ϖ, on a

$$(7) \qquad \Pi=\mu\varpi,$$

le multiplicateur μ étant un entier $\neq 0$. Cela posé, l'hypothèse $m=\mu$, faite dans l'identité (6), donne

$$f(x+\Pi)=f(x)+\mu C,$$

d'où $\mu C=0$, à cause de $f(x+\Pi)=f(x)$, puis $C=0$ à cause de $\mu\neq 0$.

L'identité (5) montre ainsi que ϖ est aussi une période de $f(x)$; elle est donc élémentaire puisque cette fonction est supposée unipériodique et qu'en vertu de l'égalité (7) sa période élémentaire Π en est composée.

Même raisonnement pour la comparaison des périodes de $f'(x)$ et $f''(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$, ...

II. Si au n° 255 la période Π est élémentaire pour les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., elle appartient bien, comme toute autre, aux fonctions qui en sont rationnellement composées; mais cela peut être parfaitement à titre *non élémentaire*.

III. Pour les fonctions $f(x)$, $F(x)$ du n° 256, il est évident que les périodes Π, $\frac{\Pi}{a}$ sont en même temps élémentaires ou non.

263. De ce que nous avons vu, dans les deux Chapitres précédents, il résulte évidemment que *les fonctions* e^x, $\tan x$ et $\cot x$,

sin$x$ et cos$x$ *sont unipériodiques avec* $\pm 2\pi i$, $\pm \pi$, π *pour* ± 2 *périodes de moindres modules, partant élémentaires.*

Les relations entre leurs périodes sont conformes aux observations ci-dessus; par exemple e^x ayant la période $\pm 2\pi i$, les fonctions e^{2ix}, e^{ix}, par suite tang$x$ et cot$x$, sin$x$ et cos$x$, qui sont rationnellement composées de ces dernières respectivement, ont au même titre élémentaire les périodes $\pm \pi$, $\pm 2\pi$; cos$x$, dérivée de sin$x$, a la même période élémentaire $\pm 2\pi$, ...

On peut tracer les bords des bandes élémentaires : pour e^x, par les points ..., $-2\pi i$, o, $2\pi i$, ..., parallèlement à l'axe des quantités réelles; pour tang$x$ et cot$x$, par les points ..., $-\pi$, o, π, ..., parallèlement à l'axe des seconds éléments; pour cos$x$ et sin$x$, par les points ..., -2π, o, 2π, ..., dans la même direction.

Plus généralement, *toute fonction rationnellement composée de l'exponentielle* e^{ax} *est évidemment unipériodique avec la période* $\frac{2\pi i}{a}$, qui n'est pas forcément élémentaire. Nous verrons bientôt (**268**, *inf.*) qu'inversement les fonctions unipériodiques formant la classe la plus simple sont toutes exprimables de cette manière.

264. En attribuant à t dans l'expression (3) des valeurs infinies, soit positives, soit négatives, la valeur correspondante de x s'éloigne à l'infini à l'intérieur de la bande ayant pour bords les parallèles à Θ menées par a, $a + \Pi$, soit dans la direction même de Θ, soit dans la direction opposée; de plus, le second élément du rapport $\frac{x}{\Pi}$ est infini avec un signe final identique à celui de $t\,\frac{\Theta}{\Pi}$, constant par suite. Pour abréger, nous caractérisons une pareille variation de x (ou de toute valeur congrue) en disant que cette variable est infinie dans une *direction polaire,* et nous nommerons cette direction *boréale* ou *australe* selon que le signe final du second élément de $\frac{x}{\Pi}$ sera $+$ ou $-$.

Quand x est infinie dans une direction polaire relativement à quelque système de bandes, elle jouit évidemment de la même propriété relativement à tout autre système.

Pour deux systèmes à bords tous parallèles, construits sur les

périodes Π, $\mu\Pi$, les directions polaires de même nom sont identiques ou opposées selon que le multiplicateur μ est positif ou négatif. En particulier, elles sont toujours opposées pour les périodes équivalentes Π, $-\Pi$.

Il y a grand intérêt à considérer la manière dont la fonction unipériodique varie quand la variable devient infinie *d'une manière quelconque* dans l'une des directions polaires ou bien dans l'autre : pour une direction donnée elle peut être indéterminée; elle peut aussi être déterminée, c'est-à-dire tendre vers quelque même limite ou bien devenir infinie. Dans ce dernier cas, nous dirons que la fonction a pour *valeur polaire* (*boréale* ou *australe*) cette limite ou bien l'infini.

Les fonctions unipériodiques les plus simples sont celles qui sont ainsi *polarisées*, c'est-à-dire douées de valeurs polaires tant boréales qu'australes. Telles sont, en particulier, celles que nous avons déjà citées comme exemples.

Relativement aux périodes $+2\pi i$, $+\pi$, $+2\pi$, et en donnant aux bandes les formes du n° **263**, la direction boréale est : pour e^x, celle de la partie négative de l'axe des quantités réelles; pour $\tang x$, $\cot x$, $\sin x$, $\cos x$, celle de la partie positive de l'axe des seconds éléments. Relativement aux mêmes périodes, les valeurs polaires, boréales et australes, sont : 1°, 0 et ∞, pour e^x; 2°, $+i$ et $-i$, pour $\tang x$; 3°, $-i$ et $+i$, pour $\cot x$; 4°, ∞ et ∞, pour $\sin x$ et aussi pour $\cos x$ (**201**, I), (**217**, V), (**220**), (**238**).

Plus généralement, *toute fonction* $R(e^{ax})$ *rationnellement composée de l'exponentielle* e^{ax} *est unipériodique* (**263**) *et polarisée*. Car on obtient évidemment ses valeurs polaires (indistinctement) en faisant successivement $u=0$, et u infinie, dans la composante rationnelle $R(u)$.

265. *Si la fonction unipériodique* $f(x)$ *est polarisée avec*

$$u_+,\quad u_- \tag{8}$$

pour valeurs polaires, et si la quantité u_0 *n'est égale à aucune de ces deux-ci, l'équation numérique*

$$f(x)=u_0 \tag{9}$$

offre dans une même bande des racines distinctes dont le nombre est essentiellement limité.

Si, en outre, m désigne la somme des degrés de multiplicité de ces racines, laquelle est évidemment la même pour toutes les bandes, l'équation

$$(10) \qquad f(x) = u,$$

résolue numériquement par rapport à x, *pour toute valeur* U *de* u *non égale à l'une des quantités* (8), *aura dans chaque bande des racines distinctes ayant le même nombre m pour somme de leurs degrés de multiplicité.*

I. Si l'équation (9) avait dans la bande considérée les racines distinctes

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_i, \quad \ldots$$

en nombre illimité, des valeurs infinies de l'indice i rendraient certainement x_i infinie, car autrement la fonction méromorphe $f(x) - u_0$ posséderait une infinité de zéros dans quelque portion limitée de cette bande, ce qui est impossible. Certaines valeurs de x, infinies dans une direction polaire, rendraient donc $f(x)$ constamment égale à u_0 et donneraient par suite $\lim f(x) = u_0$, tandis que par hypothèse $f(x)$ tend toujours vers l'une ou l'autre des quantités (8).

II. La deuxième partie de ce théorème est une conséquence immédiate de ce que nous avons appelé le *Principe de la conservation du nombre des racines* (168).

Nous savons effectivement (48) qu'en $u = \mathrm{U}$, l'équation (10) n'a pas d'autres racines que les valeurs finales acquises, au bout des divers chemins conduisant de u_0 à U, par les racines variables ayant pour valeurs initiales les racines de l'équation numérique (9). Or le cheminement peut être pratiqué sur tout chemin ne contenant aucune des quantités (8), parce que x n'y devient jamais infinie; et, pendant tout son cours, la somme des degrés de multiplicité conserve la valeur constante m pour le groupe des déterminations de x qui partent en $u = u_0$, avec des valeurs initiales égales aux racines numériquement distinctes que l'équation (9) offre dans la bande considérée. Cette somme conserve donc aussi la même

valeur m pour le groupe des déterminations de x qui à chaque instant tombent dans la même bande ; car, à cause de la périodicité de $f(x)$, aucune détermination de x ne peut évidemment sortir de cette bande sans qu'une autre n'y pénètre en même temps avec le même degré de multiplicité.

En $u = u_{\pm}$, et pour celles des valeurs correspondantes de x qui sont alors infinies, ces conclusions s'évanouissent ; effectivement les considérations du dernier paragraphe du Chapitre IV supposent essentiellement que l'équation (10) puisse être transformée en une autre à premier membre olotrope en $x' = 0$, par la substitution $x = \frac{1}{x'}$ $\Big($accompagnée de $u = \frac{1}{u'}$, quand la valeur considérée de $u_{\pm}$ est infinie$\Big)$. Or cette transformation est ici impossible, à cause de la singularité de nature *essentielle* dont $f(x)$ est affectée à l'infini (259).

266. L'entier m se nomme l'*ordre* de la fonction unipériodique polarisée $f(x)$, *relatif à la période* $\pm \Pi$ à laquelle correspondent les bandes considérées. Relativement à la période $\pm \mu\Pi$, l'ordre de $f(x)$ devient naturellement μm ; pour une période élémentaire, il a donc sa valeur minimum qui est l'ordre *absolu* de cette fonction.

Quand aucune des valeurs polaires (8) n'est nulle, l'ordre est égal à la somme des degrés de multiplicité, dans une même bande, des racines de l'équation

$$f(x) = 0,$$

c'est-à-dire des zéros de $f(x)$.

Quand elles ne sont infinies ni l'une ni l'autre, aucune ne s'évanouit pour $\frac{1}{f(x)}$, fonction indéfiniment méromorphe comme $f(x)$ et de même période ainsi que de même ordre évidemment. L'ordre de $f(x)$ est donc égal aussi à la somme des degrés de multiplicité, dans chaque bande, de ses infinis, zéros de $\frac{1}{f(x)}$.

Quand ces deux circonstances se présentent à la fois, chaque bande de $f(x)$ contient des zéros et des infinis dont les degrés de multiplicité offrent des sommes égales entre elles et à l'ordre m

de cette fonction, ce qui la rapproche des fonctions bipériodiques (**320**, *inf.*).

Par exemple, e^x ayant o, ∞ pour valeurs polaires est d'ordre absolu 1 sans avoir aucun zéro ni infini dans sa bande élémentaire; $\sin x$ dont les valeurs polaires sont infinies, est d'ordre absolu 2 et a dans sa première bande élémentaire les deux zéros simples o, π, sans infini; même chose pour $\cos x$ ayant les zéros simples $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{3}{2}\pi$. Pour $\operatorname{tang} x$, dont les valeurs polaires $\pm i$ ne sont ni nulles ni infinies, la première bande élémentaire contient le seul zéro simple o, le seul infini simple $\frac{1}{2}\pi$, et l'ordre absolu est 1; particularité semblable pour $\cot x$.

Naturellement ces notions ne sont pas applicables aux fonctions unipériodiques dépourvues de polarité, comme celles dont nous nous occuperons plus tard (**374**, *inf.*); mais elles le sont à celles dont nous parlerons jusqu'à la fin de ce Chapitre, parce que nous les supposerons essentiellement polarisées.

267. Le théorème suivant peut être utile, mais surtout il établit une nouvelle analogie entre les fonctions unipériodiques polarisées et les fonctions bipériodiques (*Cf.* **328**, *inf.*).

En appelant $f(x)$ une fonction unipériodique de période Π, *aux valeurs polaires u_+, u_-, toutes deux finies, et $\mathfrak{R}$ son résidu intégral dans une bande quelconque* (**56**), *on a la formule*

$$\mathfrak{R} = \frac{\Pi}{2\pi i}(u_- - u_+). \tag{11}$$

Soit X une quantité infinie dans la direction polaire boréale, sur le bord de la première bande qui passe par $x = 0$; en parcourant successivement les segments rectilignes allant de $-X$ à $-X + \Pi$, de $-X + \Pi$ à $X + \Pi$, de $X + \Pi$ à X et de X à $-X$, on marche évidemment dans le sens direct sur un certain contour fermé (C), à l'intérieur duquel on finit par avoir $\mathcal{E}_{(C)} f(x) = \mathfrak{R}$ et, par suite (**189**),

$$\left\{\begin{aligned} 2\pi i\mathfrak{R} = \int_{(C)} f(x)\,dx = & \int_{-X}^{-X+\Pi} f(x)\,dx + \int_{-X+\Pi}^{X+\Pi} f(x)\,dx \\ & + \int_{X+\Pi}^{X} f(x)\,dx + \int_{X}^{-X} f(x)\,dx. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

De ces quatre intégrales, la seconde et la dernière se détruisent; car la substitution $x = \Pi + t$, d'où $dx = dt$, $f(\Pi + t) = f(t)$, change la seconde en

$$\int_{-X}^{X} f(t)\,dt = -\int_{X}^{-X} f(t)\,dt.$$

La première a pour limite $u_-\Pi$ parce que, sur son chemin, x étant infinie dans la direction australe, on peut écrire $f(x) = u_- + \varepsilon$, où ε est une quantité infiniment petite, d'où

$$\lim \int_{-X}^{-X+\Pi} f(x)\,dx = \int_{-X}^{-X+\Pi} u_-\,dx + \lim \int_{-X}^{-X+\Pi} \varepsilon\,dx = u_-\Pi \quad (237^*).$$

La troisième ayant pour limite $-u_+\Pi$ pour une raison semblable, la relation (12) entraîne notre formule (11) dont on peut vérifier l'exactitude sur les fonctions $\tang x$ et $\cot x$.

268. *Si deux fonctions unipériodiques (polarisées) de la même variable,* $f(x)$, $F(x)$, *ont une période commune* Π, *relativement à laquelle elles sont d'ordres* m, M (266), *il existe entre elles une identité entière irréductible, dont les degrés effectifs* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{m}$ *en* $f(x)$ *et* $F(x)$ *sont les quotients des entiers* M, m *par quelqu'un de leurs diviseurs communs.*

La démonstration générale de ce théorème se fait exactement comme celle que nous donnerons pour les fonctions bipériodiques (331, *inf.*), sauf une légère complication naissant ici de la nécessité de considérer les valeurs infinies de la variable. Nous nous bornerons donc à l'établir par des moyens spéciaux et appropriés à nos besoins actuels, dans le cas particulier de $M = 1$, le seul dont la considération nous soit présentement utile, en prouvant qu'alors $f(x)$ *est une fonction composée rationnelle de* $F(x)$, *contenant cette fonction au degré effectif* m *dans ses deux termes, ou bien au degré* m *dans l'un et à un degré moindre dans l'autre.*

I. Soit d'abord $F(x) = e^{\frac{2\pi i}{\Pi}x}$, fonction d'ordre 1 relativement à sa période Π, et supposons, pour commencer, qu'aucune des valeurs

polaires f_+, f_- de $f(x)$ ne soit nulle ou infinie. Alors, dans une bande déterminée (266), cette dernière fonction possédera certainement, en nombres limités, des zéros et des infinis numériquement distincts

$$(13) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_g,$$

$$(14) \qquad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_\gamma,$$

dont les degrés de multiplicité

$$(15) \qquad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_g,$$

$$(16) \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_\gamma$$

donneront des sommes toutes deux égales à m.

Cela posé, il est évident, d'après les propriétés de l'exponentielle $F(x)$, que la fonction

$$(17) \quad \varphi(x) = \frac{[F(x)-F(a_1)]^{m_1}[F(x)-F(a_2)]^{m_2}\ldots[F(x)-F(a_g)]^{m_g}}{[F(x)-F(\alpha_1)]^{\mu_1}[F(x)-F(\alpha_2)]^{\mu_2}\ldots[F(x)-F(\alpha_\gamma)]^{\mu_\gamma}}$$

est indéfiniment méromorphe, qu'elle admet la période Π, que, dans la bande considérée, elle a pour seuls zéros et infinis les quantités (13), (14) aux degrés de multiplicité (15), (16), qu'elle a pour valeurs polaires, boréale et australe, les quantités

$$\varphi_+ = \frac{[F(a_1)]^{m_1}[F(a_2)]^{m_2}\ldots[F(a_g)]^{m_g}}{[F(\alpha_1)]^{\mu_1}[F(\alpha_2)]^{\mu_2}\ldots[F(\alpha_\gamma)]^{\mu_\gamma}}, \qquad \varphi_- = 1,$$

dont aucune n'est nulle ou infinie. Il en résulte que dans cette bande le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, indéfiniment méromorphe et de période Π, est dépourvu de tout infini, de tout zéro, et qu'il a pour valeurs polaires les quantités non nulles, ni infinies,

$$\frac{f_+}{\varphi_+}, \quad \frac{f_-}{\varphi_-}.$$

Dans la même bande, dans tout le plan par suite, on peut donc assigner à son module quelque limite supérieure et aussi quelque limite inférieure non $= 0$. Or une seule de ces circonstances suffit pour que le rapport en question se réduise à une constante C (49),

d'où l'identité annoncée

$$f(x) = C\varphi(x).$$

II. En appelant p_0, p_1, q_0, q_1 quatre constantes toutes $\neq 0$ ainsi que leur déterminant, telles en outre qu'aucune des expressions

$$p_0 + p_1 f(x), \quad q_0 + q_1 f(x)$$

ne s'évanouisse par la substitution à $f(x)$ d'une valeur polaire finie et $\neq 0$ quelconque de cette fonction, on constatera immédiatement que la fonction

$$\mathfrak{f}(x) = \frac{p_0 + p_1 f(x)}{q_0 + q_1 f(x)},$$

de période Π, d'ordre m évidemment aussi, ne dégénère pas en une constante, que ses valeurs polaires sont toutes deux finies et $\neq 0$. En prenant donc pour $\varphi(x)$ quelque expression de la forme (17), on a (I)

$$\mathfrak{f}(x) = C\varphi(x),$$

identité dont la résolution par rapport à $f(x)$ fournit cette fonction sous la forme voulue.

III. Quand $F(x)$ ne se réduit pas à l'exponentielle de l'alinéa I, cette fonction est, par ce qui précède, exprimable au moyen d'elle par une fonction composée rationnelle la contenant au degré effectif 1, dans l'un de ses termes, au degré effectif 1 ou 0, dans l'autre terme. Inversement par suite, cette exponentielle s'exprime d'une manière semblable au moyen de $F(x)$. Cela posé, il n'y a qu'à remplacer l'exponentielle par cette expression dans celle de $f(x)$ au moyen de l'exponentielle (I), (II), pour obtenir celle de $f(x)$ en $F(x)$ que nous cherchions.

IV. Du point où nous nous trouvons, on passerait sans difficulté au cas général de notre théorème; il suffirait d'exprimer rationnellement au moyen d'une même fonction du premier ordre à période égale (de l'exponentielle ci-dessus par exemple) les fonctions données $f(x)$, $F(x)$ d'ordres quelconques, puis d'éliminer cette fonction auxiliaire entre les deux identités ainsi obtenues. Mais il serait oiseux d'insister.

269. La possibilité de représenter toujours la fonction unipériodique $f(x)$, de période Π et d'ordre m, par une fonction rationnelle

$$\frac{A_{p''}F^{p''}+\ldots+A_{p'}F^{p'}}{B_{q''}F^{q''}+\ldots+B_{q'}F^{q'}}, \tag{18}$$

contenant l'exponentielle

$$F(x)=e^{\frac{2\pi i}{\Pi}x},$$

aux degrés effectifs, m dans l'un de ses termes, m ou moindre dans l'autre terme, a diverses conséquences qu'il est utile de noter.

Dans le numérateur et le dénominateur de l'expression, nous avons mis en évidence les termes effectifs extrêmes, et nous supposons $p''>p'$, $q''>q'$. L'un au moins des exposants p'', q'' est égal à m, l'autre $\overline{\gtrless} m$; quant aux exposants p', q', ils ne peuvent tous deux être $\gtrless 0$, car alors les deux polynomes seraient divisibles par F, et cette expression serait réductible, contrairement à ce que nous sous-entendons.

I. On peut écrire l'expression (18)

$$F^{p'-q'}\frac{A_{p''}F^{p''-p'}+\ldots+A_{p'}}{B_{q''}F^{q''-q'}+\ldots+B_{q'}}, \tag{19}$$

et comme l'exponentielle $F^{p'-q'}$ n'a ni zéro ni infini, *$f(x)$ a pour seuls zéros et infinis respectivement, les racines des équations*

$$A_{p''}F^{p''-p'}+\ldots+A_{p'}=0,$$
$$B_{q''}F^{q''-q'}+\ldots+B_{q'}=0,$$

dont pour chaque bande les sommes des degrés de multiplicité sont $p''-p'$, $q''-q'$.

Effectivement, par exemple, la résolution de la première de ces équations entières par rapport à F, donnera pour cette exponentielle $p''-p'$ valeurs (inégales ou égales) à chacune desquelles correspond une seule valeur de x dans chaque bande, parce que $F(x)$ est comme e^x du premier ordre.

II. *Pour que $f(x)$ soit dépourvue ou d'infinis ou de zéros, il*

faut donc que le dénominateur ou le numérateur du second facteur de l'expression (19) *soient de simples constantes.*

Dans le premier cas, $f(x)$ *se réduit à une fonction linéaire d'exponentielles de la forme* $F^k = F(kx)$, où les exposants entiers k (de signes quelconques) ne peuvent surpasser m en valeurs absolues.

Pour que $f(x)$ *soit dépourvue à la fois de tout infini et de tout zéro, il faut, par suite, que les termes du même second facteur soient tous deux des constantes; alors* $f(x)$ *se réduit* (*à un facteur constant près*) *à l'exponentielle*

$$F^{p'-q'} = F[(p'-q')x],$$

et naturellement on a $p' - q' = \pm m$.

III. *La fonction* $f(x)$ *est toujours décomposable en une autre semblable mais dont les valeurs polaires sont finies, et en une fonction linéaire d'exponentielles ayant pour exposants des multiples entiers* (*éventuellement positifs, nuls et négatifs*) *de* $\frac{2\pi i}{\text{II}} x$.

Dans le résultat de la décomposition de l'expression rationnelle (18) en fractions simples, on obtient presque immédiatement les termes en F^m, $F^{-\mu}$, où les entiers m, μ sont positifs, puis, par différence, l'ensemble d'un terme constant et d'autres en $(F - \alpha)^{-\mu}$, où $\alpha \neq 0$. Or les valeurs polaires de cette deuxième partie sont évidemment finies, parce que celles de F sont $0, \infty$; quant à la première partie, on peut y remplacer toute puissance F^j de l'exponentielle $F(x)$, par $F(jx)$.

IV. *Pour* x *infinie d'une manière quelconque dans une direction polaire déterminée, et pour* h *constant ou bien variable mais alors fini, et en appelant* $\mathfrak{p}(h)$ *une certaine fonction de* h *indéfiniment olotrope, on a*

$$\lim\left[\frac{f(x+h)}{f(x)} - \mathfrak{p}(h)\right] = 0,$$

ce que nous exprimerons plus brièvement en disant que $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ *tend vers* $\mathfrak{p}(h)$.

A cause de $F(x+h) = F(x)F(h)$, le rapport en question est pour le numérateur seulement de l'expression (18),

$$\frac{A_{p''}F^{p''}[F(h)]^{p''}+\ldots+A_{p'}F^{p'}[F(h)]^{p'}}{A_{p''}F^{p''}+\ldots+A_{p'}F^{p'}}.$$

Il tend donc : vers $[F(h)]^{p'}$, s'il s'agit de la direction boréale parce que $F(x)$ tend vers o; vers $[F(h)]^{p''}$, s'il s'agit de la direction australe parce que $F(x)$ est alors infinie. Pour le dénominateur seulement, on trouvera que les limites analogues sont $[F(h)]^{q'}$, $[F(h)]^{q''}$. Pour la fraction (18), on trouvera donc les limites

$$[F(h)]^{p'-q'} = e^{(p'-q')\frac{2\pi i}{\Pi}h}, \qquad [F(h)]^{p''-q''} = e^{(p''-q'')\frac{2\pi i}{\Pi}h},$$

que nous nommerons quelquefois les *raisons boréale et australe* de $f(x)$.

On remarquera la valeur

$$e^{[(q''-q')-(p''-p')]\frac{2\pi i}{\Pi}h}$$

du rapport des deux raisons polaires. *La quantité* $\frac{2\pi i}{\Pi}h$, *dans l'exposant de* e, *y est multipliée par l'excès, pour une même bande, de* $q''-q'$, *somme des degrés de multiplicité des infinis de* $f(x)$, *sur* $p''-p'$, *même somme pour les zéros* (I).

270. *Les dérivées d'une fonction méromorphe unipériodique polarisée, une fonction rationnellement composée de plusieurs fonctions de cette sorte, à même période* Π, *et de leurs dérivées, sont toujours polarisées aussi.* Car, les fonctions simples étant toutes exprimables rationnellement au moyen de l'exponentielle à même période $e^{\frac{2\pi i}{\Pi}x}$ (**268**), leurs dérivées et la fonction composée le sont également (**264**, *in fine*).

Développement des fonctions circulaires en séries de fractions simples.

271. Une fonction rationnelle de x, type le plus simple des fonctions indéfiniment méromorphes, est décomposable en fractions simples (accompagnées éventuellement d'une partie olotrope) (52). Ce fait pose immédiatement pour toute fonction indéfiniment méromorphe la question de savoir si elle ne serait pas susceptible d'une représentation analogue ou, pour parler avec plus de précision, si elle ne serait pas développable en une série procédant suivant des fractions simples ayant naturellement pour infinis dans leur ensemble ceux même de la fonction considérée. Cette recherche conduit à des résultats d'un grand intérêt, et la réponse est affirmative pour beaucoup de fonctions périodiques.

Nous étudierons d'abord en elles-mêmes les séries de fractions simples, en nous restreignant au cas où leurs infinis forment des progressions arithmétiques, disposition affectée par ceux des fonctions périodiques et en particulier des fonctions circulaires. Mais auparavant il convient d'établir, sur des variantes dont la génération implique la considération de pareilles progressions, diverses propositions dont nous aurons besoin ici et ailleurs.

272. La variante u_m étant définie pour toute valeur positive, nulle ou négative de son indice unique m, on dit que la série *doublement infinie*

$$(1) \qquad \ldots + u_{-2} + u_{-1} + u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$$

est convergente quand, k', k'' désignant deux entiers positifs, la somme

$$\sum_{-k'}^{k''} u_m$$

de tous les termes où m est compris entre $-k'$ et k'' inclusivement, tend vers une même limite, de quelque manière que k' et k'' croissent indéfiniment. Cette limite se nomme alors la *somme* de la série (1).

Pour qu'il y ait convergence, il faut évidemment et il suffit qu'il

en soit ainsi pour chacune des deux séries ordinaires, formées par tous les termes qui sont placés soit en deçà soit au delà du signe + qui sépare deux termes consécutifs quelconques. Il en est ainsi dans le cas particulier très remarquable que voici.

273. *La série doublement infinie qui a pour terme d'indice m une fraction rationnelle en m,*

$$\frac{f(m)}{F(m)},$$

est convergente, elle et celle des modules de ses termes, si la différence $\Lambda - \lambda$ *des degrés effectifs des polynomes* $F(m)$, $f(m)$, *est au moins égale à* 2 [on supprime, bien entendu, les termes en nombre limité dans lesquels $F(m)$ s'évanouirait].

I. *L'exposant g étant positif* (212), *la série à termes positifs*

$$(a) \qquad \frac{1}{1^g} + \frac{1}{2^g} + \ldots + \frac{1}{m^g} + \ldots$$

est convergente ou divergente selon que g est > 1 *ou non.*

Effectivement le rapport du $(m+1)^{\text{ième}}$ terme au $m^{\text{ième}}$ est

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^g = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{-g} = 1 - g\frac{1}{m} + \ldots \quad (80),$$

et l'on a algébriquement $-g < -1$ ou non, selon qu'on se trouve dans le premier ou le second cas (69).

II. En désignant par a, A les coefficients de m^λ, m^Λ dans $f(m)$, $F(m)$ et par e, E deux quantités infiniment petites, on a

$$\frac{f(m)}{F(m)} = \frac{1}{m^{\Lambda-\lambda}} \frac{a}{A} \frac{1+e}{1+E},$$

d'où en supposant $m > 0$, appelant α le module de $\frac{a}{A}$ et ε, $\mathcal{E}$ deux constantes positives choisies arbitrairement, la seconde < 1,

$$\mathrm{mod}\frac{f(m)}{F(m)} < \frac{\alpha}{m^{\Lambda-\lambda}} \frac{1+\varepsilon}{1-\mathcal{E}},$$

à partir du moment où m est assez grand pour maintenir mod e, mod E au-dessous de ε, $\mathcal{E}$.

Or, à cause de $\Lambda - \lambda \geqq 2 > 1$, la quantité positive qui forme le second membre de cette inégalité est le terme général d'une série convergente (I) (114*, I).

Pour $\Lambda - \lambda < 2$, il y a évidemment divergence.

274. *Si, dans un tronçon de progression arithmétique de raison constante $h (\neq 0)$*

$$(3) \qquad u_1, \qquad u_2 (= u_1 + h), \qquad \ldots, \qquad u_g [= u_1 + (g-1)h],$$

le terme de moindre module est une variante infinie, la somme des modules des puissances d'exposant entier $i > 1$ des inverses arithmétiques des termes de ce tronçon tend vers zéro, de quelque manière que leur nombre g varie simultanément.

Comme, à partir du moment où le moindre module des termes du tronçon reste > 1, la somme considérée diminue toujours quand i augmente, il suffit de faire la démonstration pour $i = 2$.

En supposant d'abord que u_1 soit le terme de moindre module, en posant $u_1 = u'_1 + i u''_1$, $h = h' + i h''$, on aura généralement

$$[\text{mod}(u_1 + mh)]^2 = u_1'^2 + u_1''^2 + 2(h' u'_1 + h'' u''_1) m + (h'^2 + h''^2) m^2 ;$$

et, comme pour $m = 1$, cette quantité est au moins égale à $u_1'^2 + u_1''^2$, il faut qu'on ait algébriquement

$$2(h' u'_1 + h'' u''_1) \geqq -(h'^2 + h''^2),$$

d'où immédiatement

$$[\text{mod}(u_1 + mh)]^2 > (h'^2 + h''^2)[\text{U} + (m-1)^2],$$

en représentant par U la quantité positive, infinie aussi,

$$(u_1'^2 + u_1''^2) : (h'^2 + h''^2).$$

Au diviseur constant près, la somme de modules considérée est donc inférieure au résultat obtenu en ajoutant à la quantité infini-

ment petite $\frac{1}{U}$, la somme de la série convergente (273)

$$(4)\qquad \frac{1}{U}+\frac{1}{U+1^2}+\frac{1}{U+2^2}+\ldots+\frac{1}{U+m^2}+\ldots.$$

Or, cette somme est infiniment petite aussi; car le plus grand entier positif M dont le carré soit $< U$ est infini comme U, et, d'une part, la somme de ses M premiers termes, inférieure à M fois le premier, l'est à $M\frac{1}{M^2}=\frac{1}{M}$ à plus forte raison; d'autre part, la somme des autres termes est moindre que

$$\frac{1}{M^2}+\frac{1}{(M+1)^2}+\ldots,$$

reste d'une série convergente (273, I).

Si le premier terme u_1 n'est pas celui de moindre module dans le tronçon (3), on prouvera comme dessus que la somme considérée est infiniment petite pour les termes qui suivent ce dernier et pour ceux qui le précèdent, ce qui entraîne immédiatement ce que nous avions à démontrer.

275. *Si le rapport de $\eta = \operatorname{mod} h$ au module de l'un quelconque des termes du tronçon* (3) *est inférieur à la quantité positive $\theta < 1$, et si l'on représente par*

$$l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)=l(u_{g+1})-l(u_1)$$

l'accroissement éprouvé par $l(t)$ quand t chemine de $t=u_1$ à $t=u_{g+1}$ en passant successivement par les valeurs (3) (*toutes en ligne droite*), *on a*

$$(5)\qquad \frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\ldots+\frac{1}{u_g}=\frac{1}{h}\,l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)+\epsilon_{-2},$$

avec l'inégalité

$$(6)\qquad \operatorname{mod}\epsilon_{-2}<\eta\sigma_{-2}\frac{1}{1-\theta},$$

σ_{-2} désignant la somme des carrés inverses des modules des termes du tronçon (3).

A cause de $\bmod h < \bmod u_i$ on peut effectivement écrire

$$(7)\quad l(u_i+h)-l(u_i)=\frac{h}{u_i}+\frac{h^2}{u_i^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{h}{u_i}-\dots\right)\quad (171,\ \text{II}),$$

et le module de la somme de la série entre parenthèses est évidemment inférieur à

$$1+\theta+\theta^2+\dots=\frac{1}{1-\theta}.$$

Cela posé, il suffit de faire $i=1, 2, \dots, g$ dans la relation (7), d'ajouter membre à membre et de diviser par h, pour obtenir la formule (5) complétée par l'inégalité (6).

276. En supposant maintenant infini le terme de moindre module dans le tronçon (3), le facteur σ_{-2} est toujours infiniment petit (**274**), et la formule (5) montre que *la somme des inverses des termes de ce tronçon ne peut alors tendre vers une limite, que s'il en est ainsi pour* $l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)$ *et, par suite, que si le rapport* $\frac{u_{g+1}}{u_1}$ *tend lui-même vers quelque limite* $\mathfrak{A} \neq 0$.

On remarquera que les quantités

$$1,\quad \frac{u_2}{u_1},\quad \frac{u_3}{u_1},\quad \dots,\quad \frac{u_{g+1}}{u_1}$$

sont toutes infiniment rapprochées sur un même segment rectiligne mobile autour du point 1, qui finit par ne jamais contenir le point 0; de plus, $l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)$ est constamment la valeur finale qu'un cheminement opéré sur ce segment, de $t=1$ à $t=\frac{u_{g+1}}{u_1}$, fait acquérir à $l(t)$ partant de $t=1$ avec une valeur initiale nulle. Cela posé, il y a plusieurs cas à considérer :

I. *$\mathfrak{A}$ non réel négatif.*

Le segment $\left[1, \frac{u_{g+1}}{u_1}\right]$ a pour position limite le segment $[1, \mathfrak{A}]$ ne contenant pas l'origine $t=0$; on a alors

$$\lim l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)=l(\mathfrak{A}),$$

ce dernier logarithme étant calculé sur le segment limite à partir de $l(1)=0$.

II. $\mathfrak{R}$ *réel négatif.*

1° *Si le second élément de* $\frac{u_{g+1}}{u_1}$ *finit par rester positif,* le segment $\left[1, \frac{u_{g+1}}{u_1}\right]$ finira par être équivalent au chemin composé du segment conduisant de $t=1$ à $t=\bmod\frac{u_{g+1}}{u_1}$, puis du plus petit arc, de centre $t=0$ et de rayon $=\bmod\frac{u_{g+1}}{u_1}$, conduisant dans le sens *direct* de $t=\bmod\frac{u_{g+1}}{u_1}$ à $t=\frac{u_{g+1}}{u_1}$. De

$$\lim\left(\frac{u_{g+1}}{u_g} : \bmod\frac{u_{g+1}}{u_g}\right) = \lim\frac{\mathfrak{R}}{\bmod\mathfrak{R}} = -1,$$

on tire alors (186 *bis*)

$$\lim l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right) = l(\iota) + \pi i,$$

$l(\iota)$ étant la détermination réelle de $l(\bmod\mathfrak{R})$.

2° *Si ce second élément finit par rester négatif,* on trouvera de la même manière

$$\lim l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right) = l(\iota) - \pi i,$$

parce que l'arc analogue est rétrograde.

3° *Si enfin ce même second élément n'a pas un signe final invariable,* $l\left(\frac{u_{g+1}}{u_1}\right)$ passe indéfiniment de $l(\iota)+\pi i$ à $l(\iota)-\pi i$ et, inversement, à des quantités infiniment petites près; ce logarithme, par suite, ne tend vers aucune limite.

277. En appelant x une variable indépendante, Π une constante $\neq 0$, et i un entier positif, l'expression

$$\frac{1}{(x - m\Pi)^i} \tag{8}$$

est, par rapport à l'indice m, une fraction rationnelle où le degré effectif du dénominateur surpasse de i unités celui du numérateur; quand i est $\geqq 2$ par suite (273), la série doublement infinie dont

elle est le terme général est convergente, même aussi celle des modules de ses termes, pour toute valeur de x (non de la forme $m\Pi$) et définit, par sa somme, une certaine fonction de cette variable. Quand $i = 1$, les choses ne se passent plus de la même manière, parce que la série est divergente (98*); mais, en opérant convenablement, on en déduit encore une fonction du même genre, et sur toute cette matière, on a le théorème fondamental que voici.

Pour $i \geqq 2$ la somme de la série doublement infinie dont (8) *est le terme général est une fonction indéfiniment méromorphe de x, que l'on peut différentier et intégrer sur un chemin quelconque, en traitant séparément de la même manière tous les termes de la série.*

Pour $i = 1$ et k', k'' tous deux infinis, la somme

$$(9) \qquad \sum_{-k'}^{k''} \frac{1}{x - m\Pi}$$

a pour limite une fonction jouissant exactement des mêmes propriétés, pourvu toutefois que le rapport $\frac{k''}{k'}$ tende vers une limite $K \neq 0$.

I. Supposons $i \geqq 2$, et, dans le plan servant à la notation graphique de x, considérons une aire limitée S_x; appelons S'_x ce qu'elle devient quand on l'accroît d'une zone d'épaisseur supérieure à la quantité positive δ, puis Λ une autre quantité positive supérieure à tous les modules que x puisse acquérir dans S'_x, puis enfin $\mathfrak{m}$ un entier positif donnant $\mathfrak{m} \bmod \Pi > \Lambda$.

Chacune des fractions simples (8) où $\mathfrak{m}$ valeur numérique de m surpasse $\mathfrak{m}$, étant développable par la formule de Maclaurin pour toute valeur de x tombant dans S'_x parce qu'on y a

$$\operatorname{mod} x < \Lambda < \operatorname{mod}(m\Pi),$$

est certainement olotrope dans S_x avec un olomètre au moins égal à δ; de plus elle y a, quelle que soit x, un module inférieur à la quantité positive

$$\frac{1}{(\mathfrak{m} \bmod \Pi - \Lambda)^i},$$

terme général d'une série convergente à cause de $i \geqq 2$. On en conclut immédiatement (**273*** *et suiv.*) que la série formée par les fractions simples dont il s'agit a pour somme une certaine fonction de x, olotrope dans l'aire S_x avec un olomètre au moins égal à δ, et susceptible d'y être différentiée et intégrée par les mêmes opérations exécutées séparément sur ses divers termes.

La fonction, somme totale de la série dont la fraction (8) est le terme général, est donc méromorphe dans l'aire S_x, puisqu'on l'obtient évidemment en ajoutant à la fonction olotrope dont nous venons de parler la somme des mêmes fractions simples où m est numériquement $\overline{\gtrless}\, \mathfrak{m}$, fractions dont le nombre est essentiellement limité. Elle est donc indéfiniment méromorphe (**29**), puisque la forme et l'étendue de l'aire S_x sont entièrement arbitraires.

II. On a évidemment

$$\sum_{-k'}^{k''} \frac{1}{x - m\Pi} = \sum_{-k'}^{k''} \frac{1}{-m\Pi} + \frac{1}{x} + x \sum_{-k'}^{k''} \frac{1}{m\Pi(x - m\Pi)},$$

où toutefois les sommations du second membre ne doivent pas s'étendre à la valeur o de m, et l'on prouvera exactement comme ci-dessus (I) que la dernière somme du second membre a pour limite une fonction de x jouissant de toutes les propriétés mentionnées dans notre énoncé. Il en sera donc de même pour la somme (9), si seulement celle qui forme le premier terme du second membre tend vers une limite. Or, en y supprimant les termes qui se détruisent, cette dernière se réduit à celle des inverses des termes d'un tronçon de progression arithmétique de raison $-\Pi$, termes dont le moindre module est infini et dont les extrêmes ont un rapport égal à $\frac{k''}{k'+1}$ ou à $\frac{k''+1}{k'}$, selon que $k'' \gtrless k'$. Elle n'aura donc point de limite ou en aura une $= -\frac{l(\mathrm{K})}{\Pi}$, selon que $\frac{k''}{k'}$ ne tendra pas ou tendra vers une limite K non $= 0$ (**276**). C'est ce qui nous restait à constater pour achever notre démonstration.

278. Nous représenterons généralement par $\xi_i(x)$, d'abord pour $i = 1$ la détermination de cette dernière fonction qui correspond

à $K = 1$, ensuite pour $i \geqq 2$, la somme de la série convergente ayant la fraction simple (8) pour terme général; moyennant quoi $\xi_i(x)$ sera toujours la limite, pour k infini, de la somme

$$(10) \qquad \sum_{-k}^{k} \frac{1}{(x - m\Pi)^i}.$$

Ces fonctions jouissent des propriétés suivantes dont quelques-unes sont évidentes.

I. *Toutes sont liées à la première par la relation*

$$(11) \qquad \xi_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)}\, \xi_1^{(i-1)}(x).$$

On a effectivement, par ce qui précède,

$$\frac{d^{i-1}\xi_1(x)}{dx^{i-1}} = \lim \sum_{-k}^{+k} \frac{d^{i-1}}{dx^{i-1}} \frac{1}{(x - m\Pi)}.$$

II. *Celle d'indice i a pour seuls infinis, tous de degré i, les quantités* $m\Pi$, *et relativement à chacun d'eux, sa décomposition* (38) *donne la fraction simple unique* $\frac{1}{(x - m\Pi)^i}$.

III. *Chacune d'elles est unipériodique, avec* $\pm\Pi$ *pour période élémentaire.*

Car l'addition de Π à x accroît l'expression (10) de la différence

$$\frac{1}{[x + (k+1)\Pi]^i} - \frac{1}{(x - k\Pi)^i}$$

qui tend vers 0.

La disposition des infinis constatée ci-dessus (II) montre d'ailleurs que la période $\pm\Pi$ est élémentaire et unique (260), (262).

IV. *La fonction* $\xi_1(x)$ *est polarisée, avec* $\mp \frac{\pi i}{\Pi}$ *pour valeurs boréale et australe relativement à la période* $+\Pi$ (264).

1° Supposons d'abord $\Pi = 1$, et cherchons la valeur polaire boréale de $\xi_1(x, 1)$, détermination correspondante de notre fonction, en faisant marcher $x = x' + ix''$ à l'infini dans la direction

polaire boréale, c'est-à-dire en faisant $0 \leqq x' < 1$ et x'' infini positif.

A cet effet, nous appellerons M un entier positif variable, tel que le rapport $\frac{M}{x''}$ soit infini (il suffirait par exemple de prendre $M > x''^2$), et nous considérerons la somme Σ_M des inverses des termes du tronçon de progression arithmétique

$$x' + M + ix'', \quad x' + M - 1 + ix'', \quad \ldots, \quad x' + ix'', \quad \ldots, \quad x' - M + ix''$$

de raison -1, termes dont celui de moindre module est évidemment infini. On a (275)

$$\Sigma_M = -l\left(\frac{-1 + \frac{x'-1}{M} + i\frac{x''}{M}}{1 + \frac{x'}{M} + i\frac{x''}{M}}\right) + \varepsilon_{-2}$$

avec $\lim \varepsilon_{-2} = 0$, et la fraction entre parenthèses ayant pour limite -1, avec un second élément sans cesse positif, le logarithme a pour limite $l(1) + \pi i = \pi i$ (276, II, 1°), c'est-à-dire que

$$\lim \Sigma_M = -\pi i.$$

On a de plus

$$(12) \qquad \lim[\xi_1(x) - \Sigma_M] = 0.$$

On obtient effectivement la différence entre crochets sous la forme

$$(13) \quad \frac{2x}{x^2 - (M+1)^2} + \frac{2x}{x^2 - (M+2)^2} + \ldots + \frac{2x}{x^2 - (M+p)^2} + \ldots,$$

en supprimant dans l'expression (10) construite avec $i = 1$, $\Pi = 1$, les termes où la valeur numérique de m ne surpasse pas M, accouplant ceux des autres où m a des valeurs égales et de signes contraires, et prenant pour k infini la limite de la somme des nouvelles fractions ainsi obtenues.

Comme, dans le terme général de cette série,

$$\frac{2x' + i.2x''}{x'^2 - x''^2 - (M+p)^2 + i.2x'x''},$$

on a $0 \leqq x' < 1$, la somme de la série formée par les modules de

tous les termes est visiblement inférieure à

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} 2(x''+1)\Big[\frac{1}{M(M+1)} &+ \frac{1}{(M+1)(M+2)}+\ldots \\ &+ \frac{1}{(M+p-1)(M+p)}+\ldots\Big] = 2\frac{x''+1}{M}, \end{aligned}\right.$$

ce que donne immédiatement la sommation de cette dernière série, procurée par la transformation du terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ en $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

L'expression (14) étant infiniment petite, parce que $\frac{M}{x''}$ est infini, la quantité (13) tend vers o, ce qui entraîne la relation (12), puis, par sa combinaison avec celle qui la précède,

$$(15)\qquad \lim \xi_1(x,\, 1) = -\pi i.$$

2° Quand x'' est infini négatif, on trouve

$$(16)\qquad \lim \xi_1(x,\, 1) = \pi i,$$

soit par le même procédé, soit en combinant l'égalité (15) avec l'identité (18) ci-dessous.

3° *En représentant par* $\xi_i(x, \Pi)$, $\xi_i(x, \varpi)$ *notre fonction* $\xi_i(x)$, *et ce qu'elle devient par la substitution de* ϖ *à* Π, *on a l'identité évidente*

$$(17)\qquad \xi_i(x,\, \Pi) = \left(\frac{\varpi}{\Pi}\right)^i \xi_i\left(\frac{\varpi}{\Pi}\, x,\, \varpi\right).$$

On a en particulier

$$\xi_1(x,\, \Pi) = \frac{1}{\Pi}\, \xi_1\left(\frac{x}{\Pi},\, 1\right),$$

moyennant quoi les formules (15), (16) donnent bien, quand le second élément de $\frac{x}{\Pi}$ est infini positif ou négatif,

$$\lim \xi_1(x,\, \Pi) = \mp \frac{\pi i}{\Pi}.$$

V. *Pour* $i > 1$, *la fonction* $\xi_i(x)$ *est toujours polarisée, mais avec des valeurs polaires toutes deux* $= 0$.

En faisant d'abord $\Pi = 1$, $0 \leqq x' < 1$, et x'' infini, on trouvera immédiatement pour $\pm m = \mathfrak{m} > 0$,

$$\text{mod}(x' + ix'' - m)^i > \text{mod}[(\mathfrak{m} - 1) + ix'']^2 > x''^2 + (\mathfrak{m} - 1)^2.$$

La somme des modules des termes du développement de $\xi_i(x, 1)$ est donc inférieure à l'expression

$$\frac{3}{x''^2} + 2\left(\frac{1}{x''^2 + 1^2} - \frac{1}{x''^2 + 2^2} + \ldots\right)$$

dont le premier terme est infiniment petit et le second aussi, pour la raison indiquée au n° **274** à propos de la série (4). En d'autres termes, les valeurs polaires de $\xi_i(x, 1)$ sont toutes deux nulles, conclusion que l'identité (17) étend à toutes les valeurs de Π.

VI. *On a identiquement*

$$\xi_i(-x) = (-1)^i \xi_i(x). \tag{18}$$

Car le changement de x en $-x$ laisse évidemment l'expression (10) ce qu'elle était auparavant, ou bien la multiplie par -1, selon que i est pair ou impair.

VII. *Quand i est impair, on a les égalités*

$$\left[\xi_i(x) - \frac{1}{x^i}\right]_{x=0} = 0, \qquad \xi_i\left(\frac{\Pi}{2}\right) = 0.$$

Car la fonction $'\xi_i(x)$ entre crochets dans la première est olotrope en $x = 0$, et la relation (18), donnant ici $'\xi_i(x) + '\xi_i(-x) = 0$ identiquement, donne numériquement $2'\xi_i(0) = 0$.

La même relation donne encore

$$\xi_i\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) + \xi_i\left(-x - \frac{\Pi}{2}\right) = 0 = \xi_i\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) + \xi_i\left(-x + \frac{\Pi}{2}\right),$$

d'où notre seconde égalité, en posant dans cette identité $x = 0$ et remarquant que $\frac{\Pi}{2}$ n'est un infini d'aucune des fonctions $\xi_i(x)$.

279. *Si* $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ *sont des constantes quelconques incongrues selon la période* Π (**251**), *toute fonction composée linéaire*

et homogène de quelques fonctions

(19) $$\xi(x-\alpha),\quad \xi(x-\beta),\quad \ldots,\quad \xi(x-\lambda)$$

d'indices quelconques est une fonction unipériodique de x, *admettant la période* Π, *ayant des valeurs polaires finies, et dont l'ordre relativement à* Π *est la somme des indices maximums qui affectent ces diverses fonctions dans les termes effectifs de la fonction composée.*

La période Π appartenant à chacune des fonctions simples (19) (**278**, III) appartient aussi à la fonction composée (**255**); elle est unique à cause de la disposition des infinis de cette dernière qui sont les quantités

$$\alpha + m\Pi,\quad \beta + m\Pi,\quad \ldots,\quad \lambda + m\Pi.$$

Les valeurs polaires de la fonction composée sont évidemment

$$H_0 \mp (A_1 + B_1 + \ldots + L_1)\frac{\pi i}{\Pi},$$

en appelant H_0 le terme constant de la composante et $A_1, B_1, \ldots, L_1$ les coefficients des fonctions simples d'indices $= 1$ (**278**, IV, V). Enfin, puisque les valeurs polaires de la fonction composée sont toutes deux finies, son ordre est la somme des degrés de multiplicité de ses infinis incongrus α, β, ..., λ, c'est-à-dire celle des indices maximums des fonctions simples (**266**).

280. *Réciproquement, si* $f(x)$ *est indéfiniment méromorphe, unipériodique avec la période* Π, *et polarisée avec des valeurs polaires finies toutes deux, elle s'exprime linéairement au moyen de fonctions analogues à* (19).

Soient ...; α_j; ... les infinis distincts de $f(x)$ tombant dans une même bande, lesquels sont en nombre limité, puisque $f(x)$ est supposée polarisée avec des valeurs polaires non infinies (**265**), et ...; $A_{1,j}$, $A_{2,j}$, ..., $A_{i,j}$, ...; ... les numérateurs des fractions simples en ...; $(x-\alpha_j)^{-1}$, $(x-\alpha_j)^{-2}$, ..., $(x-\alpha_j)^{-i}$ ..., ...; ..., fournies par la décomposition de $f(x)$ dans la bande considérée, en ces fractions accompagnées d'une partie olotrope (**39**). Comme en étendant la sommation à toutes

les valeurs des indices i, j qui sont à considérer pour $f(x)$, la différence

$$f(x) - \Sigma A_{i,j}\xi_i(x-\alpha_j)$$

est indéfiniment méromorphe et dépourvue de tout infini proprement dit; comme, d'autre part, elle ne peut devenir infinie pour aucune valeur infinie de x, puisque ses valeurs polaires sont finies à cause, soit de la nature des fonctions ξ (278, IV, V), soit de l'hypothèse faite sur $f(x)$, elle se réduit à quelque constante A_0. On en conclut bien (49)

$$f(x) = A_0 + \Sigma A_{i,j}\xi_i(x-\alpha_j).$$

281. Quand les valeurs polaires de $f(x)$ ne sont pas toutes deux finies, l'exécution préalable de la décomposition expliquée au n° 269, III permet *de la décomposer toujours en exponentielles accompagnées de la somme* $\Sigma A_{i,j}\ \xi_i\ (x-\alpha_j)$ *ci-dessus.* C'est, pour les fonctions unipériodiques polarisées, la réponse à la question que nous nous étions posée au commencement de ce paragraphe.

282. Voici les applications les plus intéressantes de cette formule de décomposition.

I. La fonction $\cot x$, de période π, a dans sa première bande le seul infini $x=0$ qui est simple avec le résidu 1, et ses valeurs polaires sont $\mp i$ (220), (263), (264). On a donc

$$(20) \qquad \cot x = \xi_1(x, \pi);$$

la constante est nulle, parce que les valeurs polaires de $\xi_1(x, \pi)$ sont aussi $\mp \frac{\pi i}{\pi} = \mp i$.

II. On trouve encore

$$\operatorname{tang} x = -\xi_1\left(x-\frac{\pi}{2}, \pi\right),$$

soit par la même méthode, soit en combinant la formule précédente avec les relations (22) du n° 220 et (18).

III. La fonction $\frac{1}{\sin^2 x}$ a la période π (232, *in fine*) avec le seul

infini double $x = 0$ dans sa première bande. Pour des modules de x suffisamment petits, on a d'ailleurs (**231**)

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2\left(1 - \frac{x^2}{1.2.3} + \ldots\right)^2} = \frac{1}{x^2}(1 + a_2 x^2 + \ldots) = \frac{1}{x^2} + a_2 + \ldots.$$

La décomposition de cette fonction dans la première bande donne donc les seules fractions simples $\frac{1}{x^2}$, $\frac{0}{x}$, et l'on a

$$(21) \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \xi_2(x, \pi),$$

parce que les deux membres ont 0,0 pour valeurs polaires (**238**), (**278**, V).

IV. La fonction $\frac{1}{\sin x}$ a la période 2π avec les infinis simples $0, \pi$ dans sa première bande où elle est infiniment petite à l'infini. Ses résidus sont 1 en $x = 0$ et -1 en $x = \pi$, à cause des relations (9) du n° **231** et (15), (16) du n° **232**. On a donc

$$\frac{1}{\sin x} = \xi_1(x, 2\pi) - \xi_1(x - \pi, 2\pi),$$

parce que les deux membres ont encore 0,0 pour valeurs polaires.

Etc.

283. La sommation, pour toutes valeurs de Π, i, de la série $\Sigma(x - m\Pi)^{-i} = \xi_i(x, \Pi)$, résulte immédiatement des considérations précédentes.

L'identité (17) donne d'abord

$$\xi_1(x, \Pi) = \frac{\pi}{\Pi}\,\xi_1\left(\frac{\pi}{\Pi}x, \pi\right) = \frac{\pi}{\Pi}\cot\frac{\pi}{\Pi}x \quad (\mathbf{282}, \text{I}).$$

Il vient ensuite (**278**, I)

$$\xi_i(x, \Pi) = \frac{(-1)^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)}\,\frac{\pi}{\Pi}\,\mathrm{D}^{i-1}\cot\frac{\pi}{\Pi}x,$$

expression qui se met facilement sous forme d'un polynome entier en $\cot\frac{\pi}{\Pi}x$ (**217**, II, *in fine*).

284. Indiquons, en terminant, une manière toute différente d'exécuter la sommation exprimée par la formule (20), d'où se déduisent toutes les subséquentes.

I. *La fonction* $[\xi_1(x)]^i$ *peut être mise sous forme d'une expression linéaire en*

$$\xi_1(x),\quad \xi_2(x),\quad \ldots,\quad \xi_i(x), \tag{22}$$

où le coefficient de $\xi_i(x)$ *est non* $= 0$.

C'est une conséquence immédiate du théorème du n° **280**, car cette fonction n'a dans sa première bande que l'infini $x = 0$ qui est de degré effectif i.

On peut donc résoudre successivement dans leur ordre naturel, cela par rapport aux i fonctions (22), les i équations linéaires existant ainsi entre elles, d'une part, et

$$\xi_1(x),\quad [\xi_1(x)]^2,\quad [\xi_1(x)]^3,\quad \ldots,\quad [\xi_1(x)]^i,$$

d'autre part, c'est-à-dire *mettre inversement* $\xi_i(x)$ *sous forme d'un polynome entier en* $\xi_1(x)$.

II. D'après cela, on trouvera (**278**, I)

$$\frac{d\xi_1(x,\pi)}{dx} = -\xi_2(x,\pi) = A_0 + A_1\xi_1(x,\pi) + A_2[\xi_1(x,\pi)]^2,$$

d'où, pour x infinie dans les deux directions polaires successivement,

$$0 = A_0 - A_1 i - A_2, \qquad 0 = A_0 + A_1 i - A_2, \quad (278, \text{IV})$$

et, par suite,

$$A_1 = 0, \qquad A_0 - A_2 = 0,$$

$$\frac{d\xi_1(x,\pi)}{dx} = A_0\{1 + [\xi_1(x,\pi)]^2\} = -\xi_2(x,\pi).$$

Comme d'ailleurs pour x infiniment petite on a, d'après la nature de la série $\Sigma(x - m\Pi)^{-i}$,

$$\lim x^2[\xi_1(x,\pi)]^2 = \lim x^2\xi_2(x,\pi) = 1,$$

il reste définitivement $A_0 = -1$, et

$$\frac{d\xi_1(x, \pi)}{dx} = -1 - [\xi_1(x, \pi)]^2.$$

Les fonctions $\xi_1(x, \pi)$ et $\cot x$ sont donc identiquement égales (382*), puisqu'elles satisfont à une même équation différentielle immédiate (220, I), et que pour $x = \frac{\pi}{2}$ elles prennent la même valeur numérique o (278, VII), (220, II).

III. Un autre procédé bien plus expéditif aurait consisté à établir tout d'abord la formule (21), ce qui se fait à très peu de frais parce que les valeurs polaires de $\xi_2(x)$ s'aperçoivent presque immédiatement, à descendre ensuite par différentiation aux expressions de $\xi_3(x)$, $\xi_4(x)$, ..., à remonter enfin à celle de $\xi_1(x)$ en s'appuyant sur *l'intégration à vue* exprimée par la formule évidente $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$. Nous aurions ainsi abrégé considérablement toute cette théorie, car nous aurions évité la recherche, fort longue en somme, des valeurs polaires de $\xi_1(x)$. Mais, outre que les préliminaires de cette recherche nous seront d'une grande utilité dans la théorie des fonctions elliptiques (340 et suiv., *inf.*), nous avons préféré, ici comme partout ailleurs, les méthodes directes aux tours de main ; les unes sont fécondes et mettent à nu le fond des choses, les autres le dissimulent toujours et sont stériles autant que leurs apparences sont séduisantes.

Développement des fonctions circulaires en séries factorielles (¹).

285. L'analogie invoquée au commencement du paragraphe précédent entre les fonctions rationnelles et les fonctions indéfiniment méromorphes, conduit encore à essayer sur ces dernières un autre développement, imité de la décomposition des termes d'une fraction rationnelle en puissances de facteurs linéaires s'évanouissant, les uns aux zéros, les autres aux infinis de la fonction (50).

(¹) Quoique les propriétés spéciales des séries factorielles ne soient pas indispensables ici, j'engagerai le lecteur à jeter un coup d'œil sur les nᵒˢ 369 et suiv. (*inf.*), avant de lire ce paragraphe.

Pour les fonctions unipériodiques, cette recherche nous sera singulièrement facilitée par les résultats de la précédente.

Si la constante Π *n'est pas nulle, le produit variable*

$$(1)\quad P_k(x) = \left(1 - \frac{x}{-k\Pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{-\Pi}\right)x\left(1 - \frac{x}{\Pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{m\Pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{k\Pi}\right)$$

tend, pour k infini, vers une fonction de x qui est indéfiniment olotrope.

En intégrant de o à x sur un chemin quelconque ne contenant, sauf o, aucun des points $m\Pi$, et en choisissant convenablement les logarithmes, on a évidemment

$$\int_0^x dx\left(\Sigma_k \frac{1}{x - m\Pi}\right) = \Sigma_k l\left(1 - \frac{x}{m\Pi}\right) = l\,\frac{P_k(x)}{x},$$

la sommation Σ_k s'étendant aux valeurs $-k, -(k-1), \ldots, -1, +1, 2, \ldots, k$ de m. Il en résulte (277), (278)

$$(2)\qquad \lim l\,\frac{P_k(x)}{x} = \int_0^x \left[\xi_1(x) - \frac{1}{x}\right]dx = X(x),$$

en désignant cette intégrale par $X(x)$ pour abréger, puis

$$(3)\qquad \lim P_k(x) = xe^{X(x)}.$$

L'exposant $X(x)$ n'a, comme $\xi_1(x) - \frac{1}{x}$, d'autres phases singulières que $x = m\Pi$ (m non $= 0$); mais dans le voisinage de pareilles valeurs on a

$$X(x) = l\left(1 - \frac{x}{m\Pi}\right) + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant olotrope. On a donc aussi

$$(4)\qquad \lim P_k(x) = x\left(1 - \frac{x}{m\Pi}\right)e^{\psi(x)},$$

fonction olotrope en $x = m\Pi$.

Si, au lieu des facteurs de l'expression (1), on avait considéré le facteur médian x accompagné des k' placés à sa gauche et des k'' placés à sa droite, et si, appelant K quelque constante positive on avait supposé k', k'' infinis, avec $\lim \frac{k''}{k'} = K$, on aurait trouvé, à

l'aide du même raisonnement basé sur les résultats obtenus dans l'alinéa II du n° **277**, que le produit de tous ces facteurs a pour limite

$$e^{-\frac{l(K)}{\Pi}x} \lim P_k(x).$$

Nous nous bornerons donc à la considération de la fonction $\lim P_k(x)$ que nous représenterons par $o(x)$.

286. Les propriétés essentielles de cette fonction résultent immédiatement de son mode de génération.

I. En vertu des relations (3), (2), elle est liée à $\xi_1(x)$ par l'équation différentielle et la condition initiale

$$(5) \qquad \frac{d}{dx}\, l\, o(x) = \frac{o'(x)}{o(x)} = \xi_1(x),$$

$$l\,\frac{o(x)}{x} = 0, \qquad \left[\text{ou bien } \frac{o(x)}{x} = 1\right], \qquad \text{pour } x = 0.$$

II. *Elle a pour zéros, tous simples, les quantités* $m\Pi$. C'est une conséquence de la formule (4) et de l'impossibilité pour l'exponentielle de s'évanouir quand son exposant n'est pas infini.

III. *On a les identités*

$$(6) \qquad o(-x) = -o(x),$$

$$(7) \qquad o(x+\Pi) = -o(x).$$

La relation (5), combinée avec ce qu'elle devient par le changement de x en $-x$, avec $o'(-x) = -\frac{do(-x)}{dx}$, $\xi_1(-x) = -\xi_1(x)$ (**278**, VI), donne facilement

$$\frac{d}{dx}\frac{o(-x)}{o(x)} = 0,$$

d'où en intégrant

$$(8) \qquad o(-x) = C\,o(x),$$

ou bien encore

$$\frac{o(-x)}{-x} = -C\,\frac{o(x)}{x}.$$

Comme l'intégrale figurant dans la relation (2) tend vers o pour

$\lim x = 0$, on tire de l'équation (3)

$$\lim \frac{o(x)}{x} = l\,\frac{o(-x)}{-x} = e^0 = 1.$$

On en conclut $C = -1$, moyennant quoi la formule (8) donne l'identité (6).

Le changement de x en $x + \Pi$ dans la même relation (5) conduit pareillement à

$$(9) \qquad o(x + \Pi) = C\,o(x)$$

à cause de $\xi_1(x + \Pi) = \xi_1(x)$ (278, III). En faisant ici $x = -\frac{\Pi}{2}$ et ayant égard à (6), il vient

$$o\left(\frac{\Pi}{2}\right)(C + 1) = 0,$$

d'où $C = -1$ parce que $\frac{\Pi}{2}$ n'est pas un zéro de $o(x)$ (II). Cette valeur de C portée dans la relation (9) la change en l'identité (7) qu'il restait à établir.

IV. *La fonction $o(x)$ est unipériodique avec $\pm 2\Pi$ pour période élémentaire.*

D'après l'identité (7), on a

$$o(x + 2\Pi) = o(x),$$

et 2Π est ainsi une période de cette fonction.

Mais, à cause de (5), toute période de $o(x)$ appartient à $\xi_1(x)$ (255); la première fonction ne peut donc être qu'unipériodique comme la seconde, et sa période élémentaire est de la forme $\mu\Pi$, multiple entier de celle de $\xi_1(x)$. Or l'identité (7) montre qu'on ne peut avoir $\mu = \pm 1$.

V. *Pour x infinie d'une manière quelconque dans les deux directions polaires respectivement* (264), *et pour h constant, ou bien variable mais alors fini, on a*

$$(10) \qquad \lim \frac{o(x + h)}{o(x)} = e^{\mp \frac{\pi i}{\Pi} h},$$

c'est-à-dire

$$\lim \left[\frac{o(x+h)}{o(x)} - e^{\mp \frac{\pi i}{\Pi} h} \right] = 0.$$

L'équation différentielle (5) montre que $lo(x)$ est olotrope aussi longtemps que $\xi_1(x)$; $lo(x+h)$ est donc développable par la formule de Taylor jusqu'à un module de h égal à la plus courte distance, indéfiniment croissante, de x aux infinis $m\Pi$ de $\xi_1(x)$ (202*). On a donc, en vertu de la même équation différentielle,

$$(11) \left\{ \begin{aligned} lo(x+h) - lo(x) - \xi_1(x)h &= \xi_1'(x)\frac{h^2}{1.2} + \xi_1''(x)\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots \\ &= -\xi_2(x)\frac{h^2}{2} + \xi_3(x)\frac{h^3}{3} - \ldots, \end{aligned} \right.$$

à cause des relations (11) du n° 278.

Appelons maintenant η le module de h, et supposons pour commencer $\eta < 1$; appelons encore Ξ_i, pour $i > 1$, la somme des modules des termes du développement de $\xi_i(x)$ en fractions simples (277, I). Comme x est infinie dans une direction polaire, on finit évidemment par avoir

$$\Xi_2 > \Xi_3 > \Xi_4 > \ldots;$$

de plus, nous avons reconnu incidemment que Ξ_2 tend vers 0 (278, V). Le dernier membre de la relation (11) finit donc par avoir un module inférieur à

$$\Xi_2\left(\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} + \ldots\right) < \Xi_2 \frac{\eta^2}{1-\eta};$$

par suite il tend vers 0, ce qui donne

$$\lim \left[l\,\frac{o(x+h)}{o(x)} - h\xi_1(x) \right] = 0 = \lim \left[l\,\frac{o(x+h)}{o(x)} \pm \frac{\pi i}{\Pi} h \right] \quad (278, \text{IV}),$$

relation équivalente à celle qu'il fallait établir.

Du cas où $\operatorname{mod} h < 1$, on passe au cas général, au moyen d'identités analogues à

$$\frac{o(x+h_1+h_2)}{o(x)} = \frac{o(x+h_1)}{o(x)}\,\frac{o(x+h_1+h_2)}{o(x+h_1)}.$$

VI. *La fonction $o(x)$ est polarisée, avec des valeurs polaires toutes deux infinies.*

Cette fonction étant indéfiniment olotrope (285) et ne dégénérant pas en une constante est infinie pour quelque valeur infinie de x (8), que sa périodicité permet d'astreindre à varier dans une même bande. Ainsi donc $o(x)$ est infinie quand x s'éloigne indéfiniment dans une bande, et, à cause de la relation (6), la marche de x peut être supposée s'effectuer aussi bien dans la direction boréale que dans la direction australe. La relation (10) montre, de plus, que si une marche à l'infini de direction donnée rend $o(x)$ infinie, la marche correspondante de $x+h$ jouit de la même propriété. Or, à cause de l'indétermination de h, $x+h$ n'est pas autre chose qu'une autre valeur de x allant à l'infini d'une manière quelconque dans la même bande et dans la même direction.

Comme les valeurs polaires de $o(x)$ sont toutes deux infinies, l'ordre de cette fonction (266) est 2, somme des degrés de multiplicité de ses zéros simples 0, Π, contenus dans sa première bande élémentaire (II), (IV). La considération de ses raisons polaires (269, IV) conduit à la même conclusion; car, d'après la formule (10), l'exposant de e dans leur rapport est

$$-\frac{\pi i}{\Pi}h-\frac{\pi i}{\Pi}h=(-2)\frac{2\pi i}{2\Pi}h,$$

et 2Π est la période de $o(x)$ qui n'a point d'infinis.

VII. *Entre $o(x,\Pi)$, $o(x,\varpi)$, déterminations de notre fonction $o(x)$ qui correspondent aux demi-périodes Π, ϖ, on a la relation*

$$o(x,\Pi)=\frac{\Pi}{\varpi}\,o\left(\frac{\varpi}{\Pi}x,\varpi\right). \tag{12}$$

Elle résulte effectivement, soit de la formule fondamentale (5) combinée avec la relation (17) du n° 278, IV, 3°, soit des identités évidentes

$$1-\frac{x}{m\Pi}=1-\frac{\frac{\varpi}{\Pi}x}{m\varpi},\qquad x=\frac{\Pi}{\varpi}\left(\frac{\varpi}{\Pi}x\right).$$

287. En appelant θ une constante non $=m\Pi$, et $Q_k(x)$ le pro-

duit des $2k+1$ facteurs

$$1 - \frac{x}{\theta + m\Pi},$$

où m a les valeurs $-k, -(k-1), \ldots -1, 0, 1, \ldots, k$, et en intégrant de o à x sur un chemin ne contenant aucun des points $\theta + m\Pi$, on trouve, par un raisonnement identique à celui du n° 285,

$$(13) \qquad \lim l\,Q_k(x) = \int_0^x \xi_1(x-\theta)\,dx$$

ou bien

$$\lim Q_k(x) = e^{\int_0^x \xi_1(x-\theta)dx},$$

fonction de x encore indéfiniment olotrope que nous représenterons par $o(x, \Pi, \theta)$.

Elle se ramène immédiatement à $o(x, \Pi)$; car les relations (13), (5) donnent

$$\frac{d}{dx}\,l\,o(x, \Pi, \theta) = \xi_1(x-\theta) = \frac{d}{dx}\,l\,o(x-\theta, \Pi),$$

d'où

$$l\,o(x, \Pi, \theta) - l\,o(x-\theta, \Pi) = l\,\frac{o(x, \Pi, \theta)}{o(x-\theta, \Pi)} = \text{const.}$$

et, par suite aussi,

$$\frac{o(x, \Pi, \theta)}{o(x-\theta, \Pi)} = C.$$

On a d'ailleurs $C = \frac{1}{o(-\theta, \Pi)}$ parce que $o(x, \Pi, \theta)$ se réduit évidemment à 1 pour $x = 0$. Il vient donc définitivement

$$(14) \qquad o(x, \Pi, \theta) = \frac{o(x-\theta, \Pi)}{o(-\theta, \Pi)}.$$

288. *Soient*

$$(15) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_g,$$

$$(16) \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_\gamma$$

deux groupes d'entiers positifs quelconques, et

$$(17) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g,$$

$$(18) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\gamma$$

deux groupes correspondants de quantités quelconques, incongrues suivant la quantité Π; *appelons en outre* λ *un entier* $= 0$ *ou* 1, *selon que la différence des sommes des entiers* (15), (16) *est paire ou impaire. L'expression*

$$\varphi(x) = e^{\lambda\frac{\pi i}{\Pi}x} \frac{[o(x-a_1)]^{m_1}\ldots[o(x-a_g)]^{m_g}}{[o(x-\alpha_1)]^{\mu_1}\ldots[o(x-\alpha_\gamma)]^{\mu_\gamma}}$$

est une fonction de x *indéfiniment méromorphe de période* Π *et polarisée, ayant pour zéros et infinis les quantités* (17), (18) *aux degrés de multiplicité* (15), (16).

Le premier point est évident, parce que $o(x)$ et l'exponentielle sont indéfiniment olotropes.

L'addition de Π à x multiplie l'exponentielle par $e^{\lambda\pi i} = (-1)^\lambda$, et chacune des fonctions o par -1 (**286**, III); elle multiplie donc $\varphi(x)$ par une puissance de -1 dont l'exposant

$$\lambda + (m_1 + \ldots + m_g) - (\mu_1 + \ldots + \mu_\gamma)$$

est toujours pair, c'est-à-dire par 1.

Le dernier point est évident parce que l'exponentielle n'a ni zéro, ni infini, et que les fonctions $o(x-a)$, $o(x-\alpha)$ admettent a, α pour zéros simples (**286**, II).

Quant à la polarisation de $\varphi(x)$, elle résulte de celle de son premier facteur et de $o(x-a_1)$, $\ldots$, fonctions qui toutes admettent la période 2Π (**270**).

289. *Réciproquement, si l'on représente par les notations* (17), (18) *les zéros et infinis, aux degrés de multiplicité* (15), (16), *de la fonction indéfiniment méromorphe* $f(x)$ *à la période unique* Π *et polarisée, qui tombent dans une même bande, on aura*

$$f(x) = \mathrm{K} e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x} \varphi(x),$$

où k *est quelque entier (positif, nul ou négatif) et* K *une constante.*

Il est évident, en effet, que le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ est une fonction indéfiniment méromorphe, de période unique Π, et polarisée, qui

est dépourvue de tout zéro et de tout infini. Il est donc de la forme $Ke^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x}$ (269, II).

Cette formule fournit, pour toute fonction unipériodique polarisée, la décomposition à laquelle nous faisions allusion au début de ce paragraphe. On déterminera l'entier k par la condition que la raison polaire boréale (ou australe) de l'exponentielle (269, IV) soit égale au quotient de celle de $f(x)$ par celle de $\varphi(x)$ dont le calcul est facile (286, V). La valeur du facteur constant K se tire ensuite de ce que devient la formule pour $x = x_0$, valeur particulière n'annulant pas son second membre.

Aux fonctions $o(x - a_1)$, ..., on peut y substituer les produits $o(-a_1, \Pi)o(x, \Pi, a_1)$, ... (287).

290. Le développement de $\sin x$ fournit l'application la plus intéressante de cette formule. Au lieu d'opérer directement, nous substituerons à $\sin x$, de période 2π et d'ordre 2, la fonction $f(x) = e^{ix}\sin x$, de période π et d'ordre 1 seulement, avec le zéro simple unique $x = 0$.

Comme on a ici $\lambda = 1$, $\frac{2\pi i}{\Pi} = 2i$, il vient

$$e^{ix}\sin x = Ke^{k.2ix}e^{ix}o(x, \pi),$$

c'est-à-dire

$$\sin x = Ke^{k.2ix}o(x, \pi).$$

L'expression de $\sin x$ en e^{ix} donne immédiatement pour sa raison polaire boréale e^{-ih}, égale à celle de $o(x, \pi)$ (286, V); il en résulte $k = 0$. On a d'ailleurs $K = 1$ parce que les rapports $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{o(x)}{x}$ tendent tous deux vers 1 quand x tend vers 0 (231), (286, I). Il vient donc définitivement

$$(19)\quad \begin{cases} \sin x = o(x, \pi) \\ \quad = \lim\left[\left(1 - \frac{x}{-k\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{-\pi}\right)x\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{k\pi}\right)\right], \end{cases}$$

ou bien, en groupant les facteurs équidistants du facteur médian x,

$$(20)\quad \sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{m^2\pi^2}\right)\cdots.$$

291. Le développement de $\cos x$ s'obtient de la même manière;

mais il est plus expéditif de le déduire du précédent. La formule (19) donne effectivement

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned}\cos x &= -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -o\left(x-\frac{\pi}{2},\,\pi\right)\\ &= -o\left(-\frac{\pi}{2},\,\pi\right)o\left(x,\,\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)\quad (287)\\ &= -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)o\left(x,\,\pi,\,\frac{\pi}{2}\right) = o\left(x,\,\pi,\,\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \lim\left[\left(1-\frac{x}{-\frac{2k+1}{2}\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{-\frac{1}{2}\pi}\right)\right.\\ &\qquad\qquad \left.\times\left(1-\frac{x}{\frac{1}{2}\pi}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\frac{2k-1}{2}\pi}\right)\right]\\ &= \left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi^2}\right]\cdots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\pi^2}\right]\cdots,\end{aligned}\right.$$

en groupant les facteurs qui se permutent par le changement de x en $-x$.

292. Voici des conséquences intéressantes des formules précédentes.

I. Les développements de $\sin x$, $\cos x$ par la formule de Maclaurin, et les séries entières fournies par les développements des seconds membres (effectués comme si le nombre des facteurs y était limité (**371**, *inf.*) étant nécessairement identiques, les coefficients des termes semblables y sont égaux. En égalant ceux de x^3, par exemple, dans les deux membres de la formule (20), il vient ainsi

$$\frac{\pi^2}{1.2.3} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}+\ldots,$$

Etc.

II. Pour $x=\frac{\pi}{2}$, on a $\sin\frac{\pi}{2}=1$, et la relation (20) donne

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= 1:\left[\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\right]\\ &= \frac{2^2}{(2-1)(2+1)}\,\frac{4^2}{(4-1)(4+1)}\cdots\frac{(2m)^2}{(2m-1)(2m+1)}\cdots\\ &= \frac{2.2}{1.3}\,\frac{4.4}{3.5}\cdots\frac{2m.2m}{(2m-1)(2m+1)},\;\ldots;\end{aligned}$$

c'est la célèbre formule de Wallis.

III. En choisissant convenablement les logarithmes, on tire de la même formule (20)

$$l\sin x = lx + l\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + l\left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) + \ldots,$$

et, pour x réelle et $< \pi$ numériquement, tous les logarithmes postérieurs au premier dans le second membre sont développables par la formule de Maclaurin (**171**), en séries entières jouissant évidemment des propriétés mentionnées dans l'énoncé du n° **105***. On met ainsi l'excès de $l\sin x$ sur lx sous forme d'une série entière en x, facile à calculer avec une approximation déterminée.

De même pour $l\cos x$ à cause de la relation (21). Ces deux formules servent de base au calcul des valeurs de $\log\sin x$, $\log\cos x$, par suite de $\log\operatorname{tang} x$, $\log\cot x$, qui seules figurent dans les Tables trigonométriques.

293. Les formules (12), (14), (19) donnent immédiatement

$$o(x, \Pi) = \frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}x, \qquad o(x, \Pi, \theta) = \frac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x - \theta)}{\sin\left(-\frac{\pi}{\Pi}\theta\right)}.$$

294. La relation (2), combinée avec la formule (20) du n° **282** et avec *l'intégration à vue*

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = l\sin x + C,$$

nous aurait conduit immédiatement à la formule fondamentale (19). Nous aurions pu également y arriver plus rapidement en approfondissant d'abord la nature du produit variable $P_k(x)$ considéré en lui-même. Mais, d'une part, l'étude d'une série factorielle (produit de facteurs en nombre infini) ne se fait bien commodément que par l'intermédiaire de la série ordinaire procédant suivant les logarithmes de ses facteurs; d'autre part, nous aurions laissé dans l'ombre l'étroite connexité existant entre les fonctions $o(x)$, $\xi_1(x)$. Nous avons donc préféré la méthode ci-dessus, moins expéditive, mais bien meilleure au point de vue déjà signalé à la fin du n° **284**; en outre, elle nous laissera bien peu à ajouter, quand nous traiterons la même question pour les fonctions elliptiques (**351** et suiv., *inf.*).

Intégration des fonctions unipériodiques polarisées.

295. Ce problème se confond avec celui de l'intégration d'une fonction composée rationnelle quelconque d'exponentielles et de fonctions circulaires méromorphes, toutes à même période; il est maintenant susceptible d'une solution très simple et très générale, dont on remarquera la grande analogie avec l'intégration des fonctions rationnelles par décomposition en fractions simples.

Soit $f(x)$ une fonction unipériodique quelconque, de période Π, et polarisée. Nous avons vu au nº **269**, III, que $f(x)$ est décomposable en une fonction linéaire d'exponentielles de la forme $e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x}$ (les multiplicateurs k étant des entiers de valeurs et de signes quelconques) et en une fonction de même période Π, dont les valeurs polaires sont finies. Cette dernière, à son tour, est réductible à une fonction linéaire de fonctions $\xi_i(x-\alpha_j)$ (**280**). On a donc en résumé

$$f(x) = B_0 + \Sigma B_k e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x} + \Sigma A_{i,j}\xi_i(x-\alpha_j),$$

où, dans la première somme Σ, k ne prend pas la valeur o.

On a maintenant, en faisant abstraction des constantes arbitraires,

$$\int B_0\,dx = B_0 x, \qquad \int e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x}dx = \frac{\Pi}{k.2\pi i}e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x},$$

puis, si i est >1 (**278**, I),

$$\int \xi_i(x-\alpha_j)\,dx = \frac{1}{-i+1}\xi_{i-1}(x-\alpha_j),$$

puis enfin, si $i=1$ (**286**, I),

$$\int \xi_1(x-\alpha_j)\,dx = lo(x-\alpha_j).$$

Il vient donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \int f(x)\,dx = C + B_0 x + \frac{\Pi}{2\pi i}\sum \frac{B_k}{k}e^{k\frac{2\pi i}{\Pi}x} \\ + \sum \frac{A_{i,j}}{-i+1}\xi_{i-1}(x-\alpha_j) + \Sigma A_{1,j}\,lo(x-\alpha_j). \end{aligned}\right.$$

C'est la formule que nous voulions obtenir, et dans l'avant-dernière partie de laquelle, l'indice i ne peut prendre la valeur 1.

On peut naturellement y remplacer les exponentielles par des sinus et des cosinus, les fonctions $\xi_{i-1}(x-\alpha_j)$ par $\frac{\pi}{\Pi}\cot\frac{\pi}{\Pi}(x-\alpha_j)$ et par ses dérivées (283), et les fonctions $o(x-\alpha_j)$ par

$$\frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-\alpha_j) \quad (293),$$

ce qui donne à l'intégrale une apparence circulaire s'il y a quelque raison pour la préférer.

Il faut évidemment et il suffit :

1° Pour que l'intégrale soit méromorphe, que la cinquième partie de l'expression (1) n'existe pas, c'est-à-dire que *tous les résidus de* $f(x)$ *soient nuls;*

2° Pour qu'elle soit indéfiniment olotrope, que la quatrième partie n'existe pas non plus, c'est-à-dire que $f(x)$ *n'ait aucun infini;*

3° Pour qu'elle soit périodique, que *la cinquième partie n'existe pas, et en outre que* $B_0 = 0$.

295 *bis*. Les considérations si simples du numéro précédent fournissent, pour des différentielles courantes formant une classe fort étendue, une méthode d'intégration systématique qui, à aucun point de vue, ne nous paraît inférieure aux artifices en faveur. Nous y reviendrons dans le Chapitre I de notre troisième Partie; mais, en attendant, peu de mots nous suffiront pour en faire apprécier le mécanisme.

I. La combinaison des formules (20), (21) du n° **282**, (11) du **278**, donne immédiatement

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \xi_2(x,\pi)\,dx = -\xi_1(x,\pi) + C = -\cot x + C.$$

II. Celle des formules (20) du n° **282**, (5) du n° **286**, (19) du n° **290**, conduit à

$$\int \cot x\,dx = \int \xi_1(x,\pi)\,dx = l\,o(x,\pi) + C = l\sin x + C.$$

III. On trouve de la même manière (282, IV), (293),

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \xi_1(x, 2\pi)\,dx - \int \xi_1(x-\pi, 2\pi)\,dx \\ &= lo(x, 2\pi) - lo(x-\pi, 2\pi) + C \\ &= l\left(\frac{2\pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\pi}\,x\right) - l\left[\frac{2\pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{2\pi}\,(x-\pi)\right] + C \\ &= l\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)} + C = l\,\mathrm{tang}\frac{x}{2} + C'.\end{aligned}$$

Etc.

Ces formules sont connues de temps pour ainsi dire immémorial, et les procédés qui les ont procurées sont des plus élémentaires; mais ils sont absolument empiriques aussi, et aucun d'eux ne peut en expliquer les natures variées.



CHAPITRE VIII.

THÉORIE SOMMAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Classification des intégrales elliptiques et ultra-elliptiques.

296. Les premières idées acquises sur les transcendantes étudiées dans les Chapitres précédents ont été inspirées aux inventeurs par les besoins de la pratique, et, quoiqu'elles soient bien loin encore de n'avoir plus cours, nous les avons abandonnées complètement pour remettre ces fonctions à leur place naturelle, pour les montrer sous leur vrai jour. Il n'en sera pas ainsi pour celles dont nous allons maintenant nous occuper, parce que ce sont des considérations purement théoriques qui ont guidé les géomètres dans la recherche de leurs propriétés.

Revenant aux intégrales abéliennes considérées aux nos **222** et suiv., dont la forme générale est

$$\int F(x, y)\,dx,$$

où F désigne une composante rationnelle, et y la racine carrée d'un polynôme entier $\varphi(x)$ de degré effectif $k > 0$, et sans zéro multiple, nous supposerons maintenant, comme il est permis de le faire d'après le n° **223**, que *ce degré k est un nombre pair* $2n$. Alors *les intégrales fondamentales* (7) du n° **224**

$$(1)\qquad \int \frac{x^g\,dx}{y} = \int \frac{x^g}{\sqrt{\varphi(x)}}\,dx, \qquad (g = 0, 1, \ldots, 2n-2)$$

sont en nombre égal à $2n - 1$.

Si on les prend de x_0 à X (sur un chemin de longueur limitée), *toutes sont finies*. Effectivement, les seules valeurs de x pour lesquelles la fonction placée sous le signe $\int$ cesse d'être olotrope sont les zéros de $\varphi(x)$ (**125**). En appelant a l'un d'eux et posant

$$\varphi(x) = (x-a)\varphi_1(x),$$

$\varphi_1(x)$ ne s'évanouit pas en $x = a$ et l'on a

$$\frac{x^g}{\sqrt{\varphi(x)}} = (x-a)^{-\frac{1}{2}} \frac{x^g}{\sqrt{\varphi_1(x)}} = h_0(x-a)^{-\frac{1}{2}} + h_1(x-a)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

parce que, $\sqrt{\varphi_1(x)}$ étant olotrope en $x = a$, le second facteur du membre moyen est développable par la formule de Taylor.

On en conclut (157)

$$\int \frac{x^g\,dx}{y} = \text{C} + \frac{h_0}{\frac{1}{2}}(x-a)^{\frac{1}{2}} + \frac{h_1}{\frac{3}{2}}(x-a)^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

expression finie pour $x = a$.

Quand X est infinie, on peut écrire

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x^g\,dx}{y} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^g\,dx}{y} + \int_{x_1}^{\infty} \frac{x^g\,dx}{y},$$

en allongeant assez le premier tronçon du chemin d'intégration pour que le deuxième ne contienne pas la valeur particulière o de x.

La première intégrale du second membre est finie comme on vient de le voir. En faisant $x = \frac{1}{t}$ dans la seconde, elle devient

$$(2) \qquad -\int_{\frac{1}{x_1}}^{0} \frac{dt}{t^{g+2-n}\sqrt{\psi(t)}},$$

le polynôme $\psi(t)$ étant de degré $2n$ [$2n-1$, si $\varphi(0)=0$] et donnant $\psi(0) \gtrless 0$. Cela posé, et en admettant, bien entendu, que, quand x s'éloigne de x_1 à l'infini, $t = \frac{1}{x}$ décrive un chemin limité en longueur de $\frac{1}{x_1}$ à o, il y a deux cas à distinguer.

1° Si $g \leqq n-2$, $g+2-n$ est un entier nul ou négatif, on rentre dans le cas précédent pour l'intégrale auxiliaire (2), et *l'intégrale considérée est comme celle-ci finie.*

2° Si $g > n-2$, $g+2-n$ est un entier positif g', et *ces deux intégrales sont infinies.* Car dans le voisinage de $t = 0$, la fonction sous le signe se développe en une série de la forme

$$h_0 t^{-g'} + h_1 t^{-g'+1} + \ldots,$$

où h_0 n'est pas nulle, dont l'intégrale indéfinie (157)

$$C + \frac{h_0}{-g'+1} t^{-g'+1} + \ldots,$$

si $g' > 1$, ou $C + h_0 l(t) + \ldots$, si $g' = 1$, est infinie en $t = 0$.

Ainsi donc les $n-1$ intégrales fondamentales (1) où g a les valeurs $0, 1, \ldots, n-2$ sont finies pour x infinie; on les nomme intégrales de *première espèce*.

Au contraire, les n autres où cet exposant a les valeurs $n-1$, $n, \ldots, 2n-2$ sont infinies pour x infinie, et sont dites de *deuxième espèce*.

297. Quant aux intégrales fondamentales de la forme (8) du même n° **224**, chacune d'elles devient infinie, mais seulement pour la valeur $\mathfrak{a}$ de x, qui annule le multiplicateur linéaire du radical; on s'en assure en posant $x = \mathfrak{a} + t$ et raisonnant comme ci-dessus (**296**, 2°). On les nomme intégrales de *troisième espèce*.

Le nombre et les valeurs des quantités $\mathfrak{a}$ dépendent non seulement de la nature du polynome $\varphi(x)$, mais encore de celle de la composante rationnelle F. Pour un même polynome $\varphi(x)$, le nombre des intégrales de troisième espèce, qui est celui des quantités dont il s'agit, est donc illimité, ce qui n'a pas lieu pour celles de première et de deuxième espèce. Néanmoins si, dans l'intégrale en question

$$\int \frac{dx}{(x-\mathfrak{a})y},$$

on considère $\mathfrak{a}$ *comme une variable paramétrique, on peut dire qu'il y a une seule intégrale de troisième espèce, fonction des deux variables* x, $\mathfrak{a}$. Cette seconde variable $\mathfrak{a}$ se nomme le *paramètre* de l'intégrale de troisième espèce. La distinction faite au n° **224** entre les cas où $\mathfrak{a}$ est ou n'est pas un zéro de $\varphi(x)$, devient alors très secondaire.

298. Pour les intégrales elliptiques (**225**) dont nous allons maintenant nous occuper, on a $2n = 4$, et, d'après ce qui précède, *chaque détermination du polynome biquadratique* $\varphi(x)$ *donnera seulement comme fonctions nouvelles pour nous une inté-*

grale de première espèce

$$(3) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

deux intégrales de deuxième espèce

$$(4) \qquad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}, \quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

et une intégrale de troisième espèce

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{(x-\mathfrak{a})\sqrt{\varphi(x)}}$$

dépendant tant de x que de son paramètre $\mathfrak{a}$.

Première étude de la fonction inverse de l'intégrale elliptique de première espèce.

299. La théorie des intégrales elliptiques a pour base les propriétés de celle de première espèce (3) du n° **298**, que nous allons tout d'abord étudier.

Désormais nous appellerons u la variable d'intégration, puis a, b, c, d les quatre zéros simples et nécessairement inégaux du polynome biquadratique $\varphi(u)$ qui prend ainsi la forme

$$\varphi(u) = G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d),$$

où la constante G est $\neq 0$.

Nous appellerons x une détermination donnée quelconque de l'intégrale indéfinie de première espèce, de manière à avoir

$$(1) \qquad x = \int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

ou bien, ce qui revient au même,

$$(2) \qquad \frac{du}{dx} = \sqrt{G(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)},$$

u désignant maintenant la fonction inverse de l'intégrale indéfinie, dont la considération est préférable.

300. La discussion de l'intégrale de l'équation (2), précisée par

des conditions initiales données, et considérée seulement pour des valeurs de x suffisamment voisines de sa valeur initiale, conduit aux résultats suivants.

I. Si pour $x = x_0$, valeur quelconque de x, on doit avoir $u = u_0$, *valeur quelconque de u non égale à l'un des quatre zéros* a, b, c, d *de* $\varphi(x)$, le radical figurant dans le second membre de (2) est olotrope parce qu'il ne s'évanouit pas (125), et, en vertu de la théorie générale des équations différentielles totales (301*), *cette équation admet une intégrale qui est olotrope en* x_0.

On sous-entend toutefois, que le radical a été exactement précisé par un choix préalable fait entre les deux déterminations initiales opposées dont il est susceptible pour $u = u_0$. Si l'on admettait indistinctement ces deux déterminations, *notre équation différentielle aurait deux intégrales distinctes* (olotropes en x_0 et s'y réduisant à u_0).

II. Si pour $x = x_0$, *u doit se réduire à l'un des quatre zéros de* $\varphi(u)$, à a par exemple, le changement de fonction inconnue

$$u = a + u_a'^2 \tag{3}$$

transforme notre équation en une autre se dédoublant en

$$u_a' = 0 \quad \text{(identiquement)}, \tag{4}$$

$$\frac{du_a'}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{G(u_a'^2 + a - b)(u_a'^2 + a - c)(u_a'^2 + a - d)}, \tag{5}$$

et simultanément la condition initiale en $u_a' = 0$, pour $x = x_0$.

A cause de l'inégalité numérique des zéros de $\varphi(u)$, le radical de l'équation (5) ne s'évanouit plus en $u_a' = 0$; il y est donc olotrope (125), et par suite cette équation, comme (2) dans le cas ci-dessus (I), admet en $x = x_0$ deux intégrales olotropes qui correspondent aux deux déterminations maintenant distinctes du nouveau radical.

Mais chacune d'elles est égale au produit de l'autre par -1; car, en changeant u_a' en $-u_a'$ dans l'équation (5), on ne fait que passer de la détermination du radical (où u_a' entre seulement par $u_a'^2$) à la détermination opposée, sans modifier la condition initiale. En les portant donc, ainsi que $u_a' = 0$ (4), dans la formule (3), *on trouvera pour u deux fonctions seulement se*

réduisant à a pour $x = x_0$, et toutes deux y sont olotropes; l'une reste égale à a quelle que soit x, l'autre est variable.

III. *L'équation* (2) *admet deux intégrales assujetties à la condition d'être infinies pour $x = x_0$; toutes deux sont méromorphes en ce point.*

La substitution

$$(6) \qquad u = \frac{1}{u''}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u''^2}\frac{du''}{dx},$$

transforme l'équation (2) en

$$(7) \qquad \frac{du''}{dx} = -\sqrt{G(1-au'')(1-bu'')(1-cu'')(1-du'')},$$

et la condition initiale en $u'' = 0$, pour $x = x_0$.

Comme ce nouveau radical ne s'annule pas en $u'' = 0$, il y est olotrope, et, sauf distinction faite entre ses deux valeurs initiales, l'équation (7) admet deux intégrales nulles et olotropes en $x = x_0$ (I). En les portant dans la formule (6), on obtient deux fonctions non olotropes en x_0, mais méromorphes, parce que leurs inverses arithmétiques u'' y sont olotropes (43); ce sont les deux intégrales que notre énoncé mentionne pour l'équation (2).

301. *Dans toute l'étendue du plan, une intégrale déterminée quelconque de notre équation différentielle peut être calculée indéfiniment par cheminement, soit directement, soit indirectement par l'intermédiaire des fonctions u'_a, u'_b, u'_c, u'_d, u'' ci-dessus* (300), *et elle y est méromorphe.*

I. Pour toute valeur de u'_a tombant dans une aire S'_0 contenant le point $u'_a = 0$, et délimitée de telle sorte que la distance de l'un quelconque de ses autres points à celui-ci reste inférieure à une quantité positive η moindre elle-même que le plus petit module des racines carrées de $b-a$, $c-a$, $d-a$, le radical de l'équation (5) reste olotrope, parce qu'il ne peut s'y évanouir. On peut donc, puisque ce radical n'est pas compliqué de x, assigner un même olomètre ρ'_a à l'intégrale u'_a, pour toutes les valeurs de x qui font tomber la valeur de cette fonction auxiliaire dans S'_0, et, par suite aussi, en vertu de la relation (3), à notre intégrale u, pour

toutes les valeurs de x qui font tomber la sienne dans une aire S_a délimitée autour du point a, de manière qu'aucun de ses points ne s'écarte de celui-ci d'une distance supérieure à η^2 (301*).

On déterminera semblablement trois autres quantités positives ρ'_b, ρ'_c, ρ'_d, et trois aires S_b, S_c, S_d contenant les points $u = b$, c, d, lesquelles jouiront de cette propriété, que pour toutes les valeurs de x plaçant celle de u soit dans S_b, soit dans S_c, soit dans S_d, cette fonction ait pour olomètres ρ'_b, ρ'_c, ρ'_d respectivement.

On peut de même assigner un même olomètre ρ'' à $u'' = \frac{1}{u}$, intégrale de l'équation (7), pour toutes les valeurs de x qui placent celle de u'' dans une aire S''_0 contenant $u'' = 0$, et telle que les modules des quatre quantités au'', bu'', cu'', du'' y restent inférieurs à une quantité positive $\theta < 1$, c'est-à-dire qui font tomber u dans une aire (illimitée) S_∞ dont tous les points sont séparés du point $u = 0$ par une distance supérieure aux modules des quantités $\frac{a}{\theta}$, $\frac{b}{\theta}$, $\frac{c}{\theta}$, $\frac{d}{\theta}$.

Appelons enfin S ce qui reste du plan servant à la notation graphique de u, après l'ablation des aires S_a, S_b, S_c, S_d, S_∞; il est évident que cette aire est limitée et que le radical y est olotrope, puisqu'il ne s'y évanouit pour aucune valeur de u (ni de x qui n'y entre pas). On peut donc encore, toujours en vertu de la théorie générale (301*), assigner un même olomètre ρ à notre intégrale u, pour toutes les valeurs de x qui ne la font pas sortir de S.

Comme la réunion des aires S_a, S_b, S_c, S_d, S_∞, S reconstitue la totalité du plan où nous notons u, il est clair qu'en appelant δ la plus petite des quantités ρ'_a, ρ'_b, ρ'_c, ρ'_d, ρ'', ρ, on peut calculer u par cheminement dans tout le plan de notation de x en faisant des pas d'amplitude au moins égale à δ. Seulement l'opération qui est directe quand u tombe dans l'une des aires S_a, S_b, S_c, S_d et S est indirecte quand la valeur de cette fonction se trouve dans S_∞; elle s'exécute sur la fonction auxiliaire u'' d'où l'on repasse à u au moyen de la formule (6).

II. Soient enfin s_x une aire de dimensions inférieures à δ, délimitée arbitrairement dans le plan servant à la notation graphique de x, x_i une valeur de cette variable intérieure à s_x, et u_i la valeur atteinte par u en ce point. Dans s_x et d'après ce qui précède, cette

fonction est olotrope, si u_i tombe soit dans S_a, soit dans S_b, soit dans S_c, soit dans S_d, soit dans S, et méromorphe seulement (43) si c'est dans S_∞ puisque $u'' = \frac{1}{u}$ est certainement olotrope en x_i. Quoi qu'il puisse arriver, elle est donc méromorphe au moins dans s_x, partant dans toute aire limitée, puisqu'on peut évidemment décomposer celle-ci en un nombre limité de fragments analogues à s_x, c'est-à-dire indéfiniment.

302. En exceptant comme de raison les quatre intégrales (singulières) de l'équation (2) $u = a, b, c, d$, qui sont identiquement constantes, et appelant $E(x)$ une des intégrales ordinaires variables que désormais nous considérerons exclusivement, il résulte de tout ce qui précède que cette fonction $E(x)$ est indéfiniment méromorphe, et qu'elle est entièrement déterminée par la connaissance : 1° de la valeur $u_0 = E(x_0)$ qu'elle prend pour une valeur particulière x_0 de x ne la rendant pas infinie; 2° quand $\varphi(u_0)$ n'est pas nulle, de la valeur correspondante R_{x_0} du radical $\sqrt{\varphi(u)}$, choisie naturellement parmi les deux valeurs numériques opposées de $\sqrt{\varphi(u_0)}$.

Ceci rappelé, on a le théorème fondamental dont voici l'énoncé :

Quelle que soit U, *l'équation numérique*

$$E(x) = U \tag{8}$$

a une infinité de racines finies, et, en appelant X *une quelconque d'entre elles, toutes sont fournies par les formules*

$$x = X + m\Pi + n\Omega, \tag{9}$$

$$x = S - X + m\Pi + n\Omega, \tag{10}$$

où m, n sont des entiers (positifs ou négatifs) absolument indéterminés, et S, Π, Ω *trois constantes dont les deux dernières ont un moment* $\neq 0$ (257).

I. La quantité x_0 étant arbitraire, nous la choisirons de telle sorte que $u_0 = E(x_0)$ ne soit égale à aucune des quantités a, b, c, d, ce qui est possible, puisque $E(x)$ ne dégénère pas en une constante; ensuite nous observerons que $E(x)$ étant indéfiniment méromorphe, les racines de l'équation (8) sont les diverses valeurs

acquises en U, au bout de tous les chemins conduisant de $u = u_0$ à $u = \mathrm{U}$, par la racine variable x de l'équation

$$(11) \qquad \mathrm{E}(x) = u,$$

que précisent les conditions initiales $x = x_0$, pour $u = u_0$, condition ne comportant aucune ambiguïté, puisque $\mathrm{E}'(x_0) = \sqrt{\varphi(u_0)}$ n'est pas nulle (**48**).

La fonction implicite x que définit cette équation finie n'est pas autre chose que l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\mathrm{E}'(x)} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

déterminée par la même condition initiale accompagnée de $\sqrt{\varphi(u)} = \mathrm{R}_{x_0}$, pour $u = u_0$. Il en résulte que *les racines de notre équation* (8) *sont égales aux diverses valeurs de l'expression*

$$(12) \qquad x_0 + \int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

l'intégrale

$$(13) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}$$

étant prise sur tous les chemins imaginables qu'on peut tracer de u_0 à U, et la valeur initiale du radical étant toujours $= \mathrm{R}_{x_0}$.

La fonction placée sous le signe $\int$ ne cesse d'être olotrope qu'aux points a, b, c, d; un quelconque de ces chemins peut donc être amené par déformation progressive, faite dans un espace où cette fonction reste olotrope, n'altérant pas par suite la valeur de l'intégrale (13), à se composer d'une succession, avec ou sans répétitions, de quelques-unes des boucles simples

$$(14) \qquad (a), \quad (b), \quad (c), \quad (d)$$

allant de u_0 à u_0 et enveloppant une seule fois chacune le point correspondant à l'exclusion des trois autres, puis d'un chemin

$$(15) \qquad [u_0 \mathrm{U}]$$

tracé arbitrairement et une fois pour toutes de u_0 à U (**229***, II).

Nous appellerons I la valeur de l'intégrale (13) prise sur ce dernier chemin, et X la valeur correspondante $x_0 + \mathrm{I}$ de l'expression (12), qui est une première racine de l'équation (8).

II. *L'intégrale* (13), *prise sur l'une des boucles* (14), (a) *par exemple, a une valeur* A_{u_0} *indépendante du sens de rotation dans lequel cette boucle peut être parcourue; on a de plus*

$$\text{(16)} \qquad \mathrm{A}_{u_0} = 2\int_{u_0}^{a} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \quad (239^*),$$

l'intégrale étant prise sur un chemin $[u_0 a]$ *tracé de* u_0 *à* a, *de telle sorte que, doublé par lui-même en sens inverse, il puisse être considéré comme une boucle* $(u_0 a u_0)$ *limitant avec* (a) *une aire ne contenant aucun des points* b, c, d.

Soient $[u_0 u_0]'$, $[u_0 u_0]''$ les chemins d'intégration constitués par la boucle (a) parcourue à partir de u_0 dans les deux sens de rotation possibles, A'_{u_0}, A''_{u_0} les valeurs correspondantes de notre intégrale, et $'\psi(u)$, $''\psi(u)$ les valeurs acquises par $\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$ en un même point u de ces deux chemins géométriquement identiques, après le parcours des arcs de l'un et de l'autre qui conduisent de u_0 en ce point, le radical, lui, partant dans les deux cas de la même valeur initiale R_{x_0}.

On a $'\psi(u) = -''\psi(u)$, parce que chacun de ces arcs devient équivalent à l'autre quand on le fait précéder de la boucle (a) (166, II), (113, *in fine*); il en résulte évidemment

$$\mathrm{A}'_{u_0} = \int_{[u_0 u_0]'} {'\psi(u)}\,du = -\int_{[u_0 u_0]'} {''\psi(u)}\,du = -\left[-\int_{[u_0 u_0]''} {''\psi(u)}\,du\right] = \mathrm{A}''_{u_0},$$

parce que $[u_0 u_0]''$ n'est pas autre chose que $[u_0 u_0]'$ parcouru à rebours.

Déformons enfin la boucle (a), sans qu'elle franchisse aucun des points a, b, c, d, jusqu'à ce qu'elle se compose : 1° d'un arc $[u_0 \alpha]$ du chemin $[u_0 a]$, limité à un point α se rapprochant indéfiniment de a; 2° d'un contour fermé $[\alpha\alpha]$ de dimensions infiniment petites, enveloppant a une fois seulement; 3° de l'arc $[\alpha u_0]$ géométrique-

ment égal à $[u_0\alpha]$. On aura évidemment sans cesse

$$A_{u_0} = \int_{[u_0\alpha]} {}'\psi(u)\,du + \int_{[\alpha\alpha]} {}'\psi(u)\,du + \int_{[\alpha u_0]} {}'\psi(u)\,du$$
$$= 2\int_{u_0}^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} + \int_{[\alpha\alpha]} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

la première intégration devant s'effectuer sur $[u_0\alpha]$ à partir de la valeur R_{x_0} du radical, et la seconde sur le contour $[\alpha\alpha]$ à partir de la valeur finale à laquelle le chemin précédent a conduit le même radical.

En posant $\varphi(u) = (u-a)\varphi_1(u)$, on a évidemment sur le contour $[\alpha\alpha]$

$$\varphi_1(u) = h_0 + h_1(u-a) + \ldots,$$

d'où

$$[\varphi(u)]^{-\frac{1}{2}} = (u-a)^{-\frac{1}{2}}[\varphi_1(u)]^{-\frac{1}{2}} = H_0(u-a)^{-\frac{1}{2}} + H_1(u-a)^{\frac{1}{2}} + \ldots,$$

parce que $h_0 = \varphi_1(a)$ n'est pas nul; on en conclut (157)

$$\int \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = C + (u-a)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{1}H_0 + \frac{2}{3}H_1(u-a) + \ldots\right],$$

puis

$$\int_{[\alpha\alpha]} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = 2(\alpha-a)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{1}H_0 + \frac{2}{3}H_1(\alpha-a) + \ldots\right],$$

parce que, de α en α sur le contour $[\alpha\alpha]$, $(u-a)^{\frac{1}{2}}$ passe toujours de sa valeur initiale à la valeur opposée (126), (113). Cette dernière quantité tendant vers zéro quand α tend vers a, on a bien

$$(17) \qquad A_{u_0} = 2\lim \int_{u_0}^{\alpha} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = 2\int_{u_0}^{a} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \quad (239^*).$$

Nous représenterons par

$$(18) \qquad A_{u_0}, \quad B_{u_0}, \quad C_{u_0}, \quad D_{u_0}$$

les valeurs de l'intégrale (13) prises respectivement sur les boucles (14). Elles ne sont pas indépendantes de la position du point u_0; car, s'il passe en u_1 après avoir décrit l'arc $[u_0 u_1]$, sans, bien entendu, que la boucle correspondante franchisse quelqu'un des points a, b, c, d, la formule (17) montre que chacune d'elles

diminue de

$$(19)\qquad 2\int_{u_0}^{u_1}\frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

l'intégrale étant prise sur cet arc.

III. *Les valeurs de l'intégrale* (13), *prises sur les boucles* (14), *allongées du chemin* (15), *sont respectivement*

$$A_{u_0}-I,\quad B_{u_0}-I,\quad C_{u_0}-I,\quad D_{u_0}-I.$$

Car le parcours de la boucle (a), par exemple, donne d'abord une partie de l'intégrale qui est égale à A_{u_0} (II), et ramène en $u=u_0$, le radical $\sqrt{\varphi(u)}$ à la valeur finale $-R_{x_0}$ (166, II), (113). Cette quantité étant bien la valeur initiale qu'il faut attribuer au radical pour achever l'intégration sur le chemin (15), on trouvera $-I$ pour dernière partie de l'intégrale, puisque nous avons appelé I ce que donne le même chemin quand le radical part de R_{x_0}.

IV. *L'intégrale* (13) *prise consécutivement sur deux des boucles* (14), (a) *puis* (b) *par exemple, suivies du chemin* (15), *a pour valeur* $A_{u_0}-B_{u_0}+I$.

Nous venons de constater que le parcours de la boucle (b) suivie du chemin (15) donne $B_{u_0}-I$; en plaçant la boucle (a) avant le nouveau chemin ainsi composé, on trouvera donc, comme ci-dessus (III),

$$A_{u_0}-(B_{u_0}-I)=(A_{u_0}-B_{u_0})+I,$$

excès sur ce qu'il fournirait seul, de ce que donne la boucle qui le précède.

Si les deux boucles considérées se réduisaient à la même parcourue deux fois, (a) par exemple, on trouverait évidemment pour l'intégrale $A_{u_0}-(A_{u_0}-I)=I$.

On remarquera que la succession de deux boucles (a), (b), constitue un chemin fermé équivalent à tout autre enveloppant dans un sens déterminé convenable les deux points a, b, à l'exclusion des autres c, d, et sur lequel le calcul de l'intégrale (13) donne pour résultat $A_{u_0}-B_{u_0}$. Ici le résultat ne dépend pas de la position de u_0; car, en passant de u_0 à u_1, A_{u_0} comme B_{u_0} diminuent simultanément de la quantité (19), ce qui ne change pas leur

différence. On le verrait encore en raisonnant comme ci-après (V, *inf.*), c'est-à-dire en prouvant qu'entre deux chemins fermés de cette espèce $\sqrt{\varphi(u)}$ reste olotrope, ce qui entraîne l'égalité des valeurs de l'intégrale (13), prise sur l'un et l'autre dans des sens de rotation identiques (229*, V). Mais le résultat dépend de l'ordre dans lequel les boucles se succèdent; il est $A_{u_0} - B_{u_0}$ pour l'ordre (*a*), (*b*), et $B_{u_0} - A_{u_0}$ naturellement pour l'ordre (*b*), (*a*).

Un raisonnement analogue à celui de l'alinéa (II) donnera

$$(20) \qquad A_{u_0} - B_{u_0} = 2\int_a^b \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} \quad (243^*),$$

l'intégrale étant prise sur un chemin tracé de a à b, de manière que sa duplication faite à rebours donne un contour fermé, déformable jusqu'à celui que composent (*a*), (*b*), sans que c, d soient franchis. En un point α très voisin de a sur le chemin, il faut faire un choix convenable entre les deux déterminations du radical, sans quoi le second membre de cette formule serait non égal, mais opposé au premier.

On notera encore que le parcours de deux des boucles (14) (différentes ou identiques) ramène le radical à la valeur R_{x_0}; car celui d'une seule l'amène à la valeur $-R_{x_0}$ que celui de l'autre change en $-(-R_{x_0}) = R_{x_0}$. De même pour toute autre combinaison de ces boucles prises en nombre pair.

Si, au contraire, on prenait des boucles en nombre impair, la valeur finale du radical serait $-R_{x_0}$.

V. *En supposant, comme il est permis de le faire, les boucles* (14) *tellement tracées que, sans franchir aucun des points a, b, c, d, on puisse déformer le contour fermé que donne leur soudure les unes aux autres faite dans l'ordre où nous les avons écrites, de manière à le superposer à un contour fermé* (K) *bordant une aire où ces quatre points tombent simultanément, on a*

$$(21) \qquad A_{u_0} - B_{u_0} + C_{u_0} - D_{u_0} = 0.$$

Par exemple, si aucune des quantités a, b, c, d n'étant sur le segment rectiligne tracé d'une autre à u_0, elles se trouvent écrites dans l'ordre circulaire où les rencontre une demi-droite

pivotant autour de ce point dans un sens de rotation constant, on réalisera cette disposition en faisant les quatre boucles équivalentes aux quatre segments rectilignes $[u_0 a]$, $[u_0 b]$, ..., doublés chacun par lui-même pris à rebours (II).

La fonction $\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}$ est localement olotrope dans l'aire comprise entre le contour (K) et celui qu'a créé la soudure des quatre boucles, parce que $\varphi(u)$ ne s'y évanouit jamais. Elle y est en outre monodrome, car deux chemins de mêmes extrémités tracés dans cette aire peuvent se déformer de l'un à l'autre, soit sans franchir aucun des quatre points a, b, c, d, soit en les franchissant autant de fois les uns que les autres, ce qui multiplie la valeur finale du radical par une puissance de -1 dont l'exposant est nul ou multiple de 4. Elle y est donc olotrope d'une manière absolue (**172***), et l'intégrale (13) a des valeurs égales, soit sur l'un, soit sur l'autre de ces contours fermés qui la bordent, l'un intérieurement, l'autre extérieurement, quand on les parcourt, bien entendu, dans des sens de rotations identiques (**229***, V).

Sur les quatre boucles soudées, l'intégrale est égale à

$$A_{u_0} - B_{u_0} + C_{u_0} - D_{u_0}.$$

Sur (K), sa valeur est indépendante des dimensions de ce contour dont nous pouvons ainsi supposer tous les points infiniment éloignés de l'origine. Alors en posant, comme au n° **300**, III, $u = \frac{1}{u''}$, d'où $du = -\frac{1}{u''^2}du''$, l'intégrale dont il s'agit est égale à

$$-\int \frac{du''}{\sqrt{G(1-au'')\dots(1-du'')}},$$

prise sur le contour fermé (K″) décrit par $u'' = \frac{1}{u}$ pendant que u décrit (K). Les points de (K″) pouvant être supposés aussi rapprochés qu'on le veut de o, valeur de u'' qui n'annule pas ce nouveau radical, la fonction sous le signe est olotrope à l'intérieur de (K″) et l'intégrale est nulle (**229***, III); d'où la relation (21).

VI. *Un chemin formé par une soudure de boucles* (14) *prises en tel nombre et en tel ordre qu'on voudra, puis terminé par*

le chemin (15) *donne pour l'intégrale* (13) *une des cinq quantités*

$$(22) \qquad I, \quad A_{u_0} - I, \quad B_{u_0} - I, \quad C_{u_0} - I, \quad D_{u_0} - I,$$

augmentée d'une somme de multiples entiers (*positifs ou négatifs*) *des six différences*

$$(23) \quad A_{u_0} - B_{u_0}, \quad A_{u_0} - C_{u_0}, \quad A_{u_0} - D_{u_0}, \quad B_{u_0} - C_{u_0}, \quad B_{u_0} - D_{u_0}, \quad C_{u_0} - D_{u_0}$$

des quantités (18) *prises deux à deux.*

Dans un pareil chemin, toute paire de boucles identiques et contiguës n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale, ni sur la valeur initiale à attribuer au radical pour poursuivre l'intégration après leur parcours (IV).

Si donc les boucles restant après la suppression des paires de ce genre sont en nombre pair, elles donnent une partie de l'intégrale évidemment égale à une somme de multiples entiers des différences (23), ramènent le radical à la valeur R_{x_0}, après quoi le parcours du chemin (15) donne une dernière partie égale à I.

Si elles sont en nombre impair $2k+1$, les $2k$ premières donnent, comme tout à l'heure des multiples entiers des différences (23) et ramènent le radical à R_{x_0}; puis (III) la $(2k+1)^{\text{ième}}$ suivie de $[u_0 U]$ ajoute à cette somme quelqu'une des quatre dernières quantités (22).

VII. Actuellement représentons par Π et Ω deux des différences (23) ayant un terme commun, en posant, par exemple,

$$(24) \qquad A_{u_0} - B_{u_0} = \Pi, \qquad A_{u_0} - C_{u_0} = \Omega.$$

On aura d'abord

$$B_{u_0} - C_{u_0} = -\Pi + \Omega,$$

puis on trouvera successivement, en ayant égard à l'égalité (21),

$$(25) \left\{ \begin{array}{l} C_{u_0} - D_{u_0} = -\Pi, \quad A_{u_0} - D_{u_0} = -\Pi + \Omega, \quad B_{u_0} - D_{u_0} = -2\Pi + \Omega, \\ \qquad B_{u_0} = A_{u_0} - \Pi, \quad C_{u_0} = A_{u_0} - \Omega, \quad D_{u_0} = A_{u_0} + \Pi - \Omega, \end{array} \right.$$

moyennant quoi les valeurs ci-dessus (VI) de l'intégrale (13) prennent les formes

$$(26) \qquad I + m\Pi + n\Omega \quad \text{et} \quad A_{u_0} - I + m\Pi + n\Omega.$$

En ayant donc égard à la relation $X = x_0 + I$ (I) et posant

$$(27) \qquad 2x_0 + A_{u_0} = S,$$

il est évident que les valeurs de l'expression (12), c'est-à-dire les racines de l'équation (8), sont bien celles qu'assignent les formules (9), (10).

Inversement, toutes les valeurs de x données par ces formules sont des racines de cette équation. Il est évident, en effet, qu'une soudure convenable de boucles (14), placée avant le chemin (15), peut faire acquérir à l'intégrale (13) une valeur égale à l'une quelconque des quantités (26).

VIII. Il nous reste à prouver qu'entre les éléments de Π, Ω on a l'inégalité

$$(28) \qquad \begin{vmatrix} \Pi' & \Pi'' \\ \Omega' & \Omega'' \end{vmatrix} \neq 0.$$

A cet effet, faisons mouvoir x sur un chemin $[x_0\xi]$ ne contenant aucun infini de $E(x)$, ce qui est possible puisque cette fonction, étant indéfiniment méromorphe (**301**), ne peut offrir dans une aire limitée quelconque, que des infinis en nombre essentiellement limité (**31**). Le point $u = E(x)$ décrira simultanément une ligne limitée $[u_0 \upsilon]$, de $u_0 = E(x_0)$ à $\upsilon = E(\xi)$; et inversement (I), l'intégrale (13) prise sur cette ligne est égale à $\xi - x_0$.

En appelant $\xi^{(0)} - x_0$ la valeur de la même intégrale prise sur quelque autre ligne $[u_0 \upsilon]^{(0)}$ tracée arbitrairement de u_0 à υ, on pourra, d'après ce que nous avons remarqué à la fin de l'alinéa VII, trouver pour les entiers m, n des valeurs donnant

$$(29) \qquad m\Pi + n\Omega = \text{soit } \xi - \xi^{(0)}, \text{ soit } \xi - [A_{u_0} - \xi^{(0)}].$$

Maintenant la quantité ξ est arbitraire en module et en direction, sauf la minime restriction de n'être pas un infini de $E(x)$; d'autre part, et cela parce que l'intégrale (13) est de première espèce (**296**, 1°), la quantité $\xi^{(0)}$ conserve, quelle que soit υ, un module inférieur à une certaine limite qu'on peut assigner, pourvu seulement, ce que nous sous-entendons expressément, que la ligne $[u_0 \upsilon]^{(0)}$, en s'allongeant, ne fasse jamais autour des points a, b, c, d, que des lacets en nombre limité. Il en résulte évidem-

ment que, dans chacune des quantités $\xi - \xi^{(0)}$, $\xi - [A_{u_0} - \xi^{(0)}]$, le rapport des éléments peut, lui-même ou son inverse arithmétique à volonté, être rendu numériquement supérieur à une quantité positive donnée quelconque. Donc, en vertu de l'égalité (29), la même chose doit pouvoir être réalisée par l'attribution de valeurs convenables aux entiers m, n, pour les rapports équivalents

$$\frac{m\Pi' + n\Omega'}{m\Pi'' + n\Omega''}, \quad \frac{m\Pi'' + n\Omega''}{m\Pi' + n\Omega'}.$$

Cela posé, on ne peut avoir :

1° Ni $\Pi' = \Pi'' = \Omega' = \Omega'' = 0$; car alors Π et Ω seraient nulles et l'on aurait toujours $\xi = \xi^{(0)}$ ou $= A_{u_0} - \xi^{(0)}$, ce que rend impossible l'indétermination absolue du module de ξ, combinée avec la limitation de ceux de A_{u_0} et $\xi^{(0)}$;

2° Ni Ω' et $\Omega'' \not= 0$, avec $\Pi' = k\Omega'$, $\Pi'' = k\Omega''$; car, en supposant $\Omega'' \not= 0$ pour fixer les idées, le premier des rapports ci-dessus se réduirait quels que fussent m, n à la quantité invariable $\frac{\Omega'}{\Omega''}$, et ne pourrait par suite lui être rendu numériquement supérieur;

3° Ni Π' et $\Pi'' \not= 0$, avec $\Omega' = k\Pi'$, $\Omega'' = k\Pi''$, comme on s'en assure par le même raisonnement. La relation (28) a donc lieu, parce que la nullité de son premier membre entraînerait l'une ou l'autre des conséquences dont l'impossibilité vient d'être constatée.

Cette inégalité est fondamentale, car sans elle la double périodicité des fonctions $E(x)$ et toute leur théorie dont elle est la clef de voûte s'écrouleraient comme de vaines illusions. L'étude des propriétés de ces fonctions, approfondie plus que nous ne pouvons le faire, fournirait une autre démonstration ressemblant beaucoup par son principe à celle du même point pour la fonction exponentielle, que nous avons donnée au n° **180**.

303. *L'équation*

$$\frac{1}{E(x)} = 0 \tag{30}$$

a une infinité de racines qui, toutes aussi, sont fournies par deux formules analogues à (9), (10).

En raisonnant comme ci-dessus (**302**, I), on trouvera que les racines de cette équation s'obtiennent en ajoutant x_0 aux valeurs

que peut prendre l'intégrale (13) sur tous les chemins imaginables tracés de u_0 à l'infini. Comme cette intégrale est de première espèce, elle a certainement une valeur finie sur quelque chemin particulier de cette nature $[u_0\infty]$ (**296**, 1°), et ses autres valeurs s'obtiendront toujours en plaçant avant ce chemin telle ou telle soudure de boucles (14). Effectivement l'intégrale (13) prise jusqu'à U′, valeur de u s'éloignant indéfiniment sur un chemin quelconque, a la même valeur que sur quelque pareille soudure suivie d'une partie du chemin $[u_0\infty]$ dont l'extrémité U″ s'y éloigne indéfiniment, suivie enfin d'une ligne [U″U′] dont tous les points sont comme U′, U″, infiniment éloignés de l'origine. Or la portion de l'intégrale afférente à cette ligne est infiniment petite; car la substitution $u = t^{-1}$, d'où $du = -t^{-2}dt$, la change en $-\int [t^4\varphi(t^{-1})]^{-\frac{1}{2}}dt$, et le nouveau chemin d'intégration finit par être tracé dans une aire où la fonction à intégrer est olotrope, entre des points tous deux infiniment voisins de la valeur $t = 0$.

Il en résulte, pour ces valeurs de l'intégrale, des expressions de la forme (26), et par suite, pour la représentation des racines de l'équation (30), des formules du genre de (9), (10).

304. Des théorèmes précédents résultent immédiatement plusieurs propriétés capitales des intégrales de l'équation (2).

I. *Chaque intégrale* E(x) *satisfait quels que soient les entiers* m, n *aux deux identités*

$$(31)\qquad E(x + m\Pi + n\Omega) = E(x),$$

$$(32)\qquad E(S - x) = E(x).$$

Ces relations ne sont effectivement que les formules (9), (10) écrites autrement.

La première montre que E(x) est une fonction périodique (**204**), mais maintenant de *deux manières,* parce qu'elle admet indistinctement pour période l'une ou l'autre des quantités Π, Ω *satisfaisant à la condition* (28). Nous reviendrons longuement sur cette périodicité double qui est devenue la base de la théorie des fonctions elliptiques. Comme au n° **251**, nous dirons *congrues ou incongrues selon les périodes* Π, Ω, deux quantités dont la différence est ou n'est pas de la forme $m\Pi + n\Omega$.

La similitude de la seconde avec les dernières relations (12), (15) du n° **232** pour $\cos x$ et $\sin x$ nous autorise, relativement à la nouvelle fonction $E(x)$, à nommer *supplément* d'une valeur donnée de x la quantité $S - x$ qui figure dans cette identité, et aussi à donner le nom de *supplémentaire* à la constante S servant ainsi à former les suppléments.

A cause de l'identité (31), cette seconde subsiste encore si l'on remplace S par une quantité congrue quelconque. *La fonction* $E(x)$ *possède donc une infinité de constantes supplémentaires; mais toutes sont évidemment congrues deux à deux.*

II. *Si* $E(x)$ *désigne une intégrale particulière de l'équation* (2), *choisie à volonté, et* Γ *une constante arbitraire, chacune des expressions*

$$E(\Gamma + x),\quad E(\Gamma - x) \tag{33}$$

renferme toutes les autres intégrales.

En appelant $E_1(x)$ quelque autre intégrale, les racines x et x_1 des équations finies

$$E_1(x) = u,\qquad E(x_1) = u$$

satisfont aux équations différentielles

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}},\qquad \frac{dx_1}{du} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

ce que nous avons vu au n° **302**, I. Selon donc que pour une même valeur de u les radicaux devront avoir des valeurs égales ou opposées, on aura

$$\frac{dx_1}{du} = \pm \frac{dx}{du},$$

c'est-à-dire

$$\frac{d(x_1 \mp x)}{du} = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x_1 = \Gamma \pm x,$$

puis

$$E_1(x) = u = E(x_1) = \begin{cases} \text{soit } E(\Gamma + x), \\ \text{soit } E(\Gamma - x). \end{cases}$$

Ainsi $E_1(x)$ est contenue dans l'une ou dans l'autre des expressions (33) et même dans l'une aussi bien que dans l'autre, parce

qu'elles renferment toutes deux les mêmes fonctions de x exactement, à cause de l'identité (32) qui donne à volonté

$$\begin{aligned} E(\Gamma - x) &= E(S - \Gamma + x) = E(\Gamma_1 + x), \\ E(\Gamma + x) &= E(S - \Gamma - x) = E(\Gamma_1 - x). \end{aligned}$$

Inversement, il est évident que toute fonction renfermée dans les expressions (33) est, comme $E(x)$, indéfiniment méromorphe, et qu'elle satisfait à l'équation (2).

Deux intégrales correspondant à deux valeurs Γ', Γ'', attribuées à Γ dans l'une de ces expressions, sont différentes ou identiques selon que la différence $\Gamma'' - \Gamma'$ n'est pas ou est de la forme $m\Pi + n\Omega$.

III. *Les intégrales de l'équation* (2) *admettent toutes les mêmes périodes, mais non la même constante supplémentaire.*

Soient $E(x)$ et $E_1(x) = E(\Gamma + x)$ (II) deux de ces intégrales, Π et Ω les périodes de la première et S, S_1 les constantes supplémentaires de l'une et de l'autre. On a évidemment

$$E_1(x + m\Pi + n\Omega) = E(\Gamma + x + m\Pi + n\Omega) = E(\Gamma + x) = E_1(x),$$

en vertu de quoi les périodes Π, Ω appartiennent aussi à $E_1(x)$.

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} E_1(S_1 - x) = E_1(x) = E(\Gamma + x) &= E(S - \Gamma - x) \\ &= E(\Gamma + S - 2\Gamma - x) = E_1(S - 2\Gamma - x), \end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = S - 2\Gamma + m\Pi + n\Omega.$$

Pour que $S_1 = S$, à des multiples entiers de périodes près, il faut que 2Γ soit une somme exacte de pareils multiples et par suite que Γ soit congrue à l'une des quantités

$$0, \quad \frac{\Pi}{2}, \quad \frac{\Omega}{2}, \quad \frac{\Pi}{2} + \frac{\Omega}{2}.$$

Les conclusions du présent alinéa s'accordent avec les remarques du n° 302, II, IV, sur la manière dont varient les intégrales (18) et leurs différences deux à deux, quand leur limite inférieure commune u_0 change de valeur, et nous aurions pu les en déduire.

IV. *Si* U *n'est pas égal à quelqu'un des quatre zéros*

$$(34) \qquad a, \quad b, \quad c, \quad d$$

de $\varphi(u)$, *les racines de l'équation* (8) *sont simples; sinon elles sont doubles et congrues aux quatre quantités*

$$(35) \qquad \frac{S}{2}, \quad \frac{S}{2}+\frac{\Pi}{2}, \quad \frac{S}{2}+\frac{\Omega}{2}, \quad \frac{S}{2}+\frac{\Pi+\Omega}{2}$$

respectivement, si toutefois S, Π, Ω *ont été choisies conformément aux égalités* (24), (27).

Si $\varphi(u)$ ne s'évanouit pas pour $u = \mathrm{U}$, $\mathrm{E}'(x) = \sqrt{\varphi(u)}$ en vertu de l'équation différentielle, (2) ne s'évanouit pas non plus pour les valeurs correspondantes de x, qui toutes sont ainsi racines simples de l'équation (8).

Si $\varphi(u)$ s'évanouit, ce qui exige $\mathrm{U} = a, b, c, d$, $\mathrm{E}'(x)$ s'évanouit aussi, et toute valeur de x correspondant à U est racine multiple. Mais, comme l'équation différentielle donne

$$\mathrm{E}''(x) = \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{1}{2}\varphi'(u),$$

et que $\varphi'(\mathrm{U})$ n'est pas nulle parce que $\varphi(u)$ n'a que des zéros simples, $\mathrm{E}''(x)$ ne peut s'évanouir, et la valeur considérée de x est racine double.

A cause des quatre relations (17) et analogues, les valeurs de l'intégrale (13) pour $\mathrm{U} = a, b, c, d$ sont congrues à ce que deviennent les quantités (22) quand on y substitue successivement à I les moitiés des quatre intégrales définies (18), c'est-à-dire à ces moitiés elles-mêmes, comme on le constatera facilement. Pour les mêmes valeurs de U, les racines de l'équation (8) qui sont de la forme (12) se réduisent donc bien de même aux quantités (35), ce que l'on aperçoit sans peine en ayant égard à la formule (27) et aux trois dernières égalités (25).

Nous appellerons valeurs *cardinales* de $\mathrm{E}(x)$ ces quantités remarquables (34) dont la substitution à U rend ainsi doubles toutes les racines de l'équation (8), et aussi, relativement à cette fonction, valeurs *cardinales* de x, les racines mêmes de cette équation, congrues aux quantités (35), comme on vient de le voir.

Pour $\mathrm{U} = 0$, les racines de cette même équation sont les *zéros* de $\mathrm{E}(x)$.

V. Les racines de l'équation (30) sont les infinis de $\mathrm{E}(x)$.

Chacun d'eux est simple, et tous sont congrus à deux d'entre eux incongrus.

Un infini α, de degré μ pour $E(x)$, est de degré $\mu+1$ pour $E'(x)$ (36), par suite de degré $2(\mu+1)$ pour $[E'(x)]^2$; d'autre part, il est de degré 4μ pour $\varphi[E(x)]$, polynome de degré effectif 4 en $E(x)$. L'équation différentielle (2) donnant $[E'(x)]^2 = \varphi[E(x)]$, on a donc $2(\mu+1) = 4$, d'où $\mu = 1$.

On arrive à la même conclusion, en observant qu'en vertu de la formule (6) et de l'équation différentielle auxiliaire (7), α, infini de u, est zéro simple de $u'' = \frac{1}{u}$.

La quantité $\beta = S - \alpha$ est un second infini de $E(x)$ à cause de l'identité (32), et tous les autres sont congrus à α ou à β (303). Mais on ne peut avoir $\beta - \alpha = m\Pi + n\Omega$, car cela donnerait

$$S - 2\alpha = m\Pi + n\Omega,$$

d'où $\alpha =$ quelque valeur cardinale de x (IV), ce qui est impossible puisque les valeurs cardinales correspondantes (34) de $E(x)$ ne sont pas infinies.

VI. Si, pour une intégrale donnée $E_1(x) = E(x+\Gamma)$ de l'équation (2), la constante supplémentaire S_1 est nulle (ou congrue à 0), la relation $E_1(S_1 - x) = E(x)$ prend la forme $E_1(-x) = E_1(x)$, propre à $\cos x$ (232), et en vertu de laquelle $E_1(x)$ est une fonction *paire* de x. On a $S_1 = S - 2\Gamma$ (III); pour qu'il en soit ainsi, il faut donc que la différence $S - 2\Gamma$ soit congrue à 0, par suite que Γ soit congrue à quelque valeur cardinale de x.

Parmi les intégrales de l'équation (2) *figurent toujours ainsi* 4 *fonctions paires, et pas davantage.* Pour $x = 0$, elles se réduisent respectivement aux quatre valeurs cardinales de $E(x)$ (IV).

305. Terminons ce paragraphe par une étude rapide de l'intégrale (1) dans le cas où le radical porterait sur un polynôme $\psi(u)$ du troisième degré seulement, mais toujours sans zéro multiple.

D'après le n° **223**, l'intégration de l'équation

$$(36) \qquad \frac{du}{dx} = \sqrt{\mathfrak{z}(u-\mathfrak{a})(u-\mathfrak{b})(u-\mathfrak{c})}$$

se ramène à celle de l'équation (2) par une simple substitution rationnelle du premier degré.

En appelant $\mathfrak{g}$, d deux constantes $\neq 0$, dont la première n'est égale à aucun des zéros α, β, c de $\psi(u)$, et posant

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathfrak{g}^2 d^2}(\mathfrak{g}-\alpha)(\mathfrak{g}-\beta)(\mathfrak{g}-c) = G,$$

$$(37) \qquad -\frac{d\alpha}{\mathfrak{g}-\alpha} = a, \qquad -\frac{d\beta}{\mathfrak{g}-\beta} = b, \qquad -\frac{dc}{\mathfrak{g}-c} = c,$$

G n'est pas nul, les quatre quantités a, b, c, d sont deux à deux inégales, et la substitution

$$u = \frac{\mathfrak{g}u}{u-d}$$

amène l'équation (36) à la forme (2) précédemment étudiée. Son intégrale $E_\infty(x)$ est donc fournie par la formule

$$(38) \qquad E_\infty(x) = \frac{\mathfrak{g}E(x)}{E(x)-d}.$$

Il résulte de là que $E_\infty(x)$ est, comme $E(x)$, indéfiniment méromorphe, et qu'elle jouit de toutes les propriétés générales reconnues à cette fonction dans les deux numéros précédents. Celles qui font l'objet des alinéas IV et V du dernier se modifient toutefois comme il suit.

I. *Les infinis de* $E_\infty(x)$ *sont doubles et tous congrus à l'un quelconque d'entre eux.* Ce sont effectivement les zéros du dénominateur $E(x)-d$, qui sont tous doubles pour lui et congrus à

$$\frac{S}{2} + \frac{\Pi+\Omega}{2},$$

parce que d est une valeur cardinale de $E(x)$ (304, IV).

II. *Si* α *est un infini de* $E_\infty(x)$, *la constante supplémentaire de cette fonction est congrue à* 2α.

En outre, l'équation

$$E_\infty(x) = \mho$$

acquiert, pour $\mho = \alpha, \beta, c$, *des racines doubles congrues à*

$$\frac{S}{2}, \quad \frac{S}{2}+\frac{\Pi}{2}, \quad \frac{S}{2}+\frac{\Omega}{2}.$$

La constante supplémentaire de $E_\infty(x)$ coïncide évidemment avec celle de $E(x)$, pour laquelle on peut prendre la quantité S définie par la formule (27). Comme on a $E\left(\frac{S}{2}+\frac{\Pi+\Omega}{2}\right)=d$ (304, IV), $E_\infty(x)$ est infinie pour $x=\frac{S}{2}+\frac{\Pi+\Omega}{2}$, d'où

$$S = 2\alpha + m\Pi + n\Omega.$$

D'autre part, pour qu'une valeur de x annule $E'_\infty(x)$, il faut et il suffit, en vertu de la relation (38), qu'elle annule $E'(x)$, dès lors (*loc. cit.*) qu'elle soit l'une des trois premières valeurs cardinales (35), puisque la dernière rend infinie $E_\infty(x)$ et par suite $E'_\infty(x)$.

Comme les valeurs correspondantes de $E(x)$ sont a, b, c, celles de $E_\infty(x)$ sont α, β, c, à cause de la même relation (38) combinée avec les formules (37).

On retrouverait facilement toutes ces propriétés de la fonction $E_\infty(x)$, en étudiant directement l'équation (36) par la méthode suivie ci-dessus pour l'équation (2).

III. En résumé, et nonobstant la dissemblance extérieure des équations différentielles génératrices, les fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$ ne diffèrent les unes des autres qu'en ce seul point : les quatre valeurs cardinales de x (35) rendent toutes $E(x)$ finie, tandis que l'une d'elles rend $E_\infty(x)$ infinie. En d'autres termes, $E(x)$ *a ses quatre valeurs cardinales finies, tandis que* $E_\infty(x)$ *en a trois finies et une infinie,* particularité que notre notation rappelle.



CHAPITRE IX.

SUITE DU PRÉCÉDENT. — FONCTIONS BIPÉRIODIQUES EN GÉNÉRAL.

Considérations arithmétiques.

306. Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ d'une seule variable est *bipériodique,* au *couple* de périodes Π, Ω, *de moment non nul* (**257**), quand elle satisfait à l'identité

$$f(x + m\Pi + n\Omega) = f(x),$$

quels que soient les entiers positifs ou négatifs m, n.

En supposant, comme nous le ferons toujours, que $f(x)$ est indéfiniment méromorphe et ne dégénère pas en une constante, cette fonction jouit, relativement à chacune de ses périodes, *considérée isolément,* des propriétés générales des fonctions unipériodiques mentionnées aux n^{os} **251** et suiv.

307. Comme nous l'avons constaté (**304**), (**305**), les fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$ sont toutes bipériodiques; il en est de même pour les fonctions composées rationnelles, finies ou différentielles, de pareilles fonctions quand elles sont douées des mêmes périodes (**255**).

Inversement, on démontre qu'une fonction méromorphe bipériodique s'exprime toujours algébriquement au moyen tant de $E(x)$ que de $E_\infty(x)$, si toutefois ces fonctions ont les mêmes périodes (**381**, *inf.*). Il y a ainsi identité, au fond, entre la théorie des fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$, et celles des fonctions bipériodiques méromorphes de toutes origines. Mais la double périodicité de ces fonctions une fois établie, on facilite beaucoup leur étude ultérieure en délaissant souvent l'équation différentielle génératrice, pour adopter cette nouvelle propriété comme base principale du rai-

sonnement. *La théorie des fonctions* $E(x)$, $E_\infty(x)$ (*comprenant celles de leurs composées algébriques*) *prend ainsi les allures d'une théorie générale des fonctions bipériodiques, considérées indépendamment de leur provenance.* Dans bien des questions d'ailleurs, les fonctions bipériodiques s'introduisent autrement que par la composition de $E(x)$, $E_\infty(x)$ avec des composantes algébriques.

308. Relativement à ses deux périodes Π, Ω, *considérées ensemble,* une fonction bipériodique jouit de propriétés générales caractéristiques dans le détail desquelles nous allons entrer.

On a d'abord cette proposition :

La valeur particulière $a = a' + ia''$ *de* x *ayant été choisie arbitrairement, toute valeur* $x' + ix''$ *de cette variable est congrue* (304, I) *à quelque autre de la forme*

$$a + p\Pi + q\Omega, \tag{1}$$

où p, q *sont des quantités réelles convenables tombant l'une et l'autre entre* 0 *et* 1.

Le système d'équations linéaires simultanées

$$\begin{cases} \Pi' P + \Omega' Q = x' - a', \\ \Pi'' P + \Omega'' Q = x'' - a'' \end{cases}$$

est possible et déterminé, parce que le déterminant des coefficients des inconnues P, Q, moment de Π, Ω, est essentiellement supposé $\neq 0$; et, si m, $m + 1$ et n, $n + 1$ sont les paires d'entiers consécutifs entre lesquels tombent P, Q, on a $P = m + p$, $Q = n + q$, p, q tombant entre 0 et 1. Ces équations donnent donc bien

$$x = a + p\Pi + q\Omega + (m\Pi + n\Omega).$$

309. Tous les points dont les affixes sont de la forme (1) tombent évidemment à l'intérieur du parallélogramme constituant l'espace commun à deux bandes dont les bords de l'une passent par les points

$$a, \quad a + \Pi$$

et sont parallèles à Ω, dont les bords de l'autre passent par

$$a, \quad a + \Omega$$

et sont parallèles à Π. D'ailleurs les bords de l'une ne peuvent être parallèles à ceux de l'autre, parce que le moment de Π, Ω n'est pas nul. En outre, si l'on ajoute à toutes les valeurs de x tombant dans ce parallélogramme une même somme $\mu\Pi + \nu\Omega$ de multiples entiers de Π, Ω, on obtient toutes celles situées dans le parallélogramme, superposable au précédent par une simple translation, dont les points sont intérieurs à la fois à certaines bandes de mêmes directions respectivement; les bords de celles-ci passent pour l'une par $a + \mu\Pi$, $a + (\mu + 1)\Pi$, et pour l'autre par $a + \nu\Omega$, $a + (\nu + 1)\Omega$.

En attribuant à μ, ν toutes les combinaisons de valeurs entières possibles, on obtient une infinité de parallélogrammes de cette sorte; leurs côtés sont tous parallèles et égaux, les uns à Π, mod Π, les autres à Ω, mod Ω; tous ces parallélogrammes sont égaux entre eux, ils remplissent exactement le plan comme un pavage sans lacunes, et on peut les considérer comme y étant découpés par un double système de droites menées parallèlement, les unes à Ω, par les points

$$\ldots,\quad a - \Pi,\quad a,\quad a + \Pi,\quad \ldots,$$

les autres à Π, par les points

$$\ldots,\quad a - \Omega,\quad a,\quad a + \Omega,\quad \ldots.$$

Enfin, leurs sommets ont pour affixes les termes d'un ensemble doublement indéfini qu'on peut considérer comme formant une sorte de *progression arithmétique aux deux raisons* Π, Ω, et qu'on peut écrire

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots, & & a + 2\Omega, & a + \Pi + 2\Omega, & a + 2\Pi + 2\Omega, & \ldots \\
\ldots, & a - \Pi + \Omega, & a + \Omega, & a + \Pi + \Omega, & a + 2\Pi + \Omega, & \ldots \\
\ldots, & a - \Pi, & a, & a + \Pi, & a + 2\Pi, & \ldots \\
\ldots, & a - \Pi - \Omega, & a - \Omega, & a + \Pi - \Omega, & \ldots\ldots & \ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Il résulte des observations précédentes, que *les valeurs prises dans un seul de ces parallélogrammes par $f(x)$ et par ses dérivées (ou autres coefficients de ses développements)* (252) *se répètent indéfiniment dans chacun des autres aux points respectivement congrus,* qu'on peut ainsi limiter à l'intérieur de

l'un quelconque d'entre eux, l'étude de cette fonction bipériodique.

Nous appellerons l'ensemble de ces parallélogrammes le *réseau construit sur le couple* (Π, Ω), chacun d'eux une *maille,* et leurs sommets (2) les *nœuds* de ce réseau.

Pour fixer les idées, on prend $= 0$ la quantité a, et l'on considère plus volontiers la *première* maille du réseau correspondant, ayant pour sommets 0, Π, Ω, $\Pi + \Omega$.

On remarquera que *l'aire de chaque maille,* double de celle du triangle ayant pour sommets 0, Π, Ω, est *précisément mesurée par la valeur numérique* du déterminant des coordonnées de ses deux derniers sommets, c'est-à-dire *du moment même du couple* (Π, Ω).

La maille d'une fonction bipériodique joue ainsi un rôle identique à celui de la *bande* d'une fonction unipériodique (258); mais l'une est une aire *limitée,* tandis que l'autre est *illimitée;* à cela tiennent en majeure partie les dissemblances des propriétés de ces deux sortes de fonctions.

310. Si les deux multiplicateurs entiers qui forment chacune des paires α, β et γ, δ ne sont pas nuls simultanément, la fonction bipériodique $f(x)$ au couple de périodes (Π, Ω), admet évidemment pour période l'une quelconque des deux quantités

$$(3) \qquad \begin{cases} \Pi_1 = \alpha\Pi + \beta\Omega, \\ \Omega_1 = \gamma\Pi + \delta\Omega, \end{cases}$$

dont le moment $\mathfrak{M}_1$ est lié à $\mathfrak{M}$, moment du couple (Π, Ω), par la relation évidente

$$(4) \qquad \mathfrak{M}_1 = \nabla\mathfrak{M},$$

en posant, pour abréger,

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \nabla.$$

Si donc ∇, *déterminant des quatre multiplicateurs, n'est pas nul,* $\mathfrak{M}_1$ *ne le sera pas non plus, et notre fonction sera encore bipériodique au nouveau couple* (Π_1, Ω_1).

Nous dirons alors que le couple (Π_1, Ω_1), son réseau, sa maille, *sont composés* du couple (Π, Ω), de son réseau, de sa maille.

L'égalité (4) montre que *l'aire de la maille composée est le produit de celle de la maille primitive par le déterminant* (5) *des multiplicateurs,* qui est entier comme eux.

On pourrait prouver que la maille composée est sécable en fragments polygonaux (en nombre limité) dont un autre assemblage reproduit une aire résultant de la juxtaposition de $\pm \nabla$ mailles primitives.

311. Entre deux réseaux dont l'un est ainsi composé de l'autre, il existe une relation de la plus haute importance; mais nous ne pouvons l'établir avant d'avoir démontré un théorème d'Arithmétique, se rattachant à une généralisation fort étendue de la division élémentaire des nombres entiers.

La théorie d'un système de formes linéaires exige la considération continuelle de l'ensemble de leurs coefficients, abstraction faite des variables. En écrivant sur une même *ligne* ceux d'une même forme, et sur une même *colonne* ceux d'une même variable dans toutes, on obtient un tableau décomposable en *files* tant horizontales que verticales, pour lequel j'ai proposé le nom d'*abaque* du système de formes ([1]). La *largeur* d'un abaque est le nombre de ses colonnes, c'est-à-dire des variables dont les formes sont fonctions; sa *hauteur* est le nombre de ses lignes ou bien celui des formes composant le système.

Soient maintenant un abaque carré de hauteur 2

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{array} \right.,$$

ayant pour *éléments* des nombres entiers (positifs ou négatifs), de déterminant $D \neq 0$; soient encore

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} k_1 \\ k_2 \end{array} \right.$$

et

$$(7\,bis) \qquad p, \quad q$$

une colonne et une ligne contenant chacune deux éléments entiers.

([1]) *Exposition nouvelle de la théorie des formes linéaires et des déterminants.* Paris, Gauthier-Villars et fils; 1884.

Pour exprimer que les deux relations

$$(8)\qquad \begin{cases} k_1 = a_1 p + b_1 q, \\ k_2 = a_2 p + b_2 q \end{cases}$$

existent entre tous ces nombres, nous dirons que la colonne (7) est *divisible* par l'abaque (6) et que la ligne (7 *bis*) est le *quotient* de cette sorte de *division*.

Quand on a $\pm D = 1$, cette division est toujours possible, parce que les équations linéaires (8) sont, quels que soient leurs premiers membres, toujours résolubles par rapport à p, q en nombres entiers.

Appelant encore *différence* des deux colonnes *entières*

$$(9)\qquad \begin{cases} k'_1 \\ k'_2 \end{cases},\quad \begin{cases} k''_1 \\ k''_2 \end{cases},$$

la colonne

$$\begin{cases} k''_1 - k'_1 \\ k''_2 - k'_2 \end{cases},$$

nous dirons que ces colonnes sont *congrues* ou *incongrues suivant l'abaque* (6) pris pour *diviseur,* selon que leur différence est ou n'est pas divisible par cet abaque.

Cela posé, voici l'énoncé du théorème en question :

Suivant le diviseur (6) *de déterminant* D, *on peut assigner* $\pm D$ *colonnes entières incongrues deux à deux, mais à l'une ou à l'autre desquelles toute colonne imaginable est congrue;* plus brièvement, *il y a* $\pm D$ *restes incongrus et pas davantage.*

I. Pour $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, les $\pm b_2 = \pm D$ colonnes

$$(10)\qquad \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases},\quad \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},\quad \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases},\quad \ldots,\quad \begin{cases} 0 \\ \pm D - 1 \end{cases}$$

sont évidemment celles dont il faut prouver l'existence.

II. Si $a_1 = 1$, $a_2 \neq 0$, le système des équations (8) équivaut visiblement à celui-ci

$$\begin{cases} k_1 = p + b_1 q, \\ -a_2 k_1 + k_2 = 0.p + Dq, \end{cases}$$

qui rentre dans le cas ci-dessus (I), l'abaque

$$\left\{ \begin{matrix} 1, & b_1 \\ 0, & D \end{matrix} \right.$$

des coefficients de p, q étant toujours de déterminant D.

Cela posé, et suivant ce dernier abaque, les colonnes

$$\left\{ \begin{matrix} K'_1 \\ K'_2 \end{matrix} \right., \quad \left\{ \begin{matrix} K''_1 \\ K''_2 \end{matrix} \right.$$

sont congrues ou incongrues en même temps que les colonnes (9) suivant (6), pourvu que leurs éléments aux unes et aux autres soient liés par les relations

$$\left\{ \begin{aligned} k'_1 &= K'_1, \\ -a_2 k'_1 + k'_2 &= K'_2, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} k''_1 &= K''_1, \\ -a_2 k''_1 + k''_2 &= K''_2. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte évidemment (I) que, suivant l'abaque (6), les $\pm D$ colonnes (10) sont toujours incongrues entre elles, mais que toute autre colonne imaginable est congrue à l'une d'elles convenablement choisie.

III. Si a_1, b_1 sont quelconques, mais premiersentre eux, nous appellerons α_1, α_2 une paire de solutions entières et nécessairement premières entre elles, de l'équation toujours possible

$$(11) \qquad a_1 \alpha_1 + b_1 \alpha_2 = 1,$$

puis β_1, β_2 une paire semblable pour l'équation possible aussi

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 1.$$

A cause de cette relation, et quels que soient p, q, on peut toujours poser

$$\left\{ \begin{aligned} p &= \alpha_1 P + \beta_1 Q, \\ q &= \alpha_2 P + \beta_2 Q, \end{aligned} \right.$$

car ces formules simultanées sont forcément résolubles en nombres entiers par rapport à P, Q. Cette double substitution effectuée dans les relations (8) les change en

$$\left\{ \begin{aligned} k_1 &= A_1 P + B_1 Q, \\ k_2 &= A_2 P + B_2 Q, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$a_1\alpha_1 + b_1\alpha_2 = A_1, \qquad a_1\beta_1 + b_1\beta_2 = B_1,$$
$$a_2\alpha_1 + b_2\alpha_2 = A_2, \qquad a_2\beta_1 + b_2\beta_2 = B_2,$$

et il est évident : 1° que les divisions de la colonne (7) par les abaques (6) et

$$(13) \qquad \begin{cases} A_1, & B_1 \\ A_2, & B_2 \end{cases}$$

sont en même temps possibles ou impossibles, que par suite deux mêmes colonnes données sont simultanément soit congrues, soit incongrues, suivant l'un et l'autre; 2° que le déterminant de (13), produit de celui de (6) par le premier membre de (12), se réduit à D. Comme, d'autre part, on a $A_1 = 1$ à cause de (11), on rentre dans l'un des cas précédents (I), (II), et les colonnes (10) sont encore celles dont il s'agissait de prouver l'existence.

IV. Si enfin le plus grand commun diviseur d de a_1, b_1 est quelconque, appelons $'a_1$, $'b_1$, $'D$ les quotients $\frac{a_1}{d}$, $\frac{b_1}{d}$, $\frac{D}{d}$.

Pour que la colonne (7) soit divisible par (6), il faut évidemment et il suffit que $'k_1 = \frac{k_1}{d}$ soit un entier, et que

$$\begin{cases} 'k_1 \\ k_2 \end{cases}$$

soit divisible par

$$\begin{cases} 'a_1, & 'b_1 \\ a_2, & b_2 \end{cases},$$

abaque de déterminant $'D$, dans la première ligne duquel les éléments sont premiers entre eux. De là et de l'alinéa précédent, on conclut aisément que, suivant (6), les $\pm d'D = \pm D$ colonnes

$$\begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}, \quad \ldots, \quad \begin{cases} d-1 \\ 0 \end{cases},$$
$$\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}, \quad \ldots, \quad \begin{cases} d-1 \\ 1 \end{cases},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\begin{cases} 0 \\ \pm 'D - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 1 \\ \pm 'D - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 \\ \pm 'D - 1 \end{cases}, \quad \ldots, \quad \begin{cases} d-1 \\ \pm 'D - 1 \end{cases}$$

sont deux à deux incongrues, mais que leur ensemble en contient toujours une congrue à toute autre colonne donnée.

312. *Il y a précisément* $\pm \nabla$ *nœuds du réseau construit sur les périodes simples* Π, Ω, *qui tombent dans chaque maille du réseau construit sur les périodes composées* Π_1, Ω_1 *du n°* 310.

Suivant l'abaque-diviseur

(14) $$\begin{cases} \alpha, & \gamma \\ \beta, & \delta \end{cases}$$

de déterminant ∇, soient

(15) $$\begin{cases} m' \\ n' \end{cases}, \quad \ldots, \quad \begin{cases} m^{(\pm\nabla)} \\ n^{(\pm\nabla)} \end{cases}$$

les $\pm \nabla$ restes incongrus (311), et appelons encore x_0 un nœud quelconque du réseau simple. Deux quelconques des $\pm \nabla$ nœuds de ce réseau

(16) $$x_0 + m'\Pi + n'\Omega, \quad x_0 + m''\Pi + n''\Omega, \quad \ldots$$

sont incongrus selon le couple des périodes composées Π_1, Ω_1; car si les deux premiers, par exemple, étaient congrus, on aurait

$$(m'' - m')\Pi + (n'' - n')\Omega = p_1\Pi_1 + q_1\Omega_1,$$

p_1, q_1 désignant deux entiers. En substituant à Π_1, Ω_1 les seconds membres des égalités (3), il viendrait ainsi

(17) $$[m'' - m' - (\alpha p_1 + \gamma q_1)]\Pi + [n'' - n' - (\beta p_1 + \delta q_1)]\Omega = 0,$$

d'où (257)

$$\begin{cases} \alpha p_1 + \gamma q_1 = m'' - m', \\ \beta p_1 + \delta q_1 = n'' - n', \end{cases}$$

parce que, dans l'égalité linéaire et homogène (17) entre Π, Ω, ces quantités ont un moment $\mathfrak{M} \neq 0$, et sont multipliées par des coefficients réels. Les deux premières colonnes (15) seraient donc congrues suivant l'abaque (14), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Mais tout nœud $x_0 + M\Pi + N\Omega$ du réseau simple est congru suivant le couple composé (Π_1, Ω_1), au nœud $x_0 + m^{(i)}\Pi + n^{(i)}\Omega$ du groupe (16) qui correspond à une colonne $\begin{cases} m^{(i)} \\ n^{(i)} \end{cases}$ congrue à $\begin{cases} M \\ N \end{cases}$ suivant l'abaque (14); on s'en assure par le même raisonnement.

Enfin tout point congru selon le couple composé (Π_1, Ω_1) à un nœud du réseau simple est encore un nœud de ce même réseau.

En appelant donc $x_1, x_2, \ldots, x_{\pm\nabla}$ les points qui, dans une même maille donnée du réseau composé, sont respectivement congrus aux points (16) selon le couple composé (Π_1, Ω_1) (308), les points $x_1, x_2, \ldots, x_{\pm\nabla}$ sont aussi des nœuds du réseau simple, tous différents les uns des autres puisqu'ils sont incongrus selon (Π_1, Ω_1), et tout nœud du réseau simple étant congru à quelqu'un d'entre eux selon (Π_1, Ω_1) coïncide avec lui ou sinon tombe à l'extérieur de la maille considérée.

313. *Pour que le couple* (Π, Ω) *soit lui-même composé de* (Π_1, Ω_1), *il est nécessaire que* ∇ *se réduise à* ± 1; car le moment du second couple, qui est toujours un multiple de celui du premier, doit alors en être à la fois un sous-multiple, ce qui exige $\mathfrak{M}_1 = \pm \mathfrak{M}$, d'où $\nabla = \pm 1$ à cause de la relation (4). *Cette condition est d'ailleurs suffisante,* parce que les égalités (3) donnent inversement

$$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \frac{\delta}{\nabla}\,\Pi_1 + \frac{-\beta}{\nabla}\,\Omega_1, \\ \Omega &= \frac{-\gamma}{\nabla}\,\Pi_1 + \frac{\alpha}{\nabla}\,\Omega_1, \end{aligned}\right.$$

où les multiplicateurs de Π_1, Ω_1 sont nécessairement entiers, à cause de $\nabla = \pm 1$.

Deux couples analogues à (Π, Ω), (Π_1, Ω_1), dont chacun est composé de l'autre, sont dits *équivalents;* les mailles des réseaux correspondants ont des aires égales, bien qu'en général elles ne soient pas superposables; une maille de l'un contient un seul nœud de l'autre (312), et les deux réseaux ont les mêmes nœuds s'ils en ont un seul commun.

Un couple donné (Π, Ω) a une infinité de couples équivalents qui sont évidemment fournis par les formules (3), si l'on y prend pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tous les systèmes de solutions entières de l'équation indéterminée

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Parmi ces couples équivalents, on remarquera $(\Pi, -\Omega)$, $(-\Pi, \Omega)$, $(-\Pi, -\Omega)$.

314. Un couple de périodes est dit *élémentaire*, s'il n'est composé d'aucun autre de moment numériquement moindre.

Toute fonction bipériodique $f(x)$ possède quelque couple de périodes élémentaires.

S'il n'en était pas ainsi, on aurait, à partir du couple donné (Π, Ω), de moment $\mathfrak{M}$, une suite illimitée d'autres couples, de moments $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'', \ldots, \mathfrak{M}^{(i)}, \ldots$, composés chacun du suivant à l'aide de systèmes de multiplicateurs entiers dont les déterminants $\nabla', \nabla'', \ldots, \nabla^{(i)}, \ldots$ seraient tous > 1 en valeurs absolues.

Les relations (4)

$$\mathfrak{M} = \nabla' \mathfrak{M}', \qquad \mathfrak{M}' = \nabla'' \mathfrak{M}'', \qquad \ldots$$

donneraient

$$\mathfrak{M} = \nabla' \nabla'' \ldots \nabla^{(i)} \mathfrak{M}^{(i)},$$

et les périodes Π, Ω résulteraient ainsi de la composition des périodes $\Pi^{(i)}, \Omega^{(i)}$ par un système de multiplicateurs dont le déterminant $\Theta_i = \nabla' \nabla'' \ldots \nabla^{(i)}$ serait numériquement aussi grand qu'on le voudrait.

En appelant maintenant x_0 quelque valeur de x rendant $f(x)$ olotrope, l'équation $f(x) - f(x_0) = 0$ admet pour racines au moins tous les nœuds du réseau construit sur $\Pi^{(i)}$, $\Omega^{(i)}$, à partir du premier nœud x_0. Et, comme $\pm \Theta_i$ de ces nœuds tombent dans une même maille $[\mathfrak{M}]$ d'un réseau construit sur Π, Ω (312), cette équation aurait dans l'aire limitée $[\mathfrak{M}]$ des racines distinctes en nombre au moins égal à $\pm \Theta_i$, c'est-à-dire illimité. Or, c'est impossible (31), puisque $f(x)$ y est méromorphe et ne se réduit pas à une constante.

Les périodes des fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$, considérées aux nos 304, 305, sont évidemment élémentaires.

315. En composant un couple de périodes élémentaires, avec des multiplicateurs de déterminant ± 1, on obtient une infinité d'autres couples qui sont également élémentaires.

Un réseau, une maille sont *élémentaires*, quand ils sont construits sur des périodes élémentaires.

316. *Toute période d'une fonction méromorphe bipério-*

dique est composée d'un couple donné quelconque de périodes élémentaires.

Soient $f(x)$ la fonction considérée, $\Pi = \Pi' + i\Pi''$, $\Omega = \Omega' + i\Omega''$ un de ses couples de périodes élémentaires, et $\Upsilon = \Upsilon' + i\Upsilon''$ une période quelconque de la même fonction. Appelons $p_1, p_2, \ldots$ une suite indéfinie d'entiers inégaux, puis $\rho_1, \rho_2, \ldots$ les quantités qui, dans une même maille $[\Pi\Omega]$, sont congrues à $p_1\Upsilon, p_2\Upsilon, \ldots$ respectivement (308).

Il ne peut arriver que $\rho_1, \rho_2, \ldots$ soient toutes inégales; car autrement, et à cause de

$$f(x) = f(x + p\Upsilon) = f(x + m\Pi + n\Omega + \rho) = f(x + \rho),$$

où m, n sont des entiers convenables, l'équation $f(x) - f(x_0) = 0$, x_0 n'étant pas un infini de $f(x)$, aurait pour racines les quantités distinctes $x_0 + \rho$ qui sont en nombre illimité et tombent toutes dans l'aire limitée que constitue la maille de sommets x_0, $x_0 + \Pi$, $x_0 + \Omega$, $x_0 + \Pi + \Omega$; or c'est impossible, puisque la fonction $f(x) - f(x_0)$ est méromorphe dans cette aire, sans dégénérer en une constante.

Il existe donc deux indices i, j donnant $\rho_i = \rho_j$, c'est-à-dire

$$p_i\Upsilon - m_i\Pi - n_i\Omega = p_j\Upsilon - m_j\Pi - n_j\Omega,$$

ou bien

$$-(m_i - m_j)\Pi - (n_i - n_j)\Omega + (p_i - p_j)\Upsilon = 0.$$

En d'autres termes, l'équation indéterminée

$$\Pi m + \Omega n + \Upsilon p = 0,$$

résolue par rapport à m, n, p, admet quelque système de solutions réelles et entières, où la valeur de p n'est pas nulle, ni par suite celles de m, n à la fois, à cause de $\Upsilon \neq 0$.

Soient

$$\varpi, \quad \omega, \quad \upsilon (\neq 0)$$

ces solutions entières, débarrassées de tout diviseur commun > 1. En vertu de la théorie générale des équations linéaires à coefficients entiers ([1]), l'équation de ce genre en λ, μ, ν,

$$\varpi\lambda + \omega\mu + \upsilon\nu = 0, \tag{18}$$

([1]) *Voir* mon Mémoire intitulé *Solution du problème général de l'Analyse indéterminée du premier degré* (*Annales sc. de l'École Normale sup.*, mars 1883).

admet quelque paire de systèmes de solutions entières, dans le tableau desquels

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1 \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2 \end{cases},$$

les déterminants des éléments laissés par la suppression successive des colonnes 1, 2, 3 sont égaux à ϖ, ω, υ, respectivement.

Comme on a

$$(20)\qquad \varpi\Pi + \omega\Omega + \upsilon\Upsilon = 0,$$

l'équation (18) admet encore le système (Π, Ω, Υ) de solutions (non entières), outre ceux du tableau (19). Mais ces derniers étant distincts, on a forcément, en vertu de la théorie générale des équations linéaires (*voir* par exemple l'opuscule cité p. 339)

$$(21)\qquad \begin{cases} \Pi = \lambda_1 u + \lambda_2 v, \\ \Omega = \mu_1 u + \mu_2 v, \\ \Upsilon = \nu_1 u + \nu_2 v, \end{cases}$$

u, v désignant certaines quantités (imaginaires) convenables.

Comme les déterminants ϖ, ω, υ des trois paires de colonnes du tableau (19) associées deux à deux n'ont aucun diviseur commun, il résulte encore des principes généraux de l'Analyse indéterminée, que les équations à coefficients entiers

$$\begin{cases} \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z = 1, \\ \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z = 0 \end{cases}$$

admettent quelque système de solutions entières λ, μ, ν, et l'addition membre à membre des relations (21), multipliées par ces quantités respectivement, donne

$$u = \lambda\Pi + \mu\Omega + \nu\Upsilon,$$

en vertu de quoi u est aussi une période de $f(x)$. On prouverait de même que v en est une autre.

Or ces deux nouvelles périodes u, v sont élémentaires, puisque Π, Ω, qui sont élémentaires aussi, en sont composées d'après les deux premières équations (21). On a donc $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \upsilon = \pm 1$, ce qui réduit la relation (20) à

$$\Upsilon = \mp(\varpi\Pi + \omega\Omega),$$

et Υ est bien composée de Π, Ω.

317. En particulier, *deux couples de périodes élémentaires sont toujours équivalents* (313); car chacun d'eux est composé de l'autre, d'après ce qui vient d'être dit.

318. *Aucune fonction d'une seule variable, indéfiniment méromorphe, ne peut (sauf dégénérescence en une constante) avoir trois périodes irréductibles à d'autres en moindre nombre.*

Car si deux de ces périodes ont un moment nul, la fonction dont il s'agit, considérée comme unipériodique, en admet une autre de moindre module, dont elles sont toutes deux composées (261).

Si le moment de ces deux premières périodes n'est pas nul, la fonction considérée comme bipériodique possède nécessairement quelque couple élémentaire (314) dont la troisième est composée (316).

319. *Si $f(x)$ est une fonction bipériodique, cas auquel $f'(x)$, $f''(x)$, ... jouissent de la même propriété* (254), *toutes ces fonctions ont les mêmes couples de périodes élémentaires.*

Soient (Π, Ω) un couple de périodes élémentaires de $f(x)$, par suite de périodes, élémentaires ou non, de $f'(x)$, et (ϖ, ω) quelque couple de périodes élémentaires de cette dérivée. De

$$f'(x+\varpi) = f'(x), \qquad f'(x+\omega) = f'(x),$$

on tire, en intégrant et appelant C, D certaines constantes,

$$f(x+\varpi) = f(x) + C, \qquad f(x+\omega) = f(x) + D,$$

et plus généralement, en appelant m, n des entiers quelconques,

$$f(x + m\varpi + n\omega) = f(x) + mC + nD. \tag{22}$$

Comme Π, Ω, périodes de $f'(x)$, sont composées de ses périodes élémentaires ϖ, ω (316), on a

$$\begin{cases} \Pi = \alpha\varpi + \beta\omega, \\ \Omega = \gamma\varpi + \delta\omega, \end{cases}$$

les multiplicateurs α, β, γ, δ étant entiers et de déterminant $\neq 0$.

Cela posé, l'attribution successive à m, n, dans l'identité (22),

des couples de valeurs (α, β), (γ, δ), donne, à cause des dernières égalités écrites,

$$f(x+\Pi) = f(x) + \alpha C + \beta D,$$
$$f(x+\Omega) = f(x) + \gamma C + \delta D,$$

puis

$$\begin{cases} \alpha C + \beta D = 0, \\ \gamma C + \delta D = 0, \end{cases}$$

parce que Π, Ω sont des périodes de $f(x)$, puis finalement $C = D = 0$, à cause de $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

L'identité (22) montre ainsi que ϖ, ω sont des périodes de $f(x)$; elles sont donc élémentaires pour cette fonction, comme pour $f'(x)$, puisque les périodes élémentaires Π, Ω en sont composées. Même raisonnement pour $f'(x)$ et $f''(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$, etc.

Propriétés générales d'une fonction bipériodique indéfiniment méromorphe.

320. *Si $f(x)$ est une fonction bipériodique indéfiniment méromorphe, la résolution, par rapport à x, de l'équation*

$$f(x) - u = 0 \tag{1}$$

fournit, dans chacune des mailles d'un même réseau, des racines numériquement distinctes, dont la somme des degrés de multiplicité est au moins = 1, et conserve, quelle que soit u, une certaine valeur constante.

En outre, la somme dont il s'agit a des valeurs égales pour les équations (1) *et*

$$\frac{1}{f(x)} = 0. \tag{2}$$

I. Tout d'abord, et pour une même valeur particulière u_0 attribuée à u dans l'équation (1), il est évident :

1° *Que ces sommes sont limitées;* car, s'il en était autrement, $f(x) - u_0$, ou $\frac{1}{f(x)}$, se réduiraient à des constantes (31), et par suite aussi $f(x)$, contrairement à l'hypothèse, puisque cette fonction est indéfiniment méromorphe, et que chaque maille constitue une aire limitée;

2° *Que la valeur de chacune est la même pour toutes les*

mailles, parce que $f(x)$ a pour périodes les deux quantités sur lesquelles le réseau a été construit (**252**), (**309**).

II. Nous observerons ensuite que *toute fonction implicite* x *de* u, *racine variable de l'équation* (1) *s'il en existe, peut être calculée indéfiniment par cheminement, en faisant des pas d'amplitude au moins égale à quelque quantité positive invariable* δ, *et cela à l'aide de développements soit olotropes, soit rhizomorphes* (**153**), *mais alors dépourvus de termes à exposants négatifs*, qu'en conséquence, *tout cheminement limité laisse cette racine essentiellement finie.*

Soient

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\gamma$$

les racines de l'équation (2), infinis de $f(x)$, contenues dans une maille donnée du réseau, lesquelles sont en nombre limité (I, 1°) et

$$(\alpha_1), \quad (\alpha_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_\gamma) \tag{3}$$

des aires délimitées autour de ces points avec des dimensions assez faibles pour donner $\operatorname{mod} f(x) > R > 0$, chaque fois que x tombe dans l'une ou dans l'autre. Soit encore $(\mathfrak{M})$ la partie de la maille considérée, que laisse l'ablation des aires (3).

Dans l'aire limitée $(\mathfrak{M})$, $f(x)$ est olotrope, par suite sa valeur reste dans une aire également limitée; de plus l'équation $f'(x) = 0$ n'y possède que des racines en nombre limité.

Aussi longtemps donc que la marche de u ne fait pas sortir x de l'aire $(\mathfrak{M})$, l'équation (1) remplit, soit les conditions sous lesquelles subsiste le théorème général du n° **307***, soit au moins celles assurant la validité des conclusions formulées aux n^{os} **141** et suiv.; les développements successifs (olotropes ou rhizomorphes) de x ne contiennent aucune puissance à exposant négatif des accroissements de u, et il est visible qu'aux rayons de convergence de tous ces développements, on peut assigner une même limite inférieure positive δ'.

Dans les aires (3), $\frac{1}{f(x)}$ jouit des mêmes propriétés que $f(x)$ dans $(\mathfrak{M})$; chaque racine x de l'équation (1) écrite

$$u\left(\frac{1}{f(x)}\right) - 1 = 0$$

est donc toujours susceptible aussi de pareils développements dont les rayons de convergence sont tous égaux au moins à quelque autre quantité positive δ'', cela maintenant pour toutes les valeurs de u qui, tombant dans une aire limitée quelconque, amènent x dans l'une ou l'autre de ces aires (3).

Si donc on nomme δ une troisième quantité positive, simultanément inférieure à δ', δ'', le point en question est vrai tant que la valeur de x tombe dans la maille considérée, puisque la réunion des aires ($\mathfrak{M}$) et (3) reconstitue intégralement celle-ci. Il l'est donc pour tout le plan; car, à cause de la périodicité de $f(x)$, la quantité δ a la même valeur pour toutes les mailles du réseau.

III. Observons enfin que *l'équation* (1) *possède au moins une de ces racines dont nous venons de parler*. Car, en appelant x_0 quelque valeur de x non égale à un infini de $f(x)$ et posant $u_0 = f(x_0)$, cette équation, satisfaite numériquement pour $u = u_0$, $x = x_0$, admet certainement pour racine, quelque fonction implicite x de u, tendant vers x_0 quand u tend vers u_0 (144).

IV. Soient maintenant

$$(4) \qquad x_1^{(0)},\quad x_2^{(0)},\quad \ldots,\quad x_{g_0}^{(0)}$$

des quantités quelconques congrues à toutes les racines simples ou multiples, mais inégales, que l'équation numérique

$$f(x) - u_0 = 0$$

possède dans une maille donnée, et

$$(5) \qquad x_1,\quad x_2,\quad \ldots,\quad x_g$$

toutes les racines de l'équation (1), auxquelles conduit un cheminement commencé en u_0 avec les valeurs initiales (4). Cette opération qui laisse finies ces diverses racines (II), peut faire varier les degrés de multiplicité de quelques-unes, ainsi que le nombre de celles qui sont numériquement inégales; mais, en vertu du *Principe de la conservation du nombre des racines* (168), elle laisse invariable la somme de leurs degrés de multiplicité.

Or les racines que l'équation (1) possède dans la maille considérée sont évidemment toutes congrues aux racines (5); de plus elles sont caractérisées par les mêmes degrés de multiplicité, à

cause de la périodicité de $f(x)$ (**252**). La somme de ces degrés conserve donc la valeur constante dont nous venons de parler.

V. Comme $\frac{1}{f(x)}$ est une fonction méromorphe aux mêmes périodes que $f(x)$ (**255**), et qui est olotrope quand $f(x)$ est infinie (**42**), la somme, pour une maille donnée, des degrés de multiplicité de l'équation (2) est égale à sa valeur pour l'équation

$$\frac{1}{f(x)} - v = 0, \tag{6}$$

v n'étant pas nulle, ou ce qui revient au même pour l'équation (1) en y prenant $u = \frac{1}{v}$.

VI. En comptant une racine m^{uple} pour m racines simples, ce théorème s'énonce plus brièvement en ces termes : *Quelles que soient u et la maille considérée (dans un même réseau), l'équation (1) y offre des racines en nombre invariable.*

321. Les racines des équations

$$f(x) = 0, \qquad \frac{1}{f(x)} = 0$$

sont respectivement les *zéros* et les *infinis* de $f(x)$. En comptant chacun d'eux pour autant de simples qu'il y a d'unités dans son degré de multiplicité, le théorème précédent montre que, ***dans chaque maille, les uns et les autres sont en nombres égaux,*** et que ***ce nombre commun est le même pour toutes les mailles d'un réseau construit sur deux périodes données quelconques.***

Cet énoncé comprend celui du théorème en question, et on le lui substitue souvent pour plus de commodité ; car $f(x)$ et $f(x) - u$ sont deux fonctions bipériodiques de x, aux mêmes périodes, qui ont évidemment les mêmes infinis; si donc dans chaque maille les nombres de leurs zéros sont égaux respectivement à ceux de leurs infinis, les zéros de la seconde, c'est-à-dire les racines de l'équation (1), ne peuvent manquer de rester en nombre constant.

Ce nombre, de la grandeur duquel dépendent les propriétés les plus importantes de $f(x)$, se nomme l'*ordre* de cette fonction,

relatif aux périodes sur lesquelles a été construit le réseau considéré.

Il ne peut [sauf le cas où $f(x)$ dégénérerait en une constante] s'abaisser au-dessous de 1 (320, III), ni même au-dessous de 2, comme nous le verrons bientôt (326, *inf.*).

322. *Les ordres* M, M_1 *de* $f(x)$, *relatifs aux couples de périodes* (Π, Ω), (Π_1, Ω_1), *ce dernier étant composé du premier avec des multiplicateurs de déterminant* ∇ (310), *sont liés par la relation*

$$M_1 = \pm \nabla M.$$

Une racine donnée de l'équation (1) et toutes celles qui lui sont congrues suivant le couple (Π, Ω) ont des degrés de multiplicité égaux (252); elles coïncident avec les nœuds d'un certain réseau construit sur ces périodes; en outre, $\pm \nabla$ de ces nœuds tombent précisément à l'intérieur d'une maille donnée de tout réseau construit sur Π_1, Ω_1 (312).

Cette observation répétée pour toutes les racines de l'équation (1), que contient une même maille du réseau simple, met en évidence l'exactitude de notre théorème.

En particulier, les ordres de $f(x)$ relatifs à tous ses couples de périodes élémentaires (314) ont une même valeur (317), qui est *minimum,* et qu'il y a tout spécialement à considérer; on la nomme l'*ordre* proprement dit ou *absolu* de cette fonction.

323. *Les fonctions* $E(x)$, $E_\infty(x)$ *étudiées aux n*os 302 *et suivants, sont du second ordre.*

Car leurs périodes Π, Ω sont élémentaires (314), et, d'après les nos 304, V et 305, I, chaque maille du réseau construit sur elles contient deux infinis simples pour les premières, un infini double pour les dernières.

Elles sont les fonctions bipériodiques les plus simples, parce qu'il n'en existe aucune qui soit du premier ordre (326, *inf.*).

324. *Non seulement* (320), *la somme des degrés de multiplicité des racines variables* (5) *de l'équation* (1) *conserve, quelle que soit u, une valeur constante, mais encore la somme*

$$(7) \qquad I(u) = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_g x_g$$

des produits de leurs valeurs par celles de leurs degrés de multiplicité $m_1, \ldots, m_g$ (variables aussi quelquefois), est une fonction de u qui se réduit identiquement à une constante.

I. *La fonction* $I(u)$ *est indéfiniment olotrope.*

La théorie générale des fonctions implicites (307*) rend ce point évident pour chacune des racines (5) considérées individuellement, par suite pour leur fonction composée linéaire $I(u)$; ceci du moins est vrai aussi longtemps qu'aucune de ces racines n'annule $f'(x)$, c'est-à-dire que u n'atteint une des valeurs *cardinales* de $f(x)$, nous voulons dire, comme aux nos 304, IV et 305, II, une de celles données à cette fonction par les racines de l'équation numérique

$$f'(x) = 0,$$

valeurs qui, à cause de l'identité des périodes de $f(x)$, $f'(x)$ (319), sont en nombre au plus égal à l'ordre de $f'(x)$, partant limité.

Supposons maintenant que u atteigne une semblable valeur $u^{(0)}$, pour laquelle la valeur correspondante $x_i^{(0)}$ de l'une des fonctions implicites (5) soit racine multiple de l'équation $f(x) - u^{(0)} = 0$. Pour des modules suffisamment petits de la différence $u - u_0$, celles des quantités (5) dont les excès sur $x_i^{(0)}$ sont infiniment petits avec elle se partagent en systèmes circulaires dans chacun desquels elles ont les formes

$$(8) \qquad x_i^{(0)} + \psi_1, \quad x_i^{(0)} + \psi_2, \quad \ldots, \quad x_i^{(0)} + \psi_\nu,$$

toutes avec un même degré de multiplicité μ, où $\psi_1, \ldots, \psi_\nu$ représentent les ν séries rhizomorphes dans lesquelles se change quelque même composante $\Psi(t)$, olotrope et nulle en $t = 0$, par la substitution à t des ν déterminations du radical $(u - u^{(0)})^{\frac{1}{\nu}}$ (144).

La somme des racines (8) multipliées par leur degré de multiplicité commun μ est donc

$$(9) \qquad \mu\nu x_i^{(0)} + \mu(\psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_\nu),$$

c'est-à-dire une fonction de u qui est olotrope en u_0. Effectivement, dans l'expression entre parenthèses, le coefficient du terme en $(u - u^{(0)})^{\frac{\varpi}{\nu}}$ contient évidemment comme facteur la somme des

puissances $\varpi^{\text{ièmes}}$ des ν racines $\nu^{\text{ièmes}}$ de l'unité, o par suite toutes les fois que $\frac{\varpi}{\nu}$ n'est pas un entier (115).

L'expression (7) est donc olotrope, même pour ces valeurs critiques $u^{(0)}$ de u, puisqu'elle se partage toujours ainsi en une somme d'autres analogues à (9) qui le sont toutes.

II. *On peut, quelle que soit* u, *assigner une même limite supérieure à* $\operatorname{mod} I(u)$.

Pour $\operatorname{mod} u \leqq R$, quantité positive donnée quelconque, la chose est évidente puisque $I(u)$, olotrope dans tout le plan (I), l'est en particulier dans un cercle de rayon R ayant l'origine pour centre (180*).

Pour $\operatorname{mod} u \geqq R$, on a $\operatorname{mod} v \leqq \frac{1}{R}$, si l'on prend $v = \frac{1}{u}$.

Comme $\frac{1}{f(x)}$ est aussi méromorphe et bipériodique, on peut de même assigner, pour $\operatorname{mod} v \leqq \frac{1}{R}$, une même limite supérieure au module de $J(v)$, somme analogue à $I(u)$ pour l'équation (6).

Mais si l'on prend $u = \frac{1}{v}$, on a $\operatorname{mod} u \geqq R$, et $I(u) = J(v)$ évidemment, pourvu, bien entendu, qu'en résolvant l'équation (6) on ait pris les quantités (4) pour valeurs initiales de x correspondant à $v = v_0 = \frac{1}{u_0}$, parce que cette équation peut s'écrire aussi bien $f(x) - \frac{1}{v} = 0$.

Si donc on nomme L′, L″ des limites supérieures, l'une de $\operatorname{mod} I(u)$ pour $\operatorname{mod} u \leqq R$, l'autre de $\operatorname{mod} J(v)$ pour $\operatorname{mod} v \leqq \frac{1}{R}$, et L une quantité supérieure à ces deux-ci, on aura $\operatorname{mod} I(u) < L$, aussi bien pour $\operatorname{mod} u \geqq R$ que pour $\operatorname{mod} u \leqq R$.

III. Puisque $I(u)$ est indéfiniment olotrope et ne peut être rendue infinie par aucune valeur de u soit finie, soit infinie, elle se réduit forcément à une constante (8).

325. Des racines quelconques de l'équation (1), choisies de manière à être incongrues deux à deux, mais congrues dans leur ensemble à toutes les autres, ne diffèrent jamais des racines (5), que par des multiples des périodes; en les leur substituant dans

l'expression $I(u)$, on ne fait qu'augmenter celle-ci d'une somme de semblables multiples, ce qui la laisse encore indépendante de u. *Une somme de pareilles racines multipliées par leurs degrés de multiplicité, quelles qu'elles soient et quelle que soit u, conserve donc toujours une valeur constante, à des multiples des périodes près.*

La considération de l'équation (6) montre que *cette valeur se conserve aussi pour les infinis de $f(x)$*. En particulier : *dans une même maille, la somme des zéros de $f(x)$ multipliés par leurs degrés de multiplicité est toujours congrue à la même somme pour ses infinis.*

Ces diverses propositions comprennent, comme cas particuliers, les propriétés de la constante supplémentaire S des fonctions du second ordre $E(x)$, $E_\infty(x)$ (304), (305).

326. *Il n'existe aucune fonction méromorphe, bipériodique, et ne dégénérant pas en une constante, qui soit du premier ordre seulement.*

Car pour une pareille fonction le groupe (5) des racines de l'équation (1) ne contiendrait qu'un terme, et celui-ci serait essentiellement variable. L'expression $I(u)$ ne pourrait donc pas conserver une valeur constante (324).

327. *Pour établir qu'une fonction donnée d'une seule variable se réduit à une constante, il suffit donc de prouver qu'elle est indéfiniment méromorphe, bipériodique, et que son ordre est* 0 (320) *ou* 1 (326), de prouver, par exemple, que dans quelque maille d'un réseau, elle ne peut pas avoir plus d'un zéro (simple) ou d'un infini (simple).

328. *Dans chaque maille de tout réseau, le résidu intégral d'une fonction bipériodique méromorphe se réduit à* 0 (56).

Ce résidu multiplié par $2\pi i$ reproduit effectivement l'intégrale $\int f(x)\,dx$ prise en parcourant une fois dans le sens de rotation direct le périmètre du parallélogramme qui constitue la maille considérée (189). Comme $f(x)$ est identique à elle-même aux points congrus de deux côtés opposés de ce parallélogramme, et

que ces côtés sont nécessairement parcourus dans des directions inversement parallèles, il est visible que les parties de l'intégrale afférentes à deux côtés opposés sont égales, mais de signes contraires; l'intégrale est donc nulle, ainsi que le résidu (*Cf.* **267**).

329. Le raisonnement qui précède ne laisse rien à désirer en solidité, en élégance et en brièveté; il a néanmoins le grave défaut de laisser absolument isolé de la théorie générale le fait important dont il s'agit. Mais la démonstration suivante, dont nous indiquerons seulement le principe, le rattache étroitement aux autres propriétés des fonctions bipériodiques.

Si α est un infini μ^{uple} de $f(x)$, on a dans son voisinage

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(x-\alpha)^\mu},$$

$\varphi(x)$ étant olotrope et non nulle en $x=\alpha$, et le résidu correspondant ε est $\frac{1}{1.2\ldots(\mu-1)}\varphi^{(\mu-1)}(\alpha)$ (**56**).

L'inverse arithmétique de $f(x)$ y est olotrope avec α pour zéro μ^{uple}; on en conclut facilement (**141** *et suiv.*) que l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-\alpha)^\mu}{\varphi(x)} = v,$$

résolue par rapport à x a, pour v infiniment petite, μ racines infiniment voisines de α et de la forme

$$(10) \qquad x = \alpha + a_1 v^{\frac{1}{\mu}} + a_2 v^{\frac{2}{\mu}} + \ldots,$$

ce qui, en posant $v = t^\mu$, donne

$$x = \alpha + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots,$$

puis l'identité

$$\varphi(\alpha + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots) = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + \ldots)^\mu.$$

On en conclut d'abord $\varphi(\alpha) = a_1^\mu$, d'où $a_1 \neq 0$, quel que soit μ; on en conclut ensuite, pour $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ successivement,

$$\varphi(\alpha) = 1a_1, \qquad \varphi'(\alpha) = 1.2a_2, \qquad \varphi''(\alpha) = 1.2.3a_3, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varepsilon = 1a_1, \qquad 2a_2, \qquad 3a_3, \qquad \ldots,$$

et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ne sont pas autre chose que les coefficients de v dans la série (10) construite pour $\mu = 1, 2, 3, \ldots$.

Le résidu intégral se trouve être ainsi le coefficient de v dans le développement, par la formule de Maclaurin, de l'expression $J(v)$ du n° 324, II. Il se réduit donc à zéro, comme les coefficients de toutes les autres puissances de v, puisque $J(v) = I(u)$ n'est qu'une simple constante.

Relations diverses entre des fonctions bipériodiques ayant en commun un même couple de périodes.

330. Voici d'abord une extension de l'observation générale du n° 255.

Si les coefficients de l'équation entière en U,

$$(1) \qquad U^m + f_1(x)U^{m-1} + \ldots + f_{m-1}(x)U + f_m(x) = 0,$$

sont des fonctions toutes bipériodiques (indéfiniment méromorphes), admettant un même couple de périodes (Π, Ω), *et si cette équation offre quelques racines, fonctions indéfiniment méromorphes de x, chacune de celles-ci admet un couple de périodes communes à toutes les fonctions $f_1(x), \ldots, f_m(x)$.*

Comme le changement de x en $x + \Pi$ n'altère aucun des coefficients de l'équation (1), les racines méromorphes de celle-ci se permutent simplement entre elles, et, par suite, se partagent en certains groupes, dans chacun desquels le changement considéré opère une simple permutation circulaire.

Supposons donc que l'addition de Π à x change ainsi les p racines

$$F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots, \quad F_p(x)$$

en

$$F_2(x), \quad F_3(x), \quad \ldots, \quad F_1(x),$$

respectivement. Les identités

$$F_1(x+\Pi) = F_2(x), \qquad F_2(x+\Pi) = F_3(x), \qquad \ldots, \qquad F_p(x+\Pi) = F_1(x)$$

entraînent celle-ci

$$F_1(x + p\Pi) = F_1(x),$$

en vertu de laquelle toute racine $F_1(x)$ appartenant au groupe

considéré admet $p\Pi$ pour période; et l'on prouvera de même, que $F_1(x)$ admet une autre période de la forme $q\Omega$, où q est un entier. Or, $p\Pi$ et $q\Omega$ sont des périodes de moment $\gtrless 0$, qui sont communes aussi à tous les coefficients de l'équation (1).

331. *Réciproquement, si les fonctions indéfiniment méromorphes* $f(x)$, $F(x)$ *ont un couple de périodes communes* (Π, Ω), *relativement auquel elles sont d'ordres* m, M (**321**), *elles sont liées l'une à l'autre par une équation entière et irréductible de degrés* $M_1 = \frac{M}{d}$, $m_1 = \frac{m}{d}$, *où* d *désigne un diviseur commun des nombres* m, M, *qui sera précisé tout à l'heure.*

I. L'ordre de $f(x)$ étant m, et $f'(x)$, dérivée par rapport à x du premier membre de l'équation

$$(2)\qquad f(x) - u = 0,$$

ne pouvant, parce qu'elle n'est pas identiquement nulle, s'évanouir pour toutes les valeurs de x, u qui vérifient numériquement cette équation, la résolution de cette dernière par rapport à x fournit certainement (**147**), (**320**), (**321**) m fonctions implicites de u, savoir

$$(3)\qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,$$

dont deux quelconques ne peuvent être, quelle que soit u, égales ou congrues selon Π, Ω, puis, outre ces racines, une infinité d'autres dont chacune au contraire est, quelle que soit u, congrue à quelqu'une d'entre elles. Et, à cause de la communauté de ces périodes, la substitution de toutes ces racines dans $F(x)$ donne d'abord les fonctions de u

$$(4)\qquad F(x_1),\ F(x_2),\ \ldots,\ F(x_m),$$

puis une infinité d'autres dont chacune est identiquement égale à quelqu'une de celles-ci.

Cela posé, *les ordres* m, M *ont un diviseur commun* $d (\geqq 1)$ *tel, que les fonctions simples* (3) *se partagent en* $m_1 = \frac{m}{d}$ *groupes de* d *chacun, jouissant de cette propriété que deux des fonctions composées* (4) *sont identiquement égales entre elles*

ou inégales, selon qu'elles correspondent à deux des fonctions (3) *appartenant ou non à un même groupe. De plus, d divise* M, *et* M *racines analogues* X *de l'équation*

$$(5) \qquad F(X) - U = 0$$

se partagent en $M_1 = \frac{M}{d}$ *groupes de d chacune, jouissant des mêmes propriétés relativement à* $f(x)$.

1° *De u à u, on peut faire décrire à cette variable un chemin fermé tel, que l'une des fonctions* (3), x_i *choisie à volonté, soit changée par ce parcours en une autre* x_j *également arbitraire.*

Si, pour la valeur initiale (et finale) de u considérée, toutes les fonctions (3) sont numériquement inégales, on obtiendra évidemment un pareil chemin en faisant marcher x de x_i à x_j sur une ligne quelconque, puis en prenant la ligne que décrit simultanément $u = f(x)$. Cette dernière ne peut manquer d'être fermée, puisque $f(x_j) = f(x_i) (= u)$.

Sinon, et cela parce que les fonctions (3) ne peuvent être identiquement égales, on prendra pour u une valeur u' assez voisine de sa valeur initiale pour qu'on puisse aller et revenir *directement* de u à u' (163 *et aliàs*), rendant numériquement inégales en outre les quantités correspondantes $x'_1, \ldots, x'_m$; on tracera de u' à u' un chemin fermé $[u']$ changeant x'_i en x'_j (1°), et, pour le chemin fermé cherché, on pourra prendre évidemment celui que forment : le segment rectiligne $[uu']$, le chemin $[u']$ et le même segment $[u'u]$ parcouru à rebours.

2° Admettons maintenant que d des fonctions composées (4), les d premières pour fixer les idées, soient égales identiquement entre elles, mais non à quelqu'une des $m - d$ autres (en supposant $d < m$); faisons décrire à u un chemin fermé changeant x_1 en x_{d+1}, et nommons $x_{d+2}, x_{d+3}, \ldots, x_{2d}$ les fonctions de la suite (3) qui sont congrues, suivant les périodes considérées, à celles dans lesquelles se changent en même temps $x_2, x_3, \ldots, x_d$. Les identités

$$(6) \qquad F(x_1) = F(x_2) = \ldots = F(x_d)$$

donneront évidemment aussi

$$F(x_{d+1}) = F(x_{d+2}) = \ldots = F(x_{2d}) \quad (252^*),$$

après quoi, si $2d$ est $< m$, on trouvera de la même manière un troisième groupe de d des fonctions simples (3) dont la substitution dans $F(x)$ identifiera les d fonctions composées correspondantes, entre elles mais non aux précédentes; et ainsi de suite, jusqu'à épuisement de m. Il faut donc que $m_1 = \frac{m}{d}$ soit un entier.

3° Maintenant, la résolution de l'équation (5) fournira semblablement M fonctions de U incongrues entre elles

$$(7) \qquad X_1, \ X_2, \ \ldots, \ X_M,$$

qui, en appelant D quelque diviseur de M, se partageront en $M_1 = \frac{M}{D}$ groupes jouissant de propriétés analogues relativement à $f(x)$.

Or, on ne peut avoir $D < d$; car, à cause des identités (6), la substitution $U = F(x_1)$, faite dans les fonctions implicites (7), rend certainement d d'entre elles, les premières par exemple, congrues à $x_1, x_2, \ldots, x_d$ respectivement, et donnent par suite

$$f(X_1) = f(X_2) = \ldots = f(X_d) \qquad [= f(x_1) = \ldots = f(x_d) = u].$$

On a donc $D = d$, car, en renversant le raisonnement, on prouve de la même manière qu'on ne peut avoir $d < D$.

[On peut observer le fait en question sur deux fonctions des genres $E(x)$, $E_\infty(x)$, ayant les mêmes périodes élémentaires. Ici l'on a $m = M = 2$ (323), et la suite (3) se réduit à x_1, $S - x_1$, où S est la constante supplémentaire de la première fonction. Si cette constante est égale (ou congrue) à celle de la seconde, on a, quelle que soit u, $F(x_1) = F(S - x_1)$, d'où $d = 2$, $m_1 = M_1 = 1$. Sinon, $d = 1$, $m_1 = M_1 = 2$].

II. *Si*

$$\varphi(s) = a_{-\mu} s^{-\mu} + \ldots + a_{-1} s^{-1} + a_0 + a_1 s + \ldots$$

est le développement d'une fonction de s, *méromorphe en* $s = 0$, *et si*

$$s_1, \ s_2, \ \ldots, \ s_\nu$$

représentent les ν *déterminations du radical* $t^{\frac{1}{\nu}}$, *toute fonction symétrique rationnelle des* ν *fonctions composées*

$$(8) \qquad \varphi(s_1), \ \varphi(s_2), \ \ldots, \ \varphi(s_\nu)$$

est une fonction de t, qui est méromorphe (ou olotrope) en $t = 0$.

Quand la fonction symétrique considérée se réduit à la somme des valeurs dissemblables que les $1.2\ldots\nu$ permutations des fonctions (8) donnent à un même monome les contenant sous des exposants entiers, un raisonnement calqué sur celui du n° **142**, II montre que, dans son développement, le coefficient de tout terme où t est affecté d'un exposant non entier se réduit à zéro.

Notre lemme est encore vrai quand cette fonction symétrique est entière, mais de nature quelconque, parce qu'elle est toujours réductible à une expression linéaire par rapport à des sommes de cette espèce.

Il est donc général; car une fonction symétrique rationnelle peut toujours être mise sous forme d'un quotient de deux fonctions symétriques entières, et le quotient de deux fonctions méromorphes est aussi méromorphe.

III. *En représentant par*

$$(9)\qquad x',\quad x'',\quad \ldots,\quad x^{(m_1)}$$

m_1 *des fonctions implicites* (3), *choisies respectivement, mais à volonté, dans les* m_1 *groupes définis au commencement de l'alinéa* I, *toute fonction rationnelle et symétrique des* m_1 *fonctions composées correspondantes*

$$(10)\qquad F(x'),\quad F(x''),\quad \ldots,\quad F[x^{(m_1)}]$$

se réduit à une fonction de u, $P(u)$, *qui est simplement rationnelle.*

D'après une remarque faite à la fin de l'alinéa précédent, il nous suffira de raisonner dans le cas seulement où il s'agit d'une fonction symétrique entière.

1° *Si, pour les valeurs de u suffisamment voisines de* u_i, ν *racines de l'équation* (2) *s'y réduisant à* x_i,

$$(11)\qquad x',\quad x'',\quad \ldots,\quad x^{(\nu)}$$

forment un système circulaire (**167**), *et si* $\mathfrak{F}(x)$ *désigne une composante quelconque méromorphe (ou olotrope) en* x_i, *toute*

fonction rationnelle et symétrique des ν *fonctions composées de* u

$$(12)\qquad \mathfrak{F}(x'),\quad \mathfrak{F}(x''),\quad \ldots,\quad \mathfrak{F}[x^{(\nu)}]$$

est méromorphe (ou olotrope) en $u = u_i$.

Comme, d'une part (**144**), (**320**, II), les développements des fonctions implicites (11) s'obtiennent en substituant à la variable d'une certaine série entière les ν déterminations du radical $(u - u_i)^{\frac{1}{\nu}}$, comme, d'autre part et par hypothèse, $\mathfrak{F}(x)$ est développable en une série procédant suivant les puissances de $x - x_i$ à exposants entiers croissants, les premiers éventuellement négatifs, les développements des fonctions composées (12) sont par rapport à $u - u_i$ de même forme que ceux des fonctions (8) par rapport à t, et le point en question résulte immédiatement de l'alinéa II.

2° *Si deux seulement des fonctions* (12) *sont égales identiquement, toutes le sont aussi et se réduisent à une même fonction de* u *méromorphe (ou olotrope) en* u_i.

Car le parcours effectué par u d'un anneau qui enveloppe le point u_i changeant x' en x'', x'' en x''', ..., $x^{(\nu)}$ en x', l'identité, supposée

$$\mathfrak{F}(x') = \mathfrak{F}(x''),$$

par exemple, entraîne évidemment

$$\mathfrak{F}(x'') = \mathfrak{F}(x'''),\qquad \ldots,\qquad \mathfrak{F}(x^{(\nu)}) = \mathfrak{F}(x'),$$

d'où

$$\mathfrak{F}(x') = \frac{1}{\nu}\left[\mathfrak{F}(x') + \mathfrak{F}(x'') + \ldots + \mathfrak{F}(x^{(\nu)})\right],$$

fonction de u qui est méromorphe (ou olotrope) en u_i, parce qu'elle est rationnellement et symétriquement composée des fonctions (12) (1°).

3° *Si l'on a* g *groupes de variables indépendantes, contenant respectivement* $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_g$ *de celles-ci, toute fonction rationnelle et symétrique des* $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_g$ *variables considérées est exprimable rationnellement au moyen de certaines fonctions symétriques rationnelles des* ν_1 *variables seulement du premier groupe, de fonctions de la même nature relativement aux* ν_2 *variables du second groupe, etc.* Ce point est trop facile pour que nous nous arrêtions à sa démonstration.

4° Comme chacune des fonctions de u,

$$(13)\qquad F(x'),\quad F(x''),\quad \ldots,\quad F(x^{(\nu)}),$$

se retrouve forcément dans la suite (10), parce que cette dernière contient toutes les fonctions distinctes de u que la substitution dans $F(x)$ des diverses racines de l'équation (2) puisse engendrer, cela à cause de l'identité des couples de périodes considérées, on aura par exemple

$$F(x') = F(x').$$

Si donc deux des fonctions (13) sont égales identiquement, $F(x')$ est fonction méromorphe (ou olotrope) de u en $u = u_i$ (2°); sinon toutes sont inégales et ν des fonctions (10) auront, méromorphes (ou olotropes) en u_i, toutes leurs fonctions symétriques rationnelles (1°).

Il en résulte immédiatement que les fonctions (10) se partagent toujours en certains groupes dans chacun desquels, considéré isolément, leurs fonctions rationnelles et symétriques sont méromorphes (ou olotropes) en $u = u_i$, par suite (3°), que la fonction $P(u)$ jouit de la même propriété.

5° *La fonction* $P(u)$ *est méromorphe (ou olotrope) à l'infini* (51). Car, la fonction $\frac{1}{f(x)}$ jouissant par rapport à $F(x)$ de toutes les propriétés sur lesquelles ont été fondés les raisonnements ci-dessus, la considération de l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = v,$$

équivalente à

$$f(x) = \frac{1}{v},$$

montrera de même que $P\left(\frac{1}{v}\right)$ est méromorphe (ou olotrope) en $v = 0$.

6° *Le nombre des valeurs distinctes de* u *qui peuvent rendre* $P(u)$ *infinie est essentiellement limité.* Car la fonction symétrique actuellement en vue étant entière, il faut alors que la valeur de quelqu'une des fonctions implicites (3) soit congrue à un infini de $F(x)$, c'est-à-dire que u ait l'une ou l'autre des valeurs (non infinies) de $f(x)$ correspondant à tous les infinis

de $F(x)$. Le nombre de ces valeurs ne peut donc surpasser celui des infinis incongrus de $F(x)$ et, à plus forte raison, l'ordre M de cette fonction.

7° La fonction $P(u)$ se réduit donc à une fonction rationnelle de u, puisqu'elle est méromorphe partout, même à l'infini (4°), (5°), et que ses infinis sont en nombre limité (55).

IV. En appelant ainsi

$$-P_1(u),\quad P_2(u),\quad -P_3(u),\quad \ldots,\quad (-1)^{m_1}P_{m_1}(u)$$

les sommes des produits des fonctions (10) prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ..., m_1 à m_1, toute valeur U prise par $F(x)$ pour une valeur de x rendant $f(x)$ égale à u est racine de l'équation entière de degré m_1,

$$U^{m_1} + P_1(u)U^{m_1-1} + \ldots + P_{m_1-1}(u)U + P_{m_1}(u) = 0,$$

dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles de u, et que l'expulsion des dénominateurs transforme en une autre

$$\Phi(U, u) = 0, \tag{14}$$

celle-ci ayant pour premier membre un polynome entier en U, u, de degré effectif m_1 par rapport à U, et n'admettant pour diviseur aucun polynome entier en u seulement, de degré effectif > 0.

V. *L'équation* (14) *est irréductible, et de degré* M_1 *par rapport à u.*

1° Si $\varphi(U, u)$, $\chi(U, u)$ sont deux polynomes entiers sans diviseur commun, on ne peut avoir à la fois les deux identités

$$\begin{cases} \varphi[F(x), f(x)] = 0, \\ \chi[F(x), f(x)] = 0; \end{cases}$$

car alors les équations simultanées entières en U, u,

$$\begin{cases} \varphi(U, u) = 0, \\ \chi(U, u) = 0, \end{cases}$$

auraient pour seules racines un nombre limité de couples de constantes, à l'un ou à l'autre desquels se réduiraient $F(x)$, $f(x)$, quelle que fût x. Or, c'est impossible, puisque nous supposons essentiellement qu'aucune de ces fonctions ne dégénère en une constante.

2° Si appelant $q_1, q_2, \ldots, q_g$ des exposants entiers positifs, en nombre $g > 1$, et $\varphi_1(\text{U}, u), \ldots, \varphi_g(\text{U}, u)$ des polynomes entiers en U, u, deux à deux sans diviseur commun, et de degrés tous > 0, on avait, quelles que fussent U, u,

$$\Phi(\text{U}, u) = [\varphi_1(\text{U}, u)]^{q_1} \ldots [\varphi_g(\text{U}, u)]^{q_g},$$

la double substitution

$$\text{U} = \text{F}(x), \qquad u = f(x),$$

qui annule identiquement $\Phi(\text{U}, u)$ à cause de l'équation (14), annulerait identiquement aussi l'un de ces polynomes au moins, puisqu'ils sont en nombre limité, mais aucun autre avec lui (1°), et toutes les fonctions de u, racines de l'équation (14), satisferaient par exemple à l'équation

$$\varphi_1(\text{U}, u) = 0.$$

Or c'est impossible parce que ces racines sont toutes non identiquement égales et en nombre m_1, tandis que le degré en U de cette dernière équation est $< m_1$, à cause de la présence effective certaine de U dans chacun des autres polynomes $\varphi_2, \ldots$.

3° Comme il résulte d'un raisonnement tout semblable, que U, u satisfont à une équation entière irréductible contenant u au degré M_1, comme d'autre part (1°) le premier membre de cette équation et $\Phi(\text{U}, u)$ se divisent l'un l'autre, à un facteur constant près, ces polynomes sont identiques, et $\Phi(\text{U}, u)$ est bien de degré M_1 par rapport à u.

332. Pour construire effectivement l'équation (14), on emploie des procédés variant avec les circonstances et comportant plus ou moins l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés.

Les deux corollaires suivants sont quelquefois utiles.

I. La proportion

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\text{M}}{\text{M}_1} \; (= d),$$

existant entre les ordres des fonctions $f(x)$, $\text{F}(x)$ du n° **331** et les degrés de l'équation irréductible (14), fournit un de ces quatre nombres, dès que les trois autres sont connus.

En particulier, *si* $\text{F}(x)$ *s'exprime en* $f(x)$ *par une fraction*

rationnelle irréductible contenant $f(x)$ au degré effectif M_1, *on a* $M = M_1 m$. Car ici $m_1 = 1$.

II. L'équation (14) étant irréductible, son premier membre divise forcément celui de toute équation entière pouvant exister entre les mêmes fonctions U, u (331, V, 1°). *Si donc on a obtenu, par un moyen quelconque, une relation de cette nature, ses coefficients satisferont forcément aux équations de condition exprimant la possibilité de cette division.*

En particulier, *ces coefficients seront tous nuls, si l'un des degrés de cette relation est inférieur au degré correspondant de l'équation* (14).

333. *En appelant m l'ordre absolu* (322) *d'une fonction méromorphe bipériodique, et γ le nombre de ses infinis numériquement distincts que contient une même maille élémentaire, cette fonction $u = f(x)$ satisfait à une équation différentielle du premier ordre et de la forme*

$$(15) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)^m + P_1\left(\frac{du}{dx}\right)^{m-1} + \ldots + P_{m-1}\frac{du}{dx} + P_m = 0,$$

où $P_1, \ldots, P_{m-1}, P_m$ *sont des polynomes entiers en u, le dernier* P_m *de degré effectif* $m' = m + \gamma$, *l'avant-dernier* P_{m-1} *identiquement nul, et tous les autres de degrés effectifs* $< m'$.

En outre, cette équation est irréductible, c'est-à-dire qu'en y écrivant u' à la place de $\frac{du}{dx}$, son premier membre est un polynome premier en u', u.

D'après quoi, *la fonction u provient toujours de l'inversion de quelque intégrale abélienne* (169).

I. *L'ordre absolu de $f'(x)$ est m'.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\gamma$ les infinis distincts que $f(x)$ possède dans sa maille élémentaire, et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\gamma$ leurs degrés de multiplicité dont la somme reproduit m (321). Ces infinis appartiennent tous à $f'(x)$, mais aux degrés $\mu_1 + 1, \mu_2 + 1, \ldots, \mu_\gamma + 1$ (36); et, dans la même maille qui est élémentaire aussi pour $f'(x)$ (319), cette fonction n'en possède aucun autre (165*). La somme $m + \gamma = m'$ de ces nombres est donc l'ordre absolu de $f'(x)$.

II. Les fonctions $u'=f'(x)$, u, étant méromorphes et d'ordres m', m, relativement à leur couple commun de périodes élémentaires, sont donc liées par une équation entière irréductible

$$\Psi(u', u)=0, \tag{16}$$

dont les degrés effectifs sont les quotients de m, m' par quelque diviseur commun (331).

III. *Deux valeurs particulières x_1, x_2 de x sont congrues suivant les périodes élémentaires, si l'on a à la fois*

$$f'(x_1)=f'(x_2), \qquad f(x_1)=f(x_2),$$

et si les valeurs de ces dernières quantités n'annulent pas $\Psi^{(1,0)}(u', u)$ dérivée partielle par rapport à u', du premier membre de l'équation (16).

L'équation différentielle (16) ne contenant pas x explicitement, les fonctions de $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{u}_1=f(x_1+\mathfrak{r})$, $\mathfrak{u}_2=f(x_2+\mathfrak{r})$, satisfont toutes deux à la même équation différentielle du premier ordre

$$\Psi(\mathfrak{u}', \mathfrak{u})=0, \tag{17}$$

et respectivement, par suite, aux équations différentielles immédiates

$$\frac{d\mathfrak{u}_1}{d\mathfrak{r}}=\psi_1(\mathfrak{u}_1), \qquad \frac{d\mathfrak{u}_2}{d\mathfrak{r}}=\psi_2(\mathfrak{u}_2),$$

où $\psi_1(\mathfrak{u})$, $\psi_2(\mathfrak{u})$ sont deux racines convenables de l'équation (17) résolue par rapport à $\mathfrak{u}'$. Mais comme pour $\mathfrak{r}=0$ par hypothèse, on a ${}^{(0)}\mathfrak{u}'_1={}^{(0)}\mathfrak{u}'_2$, ${}^{(0)}\mathfrak{u}_1={}^{(0)}\mathfrak{u}_2$, et que ces quantités n'annulent pas $\Psi^{(1,0)}(u', u)$, la racine dont, pour $\mathfrak{u}={}^{(0)}\mathfrak{u}_1={}^{(0)}\mathfrak{u}_2$, la valeur initiale est ${}^{(0)}\mathfrak{u}'_1={}^{(0)}\mathfrak{u}'_2$, est unique et olotrope (307*), (308*). Les composantes $\psi_1(\mathfrak{u})$, $\psi_2(\mathfrak{u})$ sont donc identiques, de plus olotropes en $\mathfrak{u}={}^{(0)}\mathfrak{u}_1={}^{(0)}\mathfrak{u}_2$, et les deux fonctions $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$ satisfont à une même équation différentielle immédiate

$$\frac{d\mathfrak{u}}{d\mathfrak{r}}=\psi(\mathfrak{u}),$$

dont le second membre est olotrope dans ces conditions initiales. Ces mêmes fonctions, ayant pour $\mathfrak{r}=0$ des valeurs initiales égales,

sont identiques (302*, III); en d'autres termes on a, quelle que soit $\mathfrak{r}$,

$$f(x_1 + \mathfrak{r}) = f(x_2 + \mathfrak{r}),$$

moyennant quoi (253), la différence $x_2 - x_1$ se réduit à une certaine période de $f(x)$, par suite (316) à quelque somme de multiples entiers des périodes élémentaires de cette fonction.

IV. Les polynomes Ψ, $\Psi^{(1,0)}$ ne pouvant avoir aucun diviseur commun, puisque le degré du second est inférieur à celui de l'autre et que celui-ci est premier, la résolution par rapport à u', u du système formé par les équations entières (16) et

$$\Psi^{(1,0)}(u', u) = 0$$

ne peut fournir qu'un nombre limité de couples de solutions communes. En appelant donc u_0 une valeur particulière de u n'appartenant à aucun de ces couples, n'étant égale en outre à aucune des valeurs *cardinales* de $f(x)$ [nous parlons comme au n° 304, IV, des valeurs en nombre $\overline{\overline{<}}\, m'$, que donnent à cette fonction les zéros de $f'(x)$], les racines incongrues de l'équation numérique

$$f(x) = u_0$$

qui ne peut en avoir de multiples, sont en nombre m et donnent à $f'(x)$ m valeurs toutes inégales (III). On en conclut que pour les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, le diviseur d du n° 331, I, se réduit à 1, d'où $m_1 = m$, $m'_1 = m'$.

V. *Dans l'équation* (16) *ordonnée par rapport à* u', *le coefficient de* u'^m *se réduit à une constante* (*non* $= 0$). Car si un polynome en u, de degré effectif > 0, servait de coefficient au terme de degré maximum en u', il s'annulerait pour quelque valeur b attribuée à u, et parmi les racines de l'équation $f(x) = b$, il y en aurait une au moins qui rendrait $f'(x)$ infinie; or c'est impossible puisque $f(x)$, $f'(x)$ sont toujours en même temps olotropes ou non (165*), (213*).

L'équation (16) prend donc la forme (15) après la division de tous ses termes par ce coefficient constant de u'^m.

VI. On prouve de la même manière que le coefficient de $u^{m'}$ dans l'équation (15) ordonnée par rapport à u se réduit encore à

une constante (non $= 0$). Il en résulte que le degré effectif de $P_m(u)$ est $= m'$, que ceux de $P_{m-1}, P_{m-2}, \ldots, P_1$ sont tous $< m'$.

VII. Comme toute fonction implicite de u, fournie par la résolution de l'équation

$$f(x) - u = 0,$$

satisfait à l'équation différentielle

$$(18) \qquad P_m\left(\frac{dx}{du}\right)^m + P_{m-1}\left(\frac{dx}{du}\right)^{m-1} + \ldots + P_1\left(\frac{dx}{du}\right) + 1 = 0,$$

les dérivées

$$\frac{dx_1}{du}, \quad \frac{dx_2}{du}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_m}{du}$$

de m fonctions de cette espèce, incongrues suivant les périodes élémentaires, sont évidemment les racines de l'équation (18) résolue par rapport à $\frac{dx}{du}$. On a donc identiquement

$$-\frac{P_{m-1}}{P_m} = \frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du} + \ldots + \frac{dx_m}{du} = \frac{d}{du}(x_1 + x_2 + \ldots + x_m),$$

d'où $P_{m-1} = 0$, puisque la somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ est indépendante de u (**324**).

[On remarquera que la nature spéciale des équations différentielles dont l'intégration nous a fourni les fonctions du second ordre $E(x)$, $E_\infty(x)$ au Chapitre VIII, est conforme au dispositif de ce théorème.]

334. *Le rapport de deux fonctions bipériodiques méromorphes douées des mêmes périodes,* $F(x)$, $f(x)$, *se réduit à une constante, si, dans une même maille, elles ont les mêmes zéros et les mêmes infinis, tous aux mêmes degrés de multiplicité.*

Car ce rapport est une fonction de même nature, qui, dans cette maille, ne possède évidemment aucun zéro ou infini, et dont par suite l'ordre s'abaisse à o (**327**).

Si K désigne la valeur constante de ce rapport, l'équation entière irréductible entre F, f (**331**) est

$$F - Kf = 0.$$

Ici l'on a $m_1 = M_1 = 1$, et le nombre d est l'ordre commun des deux fonctions.

335. *Soient $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_q(x)$ plusieurs fonctions bipériodiques méromorphes possédant les mêmes périodes, et $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, ..., $\mathcal{G}_q$ les groupes de fractions simples provenant, pour chacune, de sa décomposition en une somme de pareilles fractions correspondant à ses infinis situés dans une même maille donnée et en une fonction $\mathfrak{f}_i(x)$ restant olotrope dans cette maille* (39). *Si les groupes dont il s'agit satisfont à quelque identité linéaire et homogène*

$$(19) \qquad a_1\mathcal{G}_1 + a_2\mathcal{G}_2 + \ldots + a_q\mathcal{G}_q = 0,$$

les fonctions proposées sont liées aussi par une identité linéaire de la forme

$$(20) \qquad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_q f_q(x) = a,$$

a_1, ..., a_q et a désignant des constantes.

En ajoutant membre à membre les q identités

$$f_1(x) = \mathcal{G}_1 + \mathfrak{f}_1(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_q(x) = \mathcal{G}_q + \mathfrak{f}_q(x),$$

multipliées auparavant par a_1, ..., a_q, il reste à cause de (19)

$$a_1 f_1(x) + \ldots + a_q f_q(x) = a_1 \mathfrak{f}_1(x) + \ldots + a_q \mathfrak{f}_q(x).$$

Le premier membre de cette relation étant une fonction méromorphe aux mêmes périodes que les proposées, le second jouit de la même propriété. Mais il n'a plus d'infinis dans la maille considérée, puisque $\mathfrak{f}_1(x)$, ..., $\mathfrak{f}_q(x)$ y sont olotropes; il se réduit donc à quelque constante a, parce que son ordre est nul (327); d'où la relation (20).

336. Par exemple, *la différence* $F(x) - f(x)$ *se réduit à une constante, si, dans une maille de leur réseau commun, la*

décomposition de ces deux fonctions donne les mêmes fractions simples.

En appelant a cette constante, l'équation entière entre F, f est

$$F - f - a = 0,$$

et l'observation finale du numéro précédent lui est textuellement applicable.



CHAPITRE X.

SUITE DES DEUX PRÉCÉDENTS.
DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS BIPÉRIODIQUES EN SÉRIES DE FRACTIONS SIMPLES OU DE FONCTIONS CIRCULAIRES, ET EN SÉRIES FACTORIELLES.

Origine et propriétés générales des fonctions $\Xi_i(x)$, $O(x)$.

337. Les questions résolues pour les fonctions unipériodiques polarisées, dans les derniers paragraphes du Chapitre VII, se traitent pour les fonctions bipériodiques par des moyens tout semblables.

Une *série quadruplement infinie* est l'ensemble des valeurs en nombre illimité,

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \ldots, & u_{-1,1}, & u_{0,1}, & u_{1,1}, & \ldots \\ \ldots, & u_{-1,0}, & u_{0,0}, & u_{1,0}, & \ldots \\ \ldots, & u_{-1,-1}, & u_{0,-1}, & u_{1,-1}, & \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right\},$$

de quelque variante $u_{m,n}$ à deux indices m, n, qui est définie pour toutes leurs valeurs positives, nulles ou négatives.

Nous dirons *contigus* deux termes quelconques où, les valeurs d'un même indice étant égales, celles de l'autre diffèrent d'une unité seulement, et *continu* tout amas de termes tellement composé qu'avec deux quelconques d'entre eux il en contient forcément d'autres pouvant être écrits entre ceux-ci de manière que deux consécutifs quelconques soient toujours contigus. Nous représenterons en outre par S_k la somme des termes de tout amas contenant ceux au moins où les valeurs numériques de m, n ne surpassent pas l'entier positif k.

Cela posé, si S_k tend vers une limite pour k infini, sous la seule condition que l'amas sommé reste toujours continu, la série est

convergente. On aperçoit immédiatement alors que la valeur de la limite est indépendante de la composition variable de l'amas continu considéré, et on la nomme (au figuré) la *somme* de la série. Le *reste* de la même série bornée à l'amas qui a fourni une valeur de la variante S_k, est $S - S_k$, excès sur S_k de la somme S de la série, c'est-à-dire la somme de la série encore convergente obtenue en substituant zéro dans la proposée à tous les termes pris pour former S_k; il tend naturellement vers zéro, quand k augmente indéfiniment.

La série est *divergente* dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il est possible de former des amas continus de cette sorte, pour lesquels S_k n'ait point de limite. Une pareille série n'a point de véritable somme; néanmoins on peut souvent, par telle ou telle composition *convenable* de l'amas continu considéré, faire acquérir à S_k telle ou telle limite intéressante à étudier, ce que nous verrons bientôt. Une pareille limite dépend, dans sa valeur comme dans son existence même, de la loi qui a présidé à la formation progressive de l'amas correspondant; à bien des égards, on peut la regarder comme une somme fictive de la série, relative à la sommation spéciale qui l'a fournie.

338. Quand les modules de ses termes sont eux-mêmes en série convergente, la série (1) jouit de propriétés fort précieuses et de tout point identiques à celles que nous connaissons depuis longtemps dans le même cas aux séries ordinaires (ou simplement infinies). On prouvera notamment sans difficulté :

1° *Qu'elle est convergente aussi;*

2° *Qu'elle conserve cette propriété quand on y substitue zéro à tels termes qu'on voudra, c'est-à-dire que toute série partielle formée avec des termes non répétés est également convergente;*

3° *Que la variante* S_k *tend toujours vers la somme de la série, quand bien même l'amas correspondant serait discontinu,* ou bien, si l'on préfère parler ainsi, *que le déplacement et le groupement des termes ne peuvent jamais ni détruire la convergence de la série, ni modifier sa somme;*

Etc.

Il est évident enfin, que *ces mêmes modules sont en série convergente, si des groupes formés avec eux suivant quelque loi donnée ne comportant aucune omission fournissent des sommes qui, écrites consécutivement, constituent une série (ordinaire) convergente.*

339. *Si* $f(u, v)$, $F(u, v)$ *sont deux fonctions entières de degrés effectifs* λ, Λ *par rapport aux variables* u, v, *et si le polynome homogène* $F_\Lambda(u, v)$ *formé dans la seconde par les termes de degré* Λ *ne peut s'évanouir pour aucun couple de valeurs réelles de* u, v [(o, o) *naturellement excepté*], *la série quadruplement infinie ayant*

$$\frac{f(m, n)}{F(m, n)} \tag{2}$$

pour terme général, est convergente avec celle des modules de ses termes, quand on a

$$\Lambda - \lambda \geqq 3. \tag{3}$$

[On remplacera toujours par o les termes où $F(m, n)$ s'évanouirait, et qui sont en nombre limité comme nous le constaterons incidemment tout à l'heure.]

I. *Si l'on appelle*

$$\varpi = \varpi' + i\varpi'', \qquad \omega = \omega' + i\omega''$$

deux quantités de moment $\mathfrak{M} \neq 0$ (257), *puis* μ, ν *deux quantités réelles dont numériquement l'une est* $\geqq \chi$, *puis* θ *la plus petite des racines carrées positives des quantités*

$$\frac{\mathfrak{M}^2}{\varpi'^2 + \varpi''^2}, \qquad \frac{\mathfrak{M}^2}{\omega'^2 + \omega''^2},$$

on a

$$\operatorname{mod}(\mu\varpi + \nu\omega) \geqq \chi\theta.$$

C'est ce que rendent évident l'égalité

$$\begin{aligned}(\mu\varpi' + \nu\omega')^2 + (\mu\varpi'' + \nu\omega'')^2 \\ = \mu^2 \frac{(\varpi'\omega'' - \varpi''\omega')^2}{\omega'^2 + \omega''^2} + \frac{[\mu(\varpi'\omega' + \varpi''\omega'') + \nu(\omega'^2 + \omega''^2)]^2}{\omega'^2 + \omega''^2}\end{aligned}$$

et celle s'en déduisant par la transposition simultanée de ϖ' et ω', de ϖ'' et ω'', de μ et ν.

II. Écrivons maintenant

$$\sum \frac{1.2\ldots\lambda}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r} a_{p,q,r} u^p v^q 1^r, \quad (p+q+r=\lambda)$$

le développement de $f(u, v)$, et

$$\sum \frac{1.2\ldots(\Lambda-1)}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r} b_{p,q,r} u^p v^q 1^r, \quad (p+q+r=\Lambda-1)$$

celui de $F_{\Lambda-1}(u, v) = F(u, v) - F_\Lambda(u, v)$, polynome de degré $(\Lambda-1)$; soient aussi α le plus grand des modules de $a_{p,q,r}$, β la même chose pour $b_{p,q,r}$, et k la plus grande des valeurs numériques de m, n. On trouvera facilement

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} f(m, n) &< \alpha(2k+1)^\lambda, \\ \operatorname{mod} F_{\Lambda-1}(m, n) &< \beta(2k+1)^{\Lambda-1}. \end{aligned}$$

D'autre part, dans chacun des Λ facteurs linéaires

$$(\varpi_1 u + \omega_1 v), \quad \ldots, \quad (\varpi_\Lambda u + \omega_\Lambda v)$$

en le produit desquels $F_\Lambda(u, v)$ peut être décomposé, les coefficients ϖ, ω ont un moment non $=0$; car, s'il en était autrement pour l'un d'eux, ce facteur et par suite $F_\Lambda(u, v)$ s'évanouiraient, contrairement à l'hypothèse, pour quelque couple de valeurs réelles de u, v non toutes deux $=0$.

Donc, en appelant θ_i pour le $i^{\text{ième}}$ facteur quelque quantité positive convenable (I), on aura

$$\operatorname{mod}(\varpi_i m + \omega_i n) > \theta_i k,$$

d'où

$$\operatorname{mod} F_\Lambda(m, n) > \theta_1 \theta_2 \ldots \theta_\Lambda k^\Lambda > \Theta k^\Lambda,$$

en appelant Θ le produit positif $\theta_1 \theta_2 \ldots \theta_\Lambda$, puis, à cause de l'identité $F(u, v) = F_\Lambda(u, v) + F_{\Lambda-1}(u, v)$ combinée avec les inégalités précédentes,

$$\operatorname{mod} \frac{f(m, n)}{F(m, n)} < \frac{\alpha(2k+1)^\lambda}{\Theta k^\Lambda - \beta(2k+1)^{\Lambda-1}},$$

inégalité ayant lieu aussitôt qu'en croissant, k atteint la valeur à

partir de laquelle le dénominateur de son second membre se maintient positif; $F(m, n)$ alors ne peut plus s'évanouir comme nous l'avons annoncé.

Groupons maintenant les modules de ceux des termes de notre série, où k est précisément la plus grande valeur numérique des indices m, n. Leur nombre étant $8k$, ils finissent, d'après ce qui précède, par former une somme inférieure à

$$\frac{8\alpha k(2k+1)^{\lambda}}{\theta k^{\Lambda} - \beta(2k+1)^{\Lambda-1}},$$

terme d'indice k dans une série ordinaire qui est convergente (273), puisque $\Lambda - (\lambda + 1)$, excès du degré du dénominateur sur celui du numérateur, est au moins égal à 2, à cause de $\Lambda - \lambda \geqq 3$. Ces sommes forment donc à plus forte raison une série convergente, ce qu'il nous suffisait d'établir d'après l'observation finale du numéro précédent.

Quand l'inégalité (3) n'a pas lieu, on prouve facilement que la série est divergente.

340. Les considérations précédentes sont applicables aux séries quadruplement infinies dans lesquelles, x désignant une variable indépendante, on a

$$(4) \qquad u_{m,n} = \frac{1}{(x - m\Pi - n\Omega)^i},$$

inverse de la puissance d'exposant i (entier positif) du terme général d'une progression arithmétique aux deux raisons Π, Ω, de moment non nul (309); effectivement $u_{m,n}$ est ainsi une fraction rationnelle en m, n, où $(m\Pi + n\Omega)^i$, ensemble des termes de degré maximum dans le dénominateur, ne peut s'évanouir pour d'autres valeurs réelles de m, n que (0,0), à cause de l'hypothèse faite sur Π, Ω. Ce sont les propriétés de ces séries que nous allons approfondir.

Pour $i \geqq 3$, la somme d'une pareille série, qui alors est toujours convergente avec celle des modules de ses termes (339), *est une fonction indéfiniment méromorphe de x, qu'on peut différentier et intégrer sur un chemin quelconque, en traitant*

séparément de la même manière tous les termes de la série.

Pour $i=2$, la somme variable

$$(5)\qquad \sum_k \frac{1}{(x-m\Pi-n\Omega)^2}$$

des termes d'un amas continu (337) *tend vers une limite jouissant des mêmes propriétés, à condition toutefois que la même somme construite pour $x=0$, savoir*

$$(6)\qquad \sum_k \frac{1}{(m\Pi+n\Omega)^2},$$

tende vers une limite.

Pour $i=1$, et pour la somme variable

$$(7)\qquad \sum_k \frac{1}{x-m\Pi-n\Omega},$$

même chose a lieu encore, sous la condition précédente accompagnée de celle que la somme de composition semblable

$$(8)\qquad \sum_k \frac{1}{(m\Pi+n\Omega)}$$

ait aussi une limite.

[Nous supposons naturellement chacune des sommes (6), (8) débarrassée de son terme impossible où $m=n=0$.]

Pour démontrer ce théorème, on raisonnera exactement comme nous l'avons fait au n° 277 dans une circonstance analogue, en s'appuyant sur celui du n° 339, sur le fait particulier établi dans l'alinéa I de la démonstration de ce dernier, puis, pour ce qui concerne les cas où $i=2$, $i=1$, sur les formules

$$(9)\qquad \sum_k \frac{1}{(x-\omega)^2} = \frac{1}{x^2} + \sum_k \frac{1}{\omega^2} + \sum_k \frac{2\omega x - x^2}{\omega^2(x-\omega)^2},$$

$$(10)\qquad \sum_k \frac{1}{x-\omega} = \frac{1}{x} - \sum_k \frac{1}{\omega} - x\sum_k \frac{1}{\omega^2} + x^2\sum_k \frac{1}{\omega^2(x-\omega)},$$

fournies par une décomposition évidente de tous les termes où $\omega = m\Pi + n\Omega$ n'est pas nul.

341. *On peut composer les sommes variables* (6), (8), *de ma-*

nière qu'elles aient respectivement pour limites deux quantités arbitrairement choisies.

I. *Les mêmes choses étant posées qu'aux nos* 274 *et* 275, *on a*

$$(11)\qquad \frac{1}{u_1^2}+\frac{1}{u_2^2}+\ldots+\frac{1}{u_g^2}=-\frac{1}{h}\left(\frac{1}{u_{g+1}}-\frac{1}{u_1}\right)+\varepsilon_{-3},$$

avec

$$(12)\qquad \operatorname{mod}\varepsilon_{-3}<\eta\sigma_{-3}\frac{1}{1-\theta},$$

σ_{-3} *désignant ici la somme des cubes inverses des modules des termes du tronçon de progression arithmétique considéré.*

On raisonnera exactement comme au n° 275, mais en partant de la relation

$$\frac{1}{u_i+h}-\frac{1}{u_i}=-\frac{h}{u_i^2}+\frac{h^2}{u_i^3}\left(1-\frac{h}{u_i}+\frac{h^2}{u_i^2}-\ldots\right),$$

également applicable à partir du moment où $\operatorname{mod}\frac{h}{u_i}$ se maintient au-dessous de $\theta<1$.

II. 1° Pour faciliter la conception des choses, nous tracerons deux axes rectangulaires sur un tableau plan, et nous nommerons *jalon* d'un terme quelconque $u_{m,n}$ d'une série quadruplement infinie le point de ce tableau ayant m, n pour abscisse et ordonnée.

Appelant ensuite $M_1<M_2$ deux entiers de signes quelconques, N_1, N_2 deux autres entiers de même signe, donnant numériquement $N_1<N_2$, nous construirons sur le tableau le rectangle $[M_1, M_2, N_1, N_2]$ dont deux côtés opposés sont empruntés aux droites $m=M_1$, $m=M_2$, les deux autres aux droites $n=N_1$, $n=N_2$, et nous évaluerons d'abord la somme S_{M_1,M_2,N_1,N_2} de tous les termes de l'expression (6) tombant (c'est-à-dire leurs jalons) sur le périmètre ou à l'intérieur de ce rectangle; ces termes sont ceux où m est compris entre M_1 et M_2 inclusivement, n entre N_1 et N_2. Nous supposerons ensuite N_1, N_2 positifs pour fixer les idées, et aussi N_1 assez grand pour que, dans les termes considérés, les rapports de $\operatorname{mod}\Pi$ et de $\operatorname{mod}\Omega$ à $\operatorname{mod}(m\Pi+n\Omega)$ soient toujours inférieurs à une quantité positive donnée $\theta<1$ (339, I).

Les termes de notre somme où n a une même valeur sont les carrés inverses des termes d'une progression arithmétique de raison $-\Pi$, ayant pour extrêmes $M_2\Pi + n\Omega$, $M_1\Pi + n\Omega$; la formule (11) donne donc pour leur somme

$$\frac{1}{\Pi}\left[\frac{1}{(M_1-1)\Pi + n\Omega} - \frac{1}{M_2\Pi + n\Omega}\right] + \varepsilon_{-3}^{(n)}.$$

Il faut faire ensuite $n = N_1, N_1+1, \ldots, N_2$, puis sommer de nouveau; la formule (5) du n° 275 donne alors

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} S_{M_1,M_2,N_1,N_2} = \frac{1}{\Pi\Omega}\Big\{ & l\left[\frac{(M_1-1)\Pi+(N_2+1)\Omega}{(M_1-1)\Pi + N_1\Omega}\right] - l\left[\frac{M_2\Pi+(N_2+1)\Omega}{M_2\Pi + N_1\Omega}\right]\Big\} \\ & + \frac{1}{\Pi}\varepsilon_{-2}^{(M_1-1)} - \frac{1}{\Pi}\varepsilon_{-2}^{(M_2)} + \sum_{n=N_1}^{n=N_2}\varepsilon_{-3}^{(n)}.\end{aligned}\right.$$

On remarquera que la dernière partie de cette expression est la somme des termes tombant dans notre rectangle, d'une série quadruplement infinie qui est convergente elle-même et celle formée par les modules de ses termes. L'inégalité (12) montre effectivement que les modules des termes élémentaires de $\varepsilon_{-3}^{(n)}$ sont inférieurs aux quantités positives

$$\frac{\operatorname{mod}(-\Pi)}{1-\theta}\operatorname{mod}\frac{1}{(m\Pi+n\Omega)^3},$$

formant elles-mêmes une série de ce genre (339).

L'inégalité (6) du n° 275 montre que les termes de l'avant-dernière partie, si l'on y néglige le facteur commun $-\frac{1}{\Pi}$, ont des modules inférieurs aux quantités

$$\frac{\operatorname{mod}\Omega}{1-\theta}\operatorname{mod}\frac{1}{(M_2\Pi+n\Omega)^2}, \qquad (n = N_1, N_1+1, \ldots, N_2).$$

Si donc M_2, N_1 restent fixes, et si N_2 augmente indéfiniment, cette avant-dernière partie a une limite (273). Si M_2 ou N_1, ou tous deux sont infinis, elle est infiniment petite; ceci résulte de ce que nous avons vu aux n°s 274 et suivants.

Et de même pour l'antépénultième partie, où $M_1 - 1$, N_1, N_2 jouent les mêmes rôles que M_2, N_1, N_2, dans l'avant-dernière.

2° Appelons maintenant M, N deux entiers positifs infinis, puis

[M, N] le rectangle variable dont deux côtés opposés ont pour équations $m = \pm M$ et les deux autres $n = \pm N$. Appelons en outre $[M_1, N_1]$ un rectangle de ce genre, mais invariable, en dehors duquel le module de $m\Pi + n\Omega$ soit toujours supérieur à mod Π et à mod Ω.

Si l'on décompose le rectangle [M, N] en sept autres, savoir : 1° le rectangle $[M_1, N_1]$, 2° celui dont les côtés opposés ont pour équations $m = \pm M$, $n = N_1$ ou N, 3° celui dont les côtés sont caractérisés par $m = -M$ ou $-M_1$, $n = 0$ ou N_1, 4° le symétrique de celui-ci par rapport à l'axe des n, puis enfin les symétriques des trois précédents par rapport à l'origine des m, n, la formule (13), appliquée successivement à chacun des six rectangles variables, donnera facilement, pour la somme $s_{M,N}$ des termes de l'expression (6) non extérieurs au rectangle [M, N],

$$s_{M,N} = \frac{2}{\Pi\Omega}\, l\left[\frac{-M\Pi + N\Omega}{+M\Pi + N\Omega}\right] + \varphi_{M,N},$$

où $\varphi_{M,N}$ est une certaine variante ayant une limite déterminée, de quelque manière que M, N augmentent indéfiniment.

Ainsi donc, on créera une limite pour l'expression (6), *en la composant des termes non extérieurs au rectangle* [M, N], *et en assujettissant l'un ou l'autre des rapports* $\frac{M}{N}$, $\frac{N}{M}$ *à tendre vers une limite déterminée.*

3° *En choisissant convenablement la limite de l'un ou l'autre des rapports ci-dessus, et en ajoutant aux termes contenus dans le rectangle* [M, N] *ceux que renferment certains polygones additionnels contigus à ce rectangle et formant avec lui un ensemble symétrique aussi par rapport à l'origine des m, n, on peut faire acquérir à l'expression* (6) *telle limite qu'on voudra.*

Nous supprimons, pour abréger, cette partie de la démonstration dont les conséquences ne nous sont pas indispensables.

III. Les jalons non extérieurs au polygone défini ci-dessus (II, 3°) ayant deux à deux des coordonnées égales et de signes contraires, la somme (8), quand on la compose de termes ayant ces

mêmes jalons, s'évanouit sans cesse et par suite a zéro pour limite.

Mais si, appelant M' la plus grande valeur de m dans ceux de ces termes où $m > 0$, $n = 0$, puis M'' un autre entier infini donnant au rapport $\frac{M''}{M'}$ une limite μ non nulle, on introduit dans cette somme les termes contigus

$$\frac{1}{(M'+1)\Pi} + \frac{1}{(M'+2)\Pi} + \ldots + \frac{1}{M''\Pi},$$

quand $\mu > 1$, ou bien si l'on y supprime les termes

$$\frac{1}{M'\Pi} + \frac{1}{(M'-1)\Pi} + \ldots + \frac{1}{M''\Pi},$$

quand μ est < 1, la limite de cette même somme augmente toujours de $\frac{l(\mu)}{\Pi}$ (**276**, I). Elle augmente semblablement de $\frac{l(\nu)}{\Omega}$ par l'introduction ou la suppression de termes de la forme $\frac{1}{n\Omega}$. Pour lui donner la valeur quelconque $\frac{a}{\Pi\Omega}$, il suffit donc, en posant $a = a' + ia''$, de trouver pour μ, ν deux quantités positives donnant

$$\begin{cases} \Omega' l(\mu) + \Pi' l(\nu) = a', \\ \Omega'' l(\mu) + \Pi'' l(\nu) = a'', \end{cases}$$

équations toujours résolubles de cette manière à cause de la non-nullité du moment de Π, Ω.

L'introduction ou la suppression des termes de mêmes jalons dans la somme (6) n'en modifie pas d'ailleurs la limite; car elle lui ajoute ou lui retranche les sommes des carrés inverses des termes de deux tronçons de progressions arithmétiques, dont ceux de moindres modules sont infinis (**274**).

Cette dernière observation achève évidemment la démonstration que nous avions à faire.

342. Les sommes qui constituent les derniers termes des formules (9), (10), ayant des limites indépendantes de leur composition, parce que leurs termes généraux appartiennent à des séries quadruplement infinies qui sont convergentes même quand on

réduit chacun de leurs termes à son module (339), il résulte de ce qui précède que *toutes les fonctions méromorphes que les sommes* (5), (7) *peuvent avoir pour limites, quand on les compose convenablement et semblablement, sont renfermées dans les formules*

$$\frac{1}{x^2} + C \quad + \mathfrak{f}_2(x),$$

(14) $$\frac{1}{x} + C' - Cx + \mathfrak{f}_1(x),$$

où C, C′ *sont deux constantes arbitraires et* $\mathfrak{f}_1(x)$, $\mathfrak{f}_2(x)$ *deux fonctions qui en sont indépendantes et s'évanouissent pour* $x = 0$.

Pour plus de simplicité nous rendrons $C' = 0$, en prenant toujours symétrique par rapport à l'origine des m, n le polygone réglant la composition variable commune des sommes (6), (8), comme nous l'avons indiqué ci-dessus (341, II, 3°), et nous représenterons alors la seconde de ces fonctions par $\Xi_1(x)$, la première par $\Xi_2(x)$.

Pour $i \geqq 3$, nous représenterons par $\Xi_i(x)$ la somme de la série ayant (4) pour terme général, moyennant quoi on aura aussi bien

(15) $$\Xi_i(x) = \lim \sum\nolimits_k \frac{1}{(x - m\Pi - n\Omega)^i}$$

pour toute valeur de i et pour toute composition de cette somme semblable à celle ayant déjà engendré $\Xi_1(x)$ et $\Xi_2(x)$.

343. Les propriétés suivantes de toutes ces fonctions sont à peu près évidentes.

I. *On a, quel que soit i,*

(16) $$\Xi_i(x) = \frac{(-1)^{i-1}}{1.2\ldots(i-1)} \Xi_1(x).$$

Car nous avons vu, au n° 340, que pour différentier la limite de la somme (7), quand elle existe, il suffit de différentier séparément chacune des fractions simples dont elle est composée (*Cf.* 278, I).

II. *Celle d'indice i a pour seuls infinis, tous de degré i, les*

quantités $m\Pi + n\Omega$, *et en chacun d'eux, sa décomposition donne la seule fraction simple* $\frac{1}{(x - m\Pi - n\Omega)^i}$ (*Cf.* **278**, II).

III. *On a identiquement*

$$\Xi_i(-x) = (-1)^i \Xi_i(x).$$

Car le polygone du nº **341**, II, 3°, qui règle la composition de la somme (15) pour $i = 1$ ou $i = 2$, et qui peut être censé la régler aussi pour $i \geq 3$, ayant été essentiellement supposé symétrique par rapport à l'origine des m, n, cette somme ne se compose, outre $\frac{1}{x^i}$, que de paires de termes où m, n ont des valeurs respectivement égales et de signes contraires. Le changement de x en $-x$ laisse donc $\frac{1}{x^i}$ et chacune de ces paires invariables, ou bien les change de signe, selon que i est pair ou impair (*Cf.* **278**, VI).

IV. *Pour* i *impair, on a*

$$\left[\Xi_i(x) - \frac{1}{x^i}\right]_{x=0} = 0.$$

Car, après la suppression de $\frac{1}{x^i}$ dans la somme (15), l'hypothèse $x = 0$ y rend tous les termes deux à deux égaux et de signes contraires (*Cf.* **278**, VII).

344. *En appelant* p, q *deux entiers indéterminés, on a l'identité fondamentale*

$$(17) \qquad \Xi_1(x + p\Pi + q\Omega) = \Xi_1(x) + pA_\Pi + qA_\Omega,$$

où A_Π, A_Ω *sont deux constantes liées par l'égalité*

$$(18) \qquad \Omega A_\Pi - \Pi A_\Omega = \pm 2\pi i,$$

selon que le second élément du rapport $\frac{\Omega}{\Pi}$ *est positif ou négatif.*

On a aussi

$$(19) \qquad A_\Pi = 2\Xi_1\left(\frac{\Pi}{2}\right), \qquad A_\Omega = 2\Xi_1\left(\frac{\Omega}{2}\right).$$

De plus, cette fonction $\Xi_1(x)$ *peut être unipériodique, mais non bipériodique.*

I. Supposons pour commencer, que le polygone réglant la composition de la somme variable (7) soit le rectangle [M, N] du n° **341**, II, 2°, puis, pour fixer les idées, que l'on ait

$$\lim \frac{N}{M} = \mathfrak{L}.$$

L'addition de Π à x augmente évidemment cette somme de la quantité

$$\sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{x+(M+1)\Pi - n\Omega} - \sum_{n=-N}^{n=N} \frac{1}{x - M\Pi - n\Omega},$$

qui (**276**, I) a pour limite évidente

$$(20) \qquad \mathcal{A}_\Pi = \frac{2}{\Omega} \lim \left[l\left(\frac{M\Pi + N\Omega}{M\Pi - N\Omega}\right)\right] = \frac{2}{\Omega}\, l\left(\frac{\Pi + \mathfrak{L}\Omega}{\Pi - \mathfrak{L}\Omega}\right);$$

et l'addition de Ω à x augmente la même somme de

$$(20\ bis) \qquad \mathcal{A}_\Omega = \frac{2}{\Pi} \lim \left[l\left(\frac{N\Omega + M\Pi}{N\Omega - M\Pi}\right)\right] = \frac{2}{\Pi}\, l\left(\frac{\mathfrak{L}\Omega + \Pi}{\mathfrak{L}\Omega - \Pi}\right).$$

II. *En posant*

$$t_1 = M\Pi - N\Omega, \qquad t_2 = M\Pi + N\Omega, \qquad t_3 = -t_1 = N\Omega - M\Pi,$$

et précisant les logarithmes comme au numéro cité, on a

$$(21) \qquad l\left(\frac{t_2}{t_1}\right) - l\left(\frac{t_2}{t_3}\right) = \pm \pi i,$$

selon que le second élément de $\frac{\Omega}{\Pi}$ *est positif ou négatif.*

1° Le premier membre de cette relation est évidemment égal à

$$l\left(\frac{t_2}{t_1}\right) + l\left(\frac{t_3}{t_2}\right),$$

accroissement éprouvé par $l(t)$ quand t décrit la ligne brisée conduisant de t_1 à t_2, puis de t_2 à t_3, ou bien, ce qui revient évidemment au même, quand t décrit la demi-circonférence de centre $t = 0$, conduisant de t_1 à $t_3 (= -t_1)$, dans le même sens de rotation. Cette somme se réduit donc à $\pm \pi i$ suivant que ce sens est direct ou rétrograde (**186** *bis*).

2° Maintenant, et en thèse générale, on observera que, trois points quelconques t_1, t_2, t_3 étant donnés, tout déplacement de l'un qui ne lui fait pas franchir la droite joignant les deux autres, c'est-à-dire qui ne fait pas passer par zéro la valeur du déterminant

$$(22)\qquad \begin{vmatrix} 1 & t'_1 & t''_1 \\ 1 & t'_2 & t''_2 \\ 1 & t'_3 & t''_3 \end{vmatrix},$$

et qui, par suite, lui laisse un signe invariable, ne change pas, pour un observateur placé au milieu du côté $[t_1 t_3]$ du triangle $[t_1 t_2 t_3]$, le sens de rotation du mouvement d'un point mobile allant de t_1 à t_3 sur les autres côtés $[t_1 t_2]$, $[t_2 t_3]$ du même triangle.

Il en résulte que ce sens est direct ou rétrograde, selon que le déterminant (22) est positif ou négatif; car, sans changer ce sens, on peut amener les trois points en question à coïncider respectivement dans le premier cas avec $1+i.0$, $0+i.1$, $-1+i.0$, points pour lesquels à la fois le sens est direct et le déterminant positif, dans le second cas avec $1+i.0$, $0+i(-1)$, $-1+i.0$, points pour lesquels les inverses ont lieu.

3° Comme pour nos points t_1, t_2, $t_3=-t_1$, ce déterminant caractéristique se réduit à $4MN(\Pi'\Omega''-\Pi''\Omega')$ et que MN est positif, il faudra bien, dans la relation (21), choisir le signe + ou le signe —, selon que le moment $(\Pi'\Omega''-\Pi''\Omega')$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que le second élément de $\frac{\Pi}{\Omega}$ sera $\lesseqgtr 0$ (237), ou bien que celui de $\frac{\Omega}{\Pi}$ sera $\gtreqless 0$.

III. Les relations (20), (20 *bis*) et (21) donnent immédiatement

$$\Omega \mathcal{A}_\Pi - \Pi \mathcal{A}_\Omega = \pm 2\pi i.$$

Maintenant la fonction $'\Xi_1(x)$ précisée ci-dessus (I) et la fonction $\Xi_1(x)$ étant deux déterminations de l'expression (14) pour $C'=0$, on a

$$\Xi_1(x) = \mathfrak{C}x + {'\Xi_1}(x),$$

$\mathfrak{C}$ désignant une certaine constante. On en conclut immédiatement

$$\Xi_1(x+\Pi) - \Xi_1(x) = \mathfrak{C}\Pi + \mathcal{A}_\Pi = A_\Pi,$$
$$\Xi_1(x+\Omega) - \Xi_1(x) = \mathfrak{C}\Omega + \mathcal{A}_\Omega = A_\Omega,$$

d'où la relation (17) complétée par l'égalité (18).

IV. Pour $p = 1$, $q = 0$ et $x = -\frac{\Pi}{2}$, valeur qui n'est pas un infini de $\Xi_1(x)$ (343, II), la relation (17) donne (343, III)

$$A_\Pi = \Xi_1\left(\frac{\Pi}{2}\right) - \Xi_1\left(-\frac{\Pi}{2}\right) = 2\Xi_1\left(\frac{\Pi}{2}\right),$$

et l'on obtient de même la seconde des formules (19).

V. A cause de la propriété exprimée par l'équation (17), nous dirons que Π, Ω sont de *fausses périodes* pour $\Xi_1(x)$, et nous appellerons A_Π, A_Ω les *augments* correspondants de cette fonction.

VI. La distribution des infinis de $\Xi_1(x)$ (343, II) montre immédiatement que les seules périodes possibles de cette fonction sont de la forme $p\Pi + q\Omega$ (p, q non tous deux $= 0$); et, en vertu de la relation (17), $p_1\Pi + q_1\Omega$ est effectivement une période si, par hasard,

$$p_1 A_\Pi + q_1 A_\Omega = 0,$$

ce qui est réalisable, par exemple, quand $A_\Pi = 0$, en prenant $q_1 = 0$ et p_1 à volonté (*Cf.* 359, *inf.*).

Mais si $p_2\Pi + q_2\Omega$ était une seconde période, on aurait en outre

$$p_2 A_\Pi + q_2 A_\Omega = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0,$$

parce que, d'après l'égalité (18), on ne peut avoir $A_\Pi = A_\Omega = 0$. On pourrait donc trouver quatre entiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, μ_1, μ_2 donnant $p_1 = \mu_1\mathfrak{p}$, $q_1 = \mu_1\mathfrak{q}$, $p_2 = \mu_2\mathfrak{p}$, $q_2 = \mu_2\mathfrak{q}$, moyennant quoi ces deux périodes seraient certainement composées de la période unique $\mathfrak{p}\Pi + \mathfrak{q}\Omega$.

345. *Pour $i \geqq 2$, la fonction $\Xi_i(x)$ est bipériodique aux périodes élémentaires* Π, Ω.

Car la différentiation de la relation (17) combinée avec (16) donne alors l'identité caractéristique

$$\Xi_i(x + p\Pi + q\Omega) = \Xi_i(x).$$

Ces périodes Π, Ω sont d'ailleurs élémentaires, à cause de

la distribution spéciale des infinis communs de ces fonctions (343, II).

On pourrait encore employer le raisonnement direct du n° 344, appuyé sur le théorème du n° 274.

346. *Si* α, β, ..., λ *désignent des constantes quelconques, mais incongrues selon le couple* (Π, Ω), *toute fonction linéaire de quelques fonctions*

$$(23) \qquad \Xi(x-\alpha), \quad \Xi(x-\beta), \quad \ldots, \quad \Xi(x-\lambda),$$

dont celles d'indice 1 *sont d'une même provenance quelconque, est une fonction bipériodique de x admettant les périodes* Π, Ω, *pourvu toutefois que, dans cette expression linéaire, la somme des coefficients des fonctions* Ξ *d'indice* 1 *se réduise à zéro.*

Soient A, B, ..., L ces coefficients de $\Xi_1(x-\alpha)$, $\Xi_1(x-\beta)$, ..., $\Xi_1(x-\lambda)$. Comme les fonctions Ξ d'indices >1 admettent les périodes Π, Ω (345), l'addition à x de $p\Pi+q\Omega$ augmente simplement l'expression linéaire considérée de

$$(A+B+\ldots+L)(pA_\Pi+qA_\Omega),$$

c'est-à-dire de zéro en vertu de l'hypothèse (344).

Cette fonction a pour infinis évidents les quantités α, β, ..., λ; leurs degrés de multiplicité sont les plus grands indices des fonctions Ξ où l'on a substitué $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, ..., $(x-\lambda)$, et les coefficients de l'expression linéaire sont précisément les numérateurs des fractions simples provenant de la décomposition de la fonction bipériodique ainsi engendrée.

347. *Réciproquement, toute fonction bipériodique indéfiniment méromorphe* $f(x)$, *aux périodes* Π, Ω, *s'exprime linéairement au moyen de fonctions analogues à* (23) *et à indices convenablement choisis.*

Soient ..., α_j, ... les infinis de $f(x)$ tombant dans une même maille de son réseau élémentaire, et $A_{1,j}$, $A_{2,j}$, ..., $A_{i,j}$, ... les numérateurs des fractions simples en $(x-\alpha_j)^{-1}$, $(x-\alpha_j)^{-2}$, ..., $(x-\alpha_j)^{-i}$, ... provenant de la décomposition de $f(x)$ relative-

ment à α_j. Le résultat de la sommation

$$\Sigma A_{i,j} \Xi_i(x - \alpha_j)$$

étendue à toutes les combinaisons de valeurs de i, j, qu'il y a lieu de considérer pour $f(x)$, est indéfiniment méromorphe et admet les périodes Π, Ω, parce que la somme des coefficients de ..., $\Xi_1(x - \alpha_j)$, ... s'y réduit au résidu intégral de $f(x)$ dans la maille en question, c'est-à-dire à zéro (328), (346). De plus, cette fonction ne diffère de $f(x)$ que d'une constante, parce que la décomposition des deux fonctions dans une même maille donne les mêmes fractions simples (343, II), (336). Donc, etc.

348. *Appelons* $'\Xi_i(x)$ *une détermination quelconque de* $\Xi_i(x)$, *construite sur les périodes (vraies ou fausses)*

$$'\Pi = \alpha\Pi + \beta\Omega, \qquad '\Omega = \gamma\Pi + \delta\Omega,$$

α, β, γ, δ *désignant des multiplicateurs entiers satisfaisant à la condition*

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Posons en outre

$$(25) \qquad \frac{1}{'\Pi}('A_{'\Pi} - \alpha A_\Pi - \beta A_\Omega) = \frac{1}{'\Omega}('A_{'\Omega} - \gamma A_\Pi - \delta A_\Omega) = \Delta,$$

où $'A_{'\Pi}$, $'A_{'\Omega}$ *représentent les augments de* $'\Xi_1(x)$. *On a les relations*

$$(26) \qquad '\Xi_1(x) - \Xi_1(x) = \Delta x,$$

$$(27) \qquad '\Xi_2(x) - \Xi_2(x) = -\Delta,$$

et, pour $i \geqq 3$,

$$(28) \qquad '\Xi_i(x) - \Xi_i(x) = 0.$$

Cette dernière identité est évidente; car, pour $i \geqq 3$, $\Xi_i(x)$ est la somme d'une série quadruplement infinie dont les modules des termes sont en série convergente, et qui peut être sommée d'une manière quelconque sans altération de résultat. Or, le changement

du mode de sommation, accompagné de celui des périodes, n'est au fond qu'un simple changement dans le mode de la sommation; car, à cause de la condition (24), l'ensemble des valeurs de $m'\Pi + n'\Omega$ coïncide exactement avec celui des valeurs de $m\Pi + n\Omega$.

Maintenant, comme à quelque facteur numérique près (343, I) le premier membre de (28), pour $i = 3$, est la dérivée première de celui de (27), seconde de celui de (26), ceux de (26) et (27) sont des formes linéaires $\Delta x + \mathcal{C}$ et $-\Delta$, où Δ, $\mathcal{C}$ sont des constantes qu'il nous reste à calculer.

La seconde est nulle, parce que, si l'on pose $x = 0$ dans le premier membre de (26), après avoir retranché $\frac{1}{x}$ de chacun de ses termes, il reste $0 - 0 = 0$ (343, IV).

Enfin, et en vertu du théorème du n° 344, le premier membre de (26) augmente de ${}'A_{'\Pi} - (\alpha A_\Pi + \beta A_\Omega)$ quand x augmente de ${}'\Pi = \alpha\Pi + \beta\Omega$, et le second de $\Delta\,{}'\Pi$; d'où pour Δ, la première valeur assignée par la formule (25). La seconde valeur s'obtient de la même manière en faisant croître x de ${}'\Omega = \gamma\Pi + \delta\Omega$. Leur égalité serait encore assurée par la combinaison des relations (18), (24).

349. Comme toutes les déterminations de la fonction Ξ_1 sont celles de l'expression (14) pour $C' = 0$ et pour une valeur quelconque attribuée à l'autre constante C, *l'expression*

$$\Xi_1(x) + \Delta x \tag{29}$$

est réciproquement une certaine détermination de la fonction Ξ_1, *quelle que soit la constante* Δ.

On notera qu'*il existe toujours une fonction* Ξ_1, *mais une seule, ayant une quantité quelconque donnée pour augment de nom donné.*

Pour que le premier augment par exemple de la fonction (29) soit égal à $\mathcal{A}_\Pi$ par exemple, il faut effectivement et il suffit que l'on ait

$$A_\Pi + \Delta_\Pi = \mathcal{A}_\Pi$$

d'où

$$\Delta = \frac{\mathcal{A}_\Pi - A_\Pi}{\Pi}.$$

Mais l'autre augment n'est plus arbitraire, car il est lié au premier par la relation (18).

350. *En appelant* M *un entier positif, puis* ${}^{(M)}\Xi_1(x)$ *la fonction* Ξ_1 *construite sur les fausses périodes* $\frac{\Pi}{M}$, Ω, *avec un premier augment égal à* A_Π (349) *et un second égal par suite à* MA_Ω [*à cause de la relation* (18)], *on a l'identité*

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} &\Big\{\Xi_i(x)+\Xi_i\left(x+\frac{\Pi}{M}\right)+\Xi_i\left(x+2\,\frac{\Pi}{M}\right)+\ldots \\ &\qquad + \Xi_i\left[x+(M-1)\,\frac{\Pi}{M}\right]\Big\} - {}^{(M)}\Xi_i(x) = C, \end{aligned} \right.$$

C *désignant une constante, nulle pour* $i > 1$, *mais égale à*

$$\Gamma = (M-1)\,\frac{A_\Pi}{2} = (M-1)\left(\frac{A_\Omega}{\Omega}\,\frac{\Pi}{2} \pm \frac{\pi i}{\Omega}\right)$$

pour $i = 1$.

La différence dont il s'agit, qui est indéfiniment méromorphe, admet $\frac{\Pi}{M}$, Ω pour périodes, ce qui est évident pour $i > 1$ (345) et vrai aussi pour $i = 1$. Dans ce cas, en effet (344), l'accroissement $\frac{\Pi}{M}$ attribué à x augmente respectivement ses deux parties des quantités égales

$$\Xi_1\left(x + M\,\frac{\Pi}{M}\right) - \Xi_1(x), \quad A_\Pi$$

et l'accroissement Ω les augmente des quantités encore égales

$$A_\Omega \times M, \quad MA_\Omega.$$

D'ailleurs la même différence n'a pas d'infinis; car ses deux termes ont pour infinis communs les quantités $m\,\frac{\Pi}{M} + n\Omega$, et ils donnent par leur décomposition les mêmes fractions simples pour chacun d'eux. Elle se réduit donc à une constante (336), et celle-ci est nulle quand $i > 1$, parce que l'identité (30) relative à ce cas peut aussi se déduire par différentiation de celle relative à $i = 1$ (343, I).

Si, quand $i = 1$, on ajoute membre à membre l'identité (30) pour $x = \frac{\Pi}{2M}$ avec ce qu'elle donne pour $x = -\frac{\Pi}{2M}$, il vient

facilement (343, III)

$$2C = \sum_{j=1}^{j=M-1} \left\{ \Xi_1\left(\frac{\Pi}{2M} + j\frac{\Pi}{M}\right) - \Xi_1\left[\frac{\Pi}{2M} - (M-j)\frac{\Pi}{M}\right] \right\} = (M-1)A_\Pi,$$

à cause de

$$\frac{\Pi}{2M} + j\,\frac{\Pi}{M} = \left[\frac{\Pi}{2M} - (M-j)\frac{\Pi}{M}\right] + \Pi,$$

et l'on a bien $C = \Gamma$.

Cette formule (30) est quelquefois utile à la simplification des expressions fournies pour les fonctions bipériodiques par le théorème du n° 347.

351. En ayant égard à la propriété de toutes les fonctions Ξ, de pouvoir être différentiées et intégrées par la différentiation et l'intégration séparées, des fractions simples dont la sommation les a engendrées, et en raisonnant exactement comme aux n°s 285 et suivants, on obtient immédiatement les propositions qui terminent ce paragraphe.

Le produit des binômes linéaires

$$(31) \qquad 1 - \frac{x}{m\Pi + n\Omega},$$

dont sur le tableau les jalons remplissent un polygone de dimensions infinies jouissant de la double propriété d'être symétrique par rapport à l'origine des m, n et de faire converger la somme (6), *tend vers une limite* $O(x)$ *qui est une fonction de x indéfiniment olotrope; on suppose remplacé toutefois par x le facteur impossible où* $m = n = 0$.

Le produit semblablement composé des binômes

$$1 - \frac{x}{\theta + m\Pi + n\Omega},$$

où le paramètre θ *n'est pas de la forme* $m\Pi + n\Omega$, *tend aussi vers une limite* $O(x, \theta)$ *qui est indéfiniment olotrope.*

Ces fonctions s'expriment au moyen de la fonction Ξ_1 (de

provenance semblable) par les formules

$$O(x) \quad = x e^{\int_0^x \left[\Xi_1(x) - \frac{1}{x}\right] dx} \quad (Cf.\ 285),$$

$$O(x, \theta) = e^{\int_0^x \Xi_1(x-\theta) dx} \quad (Cf.\ 287).$$

352. Voici les principales propriétés de la fonction $O(x)$.

I. On a l'équation différentielle et la condition initiale

$$(32) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx} l\, O(x) = \frac{O'(x)}{O(x)} = \Xi_1(x), \\ l \frac{O(x)}{x} = 0, \quad \left[\text{ou bien } \frac{O(x)}{x} = 1\right], \quad \text{pour } x = 0, \end{array} \right\} (Cf.\ 286, \text{I}).$$

Cette équation montre que $O(x)$ *peut avoir comme* $\Xi_1(x)$ *une période, jamais deux* (344, VI), (*Cf.* 365, *inf.*)

II. *Les zéros de* $O(x)$ *sont tous simples et se réduisent aux quantités* $m\Pi + n\Omega$ (*Cf.* 286, II).

III. *On a identiquement*

$$(33) \qquad O(-x) = -O(x) \qquad (Cf.\ 286, \text{III}).$$

IV. *On a les identités*

$$(34)\ O(x+\Pi) = -e^{A_\Pi\left(x+\frac{\Pi}{2}\right)} O(x), \quad O(x+\Omega) = -e^{A_\Omega\left(x+\frac{\Omega}{2}\right)} O(x).$$

L'équation différentielle (32) donne

$$\frac{d}{dx}[l\, O(x+\Pi) - l\, O(x)] = \Xi_1(x+\Pi) - \Xi_1(x) = A_\Pi \quad (344),$$

d'où, par intégration et passage des logarithmes aux nombres,

$$O(x+\Pi) = C e^{A_\Pi x} O(x),$$

C désignant une certaine constante.

En faisant dans cette relation $x = -\frac{\Pi}{2}$, ayant égard à (33) et divisant par $O\left(\frac{\Pi}{2}\right)$ qui ne peut s'évanouir (II), il vient

$$C = -e^{A_\Pi \frac{\Pi}{2}},$$

ce qui donne la première des formules (34); l'autre s'établit de la même manière.

Toutes deux montrent que l'addition de $p\Pi + q\Omega$ à x multiplie $O(x)$ par une exponentielle dont le signe et l'exposant, fonction linéaire de x, s'obtiennent immédiatement.

Comme au n° 344, V, nous appellerons Π, Ω les *fausses périodes* de $O(x)$.

353. *Pour exprimer $O(x, \theta)$ au moyen de $O(x)$, on a la relation*

$$(35) \qquad O(x, \theta) = \frac{O(x-\theta)}{O(-\theta)} \qquad (Cf.\ 287).$$

354. *Soient*

$$(36) \qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_g,$$

$$(37) \qquad \mu_1, \quad \mu_2, \quad \ldots, \quad \mu_\gamma$$

deux groupes d'entiers positifs satisfaisant à la condition

$$(38) \qquad (m_1 + m_2 + \ldots + m_g) - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\gamma) = 0,$$

et

$$(39) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_g,$$

$$(40) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\gamma$$

deux groupes correspondants de quantités quelconques, mais toutes incongrues selon le couple (Π, Ω), *et satisfaisant à cette autre condition*

$$(41) \quad (m_1 a_1 + m_2 a_2 + \ldots + m_g a_g) - (\mu_1 \alpha_1 + \ldots + \mu_\gamma \alpha_\gamma) = p\Pi + q\Omega,$$

p, q désignant deux entiers quelconques (*positifs ou négatifs*). *Posons enfin*

$$(42) \quad \mathrm{A} = \frac{\mathrm{A}_\Pi(p\Pi + q\Omega) \mp q.2\pi i}{\Pi} = \frac{\mathrm{A}_\Omega(p\Pi + q\Omega) \pm p.2\pi i}{\Omega},$$

quantités égales en vertu de la relation (18).

L'expression

$$(43)\quad \Phi(x) = e^{\Lambda x}\frac{[O(x-a_1)]^{m_1}[O(x-a_2)]^{m_2}\dots[O(x-a_g)]^{m_g}}{[O(x-\alpha_1)]^{\mu_1}[O(x-\alpha_2)]^{\mu_2}\dots[O(x-\alpha_\gamma)]^{\mu_\gamma}}$$

est une fonction indéfiniment méromorphe de x, aux périodes Π, Ω, *ayant pour zéros aux degrés de multiplicité* (36) *respectivement les quantités* (39), *et pour infinis aux degrés de multiplicité* (37) *les quantités* (40).

Chaque terme de cette fraction étant indéfiniment olotrope comme $O(x)$ (351), et l'exponentielle l'étant aussi, la fonction $\Phi(x)$ est indéfiniment méromorphe.

Maintenant, si l'on change x en $x+\Pi$ (352, IV), le second membre de notre formule est multiplié par -1 élevé à une puissance d'exposant $(m_1+\dots+m_g)-(\mu_1+\dots+\mu_\gamma)$ et par une exponentielle d'exposant

$$\Lambda\Pi + A_\Pi\Big\{[(m_1+\dots+m_g)-(\mu_1+\dots+\mu_\gamma)]\left(x+\frac{\Pi}{2}\right) \\ -[(m_1a_1+\dots+m_ga_g)-(\mu_1\alpha_1+\dots+\mu_\gamma\alpha_\gamma)]\Big\},$$

c'est-à-dire par $1\times e^{\mp q 2\pi i}=1$ à cause des conditions (38), (41), (42). Notre expression a donc Π pour période, et de même Ω.

Finalement, comme $O(x)$ n'admet pour zéros, tous simples, que les quantités $m\Pi+n\Omega$ (352, II), la même expression a bien pour zéros et infinis, aux degrés de multiplicité spécifiés, les quantités (39) et (40) (avec toutes les valeurs de x qui leur sont congrues).

355. *Réciproquement, si l'on représente par les notations* (39), (40), (36), (37) *les zéros et infinis incongrus de la fonction méromorphe* $F(x)$ *aux périodes* Π, Ω, *ainsi que leurs degrés de multiplicité, et par* Λ *un coefficient convenablement choisi, on aura*

$$(44)\qquad F(x) = K\Phi(x),$$

K *désignant une certaine constante.*

D'une part (321) les entiers (36) (37) remplissent la condition (38); d'autre part (325) les quantités (39), (40) satisfont à

la condition (41), sauf à choisir convenablement les entiers p, q. Si donc on prend pour Λ la valeur donnée par la formule (42), l'expression (43) sera, d'après le théorème précédent, une fonction méromorphe bipériodique, et aura en commun avec $F(x)$ ses périodes Π, Ω, ses zéros et infinis aux mêmes degrés de multiplicité. Le rapport $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ se réduit donc nécessairement à une constante (334), d'où la formule (44).

Dans chaque cas particulier, la valeur de K se déduit d'une hypothèse numérique simple faite sur x. On pourrait remplacer

$$O(x-a_1),\quad \ldots,\quad O(x-\alpha_1),\quad \ldots$$

par

$$O(x,\, a_1)O(-a_1),\quad \ldots,\quad O(x,\, \alpha_1)O(-\alpha_1),\quad \ldots\quad (353).$$

356. La formule suivante permet quelquefois de simplifier l'expression (43).

En appelant $^{(M)}O(x)$, *la fonction* O *engendrée par l'intégration de la fonction* $^{(M)}\Xi_1(x)$ *définie au* n° 350, *on a l'identité*

$$\frac{O(x)\,O\left(x+\frac{\Pi}{M}\right)\cdots O\left[x+(M-1)\frac{\Pi}{M}\right]}{^{(M)}O(x)} = H e^{\Gamma x},$$

où H *est une certaine constante.*

Pour y arriver, il suffit d'écrire l'identité (30) pour $i=1$, de l'intégrer au moyen de la relation (32), puis de passer des logarithmes aux nombres.

En faisant $x=0$ dans cette relation, après avoir divisé par x les deux termes de son premier membre, il vient (352, I)

$$H = O\left(\frac{\Pi}{M}\right)O\left(2\frac{\Pi}{M}\right)\cdots O\left[(M-1)\frac{\Pi}{M}\right].$$

357. La formule (44) fournit, pour la fonction bipériodique quelconque $F(x)$, une expression composée avec la *seule* fonction simple $O(x)$ [ou $O(x,\, \theta)$]; pour les calculs numériques, elle est donc bien préférable à celle du n° 347, qui contient les fonctions *différentes* $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$, et qui n'est pas comme celle-ci calculable par logarithmes. On conçoit qu'une Table des valeurs d'une fonc-

tion $O(x)$ puisse permettre de trouver facilement celles de toute fonction bipériodique offrant les mêmes périodes. On préfère naturellement pour cela une des deux fonctions $O(x)$ qui sont unipériodiques, et dont nous parlerons dans le prochain paragraphe (365, *inf.*).

358. *Si* $'O(x)$, $O(x)$ *désignent les deux fonctions O engendrées par l'intégration des fonctions* $'\Xi_1(x)$, $\Xi_1(x)$ *du n° 348, on a entre elles la relation*

$$\frac{'O(x)}{O(x)} = e^{\frac{\Delta}{2}x^2}.$$

En opérant sur l'identité (26) comme nous l'avons fait au n° 356 sur l'identité (30), on arrive à

$$\frac{'O(x)}{O(x)} = \mathrm{C}e^{\frac{\Delta}{2}x^2},$$

et l'on a $\mathrm{C} = 1$, parce que le premier membre tend vers 1 quand x tend vers 0 (352, I).

Fonctions $\Xi_1(x)$ et $O(x)$ douées de périodicité simple.

359. Dans le paragraphe précédent, dont nous conservons les notations pour celui-ci en prolongeant son numérotage, nous avons vu (349) qu'on peut donner une valeur arbitrairement choisie à l'un ou à l'autre des augments de la fonction $\Xi_1(x)$. *Si donc on réduit le premier à* 0, *elle acquiert la (vraie) période* Π, *et si c'est le second, elle acquiert la période* Ω. *L'autre augment, alors déterminé par l'équation* (18), *ne peut jamais s'évanouir.* Ce sont ces deux fonctions douées ainsi de périodicité simple, dont nous allons nous occuper; nous les représenterons par ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, ${}^{(\Omega)}\Xi_1(x)$, et nous ne parlerons que de la première, parce que tout ce qui la concerne s'applique à la seconde, *mutatis mutandis.*

En faisant $\mathrm{A}_\Pi = 0$, l'équation (18) donne pour le second augment de ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, la valeur

$$\mathrm{A}_\Omega = \mp \frac{2\pi i}{\Pi},$$

selon que le second élément du rapport $\frac{\Omega}{\Pi}$ est $\gtrless 0$.

Comme la formule (20) donne

$$\mathcal{A}_{\Pi} = 0$$

quand $\mathcal{L} = 0$, *la fonction* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ *est la limite de la somme* (7) *composée des termes dont les jalons sont contenus dans le rectangle* [M, N] *du n°* **341**, II, 2°, *pourvu qu'il s'agrandisse indéfiniment sous la condition*

$$\lim \frac{N}{M} = 0. \tag{45}$$

360. *La fonction* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ *se développe en série trigonométrique doublement infinie par la formule*

$$ {}^{(\Pi)}\Xi_1(x) = \frac{\pi}{\Pi} \lim \sum_{-N}^{+N} \cot \frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega), \qquad (\textit{pour } N \textit{ infini}). \tag{46}$$

I. *On fait acquérir des limites aux expressions* (6), (8), *en composant chacune de tous les termes qui remplissent le rectangle* [M, N] (*celui où l'on aurait* $m = n = 0$, *bien entendu, excepté*), *puis en faisant croître indéfiniment,* M *d'abord,* N *ensuite.*

1° C'est évident pour l'expression (8) qui, étant ainsi toujours nulle, tend nécessairement vers 0.

2° Pour M infini, la somme des termes de l'expression (6), où $n = 0$, a pour limite le double de la somme de la série

$$\frac{1}{1^2\Pi^2} + \frac{1}{2^2\Pi^2} + \ldots + \frac{1}{m^2\Pi^2} + \ldots \tag{47}$$

qui est convergente (**273**). Celle des termes où n a une même valeur $\neq 0$, tend, d'après le n° **283**, vers

$$\xi_2(n\Omega, -\Pi) = \left(\frac{\pi}{-\Pi}\right)^2 \frac{1}{\sin^2 n\iota},$$

où l'on a posé pour abréger

$$\frac{\pi\Omega}{-\Pi} = \iota = \iota' + i\iota''.$$

En négligeant donc le double de la quantité (47) et le facteur $\left(\frac{\pi}{-\Pi}\right)^2$, l'expression considérée tend, pour N invariable, M infini, vers le double de

$$\frac{1}{\sin^2 1\iota}+\frac{1}{\sin^2 2\iota}+\ldots+\frac{1}{\sin^2 N\iota}.$$

Or cette dernière somme est celle des N premiers termes d'une série convergente; car ι'' n'étant pas nul, puisque le moment de Π, Ω ne l'est pas, on écrira, si ι'' est positif,

$$(48)\qquad \frac{1}{\sin N\iota}=\frac{2i}{e^{iN\iota}-e^{-iN\iota}}=\frac{2i(e^{-\iota''})^N}{e^{iN\iota'}(e^{-\iota''})^{2N}-e^{-iN\iota'}},$$

d'où

$$\operatorname{mod}\frac{1}{\sin^2 N\iota}<\frac{4}{(1-\varepsilon)^2}(e^{-2\iota''})^N,$$

à partir du moment où le module de l'exponentielle $(e^{-\iota''})^{2N}$, infiniment petit à cause de $-\iota''<0$, se maintient au-dessous de la quantité positive invariable $\varepsilon<1$, et le second membre de cette inégalité est le terme général d'une progression géométrique de raison $e^{2-\iota''}<1$.

Quand ι'' est négatif, on arrive à la même conclusion en multipliant par $e^{N\iota''}$ les deux termes de la fraction formant le membre médian des égalités (48).

II. *Les limites mentionnées ci-dessus* (I) *sont égales à celles que fournit le rectangle* [M, N] *s'agrandissant sous la condition* (45).

1° C'est encore évident pour l'expression (8) qui se réduit sans cesse à zéro.

2° Appelons maintenant $S_{M,N}$ l'expression (6) composée des termes dont les jalons remplissent le rectangle [M, N], et $S_{\infty,N}$ sa limite pour M infini, N conservant une valeur invariable.

Il est évident que la différence $S_{\infty,N}-S_{M,N}$ est le double de la limite vers laquelle tend, pour M′ infini, la somme $S_{M,M',-N,N}$ des quantités $\frac{1}{(m\Pi+n\Omega)^2}$ dont les jalons remplissent le rectangle ayant ses côtés empruntés aux droites $m=M+1$ ou $=M'$, et $n=\pm N$.

Or la formule (13) légèrement modifiée permet d'évaluer $S_{M,M',-N,N}$, puis sa limite $S_{M,\infty,-N,N}$ pour M′ infini; à part des quantités qui sont toujours infiniment petites quand M, N sont infinis, l'expression de cette dernière ne contient plus qu'un logarithme que la condition (45) fait tendre vers zéro. On a donc bien, sous cette condition,

$$\lim S_{M,N} = \lim S_{\infty,N}.$$

III. Pour obtenir ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, il suffit donc, en vertu du théorème du n° 340, de donner à la somme variable (7) la composition spécifiée dans l'alinéa (I).

Quand on fait croître M indéfiniment, la somme des quantités $\frac{1}{x - m\Pi - n\Omega}$ dont les jalons tombent dans le rectangle [M, N], et où n a la même valeur, tend vers

$$\xi_1(x - n\Omega, \Pi) = \frac{\pi}{\Pi}\,\xi_1\left[\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega), \pi\right] = \frac{\pi}{\Pi}\cot\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega) \quad (283),$$

et la formule (46) se trouve établie.

361. En vertu des théorèmes des n°s 340, 277, *on pourra différentier la formule* (46) *ou l'intégrer sur un chemin quelconque, en exécutant séparément les mêmes opérations sur les divers termes composant la somme variable du second membre.*

Cette observation, combinée avec la relation (16), conduit pour la fonction $\Xi_2(x)$ *de même provenance*, c'est-à-dire limite de l'expression (5) composée comme nous l'avons expliqué ci-dessus (360, I), à la formule

$${}^{(\Pi)}\Xi_2(x) = \left(\frac{\pi}{\Pi}\right)^2 \lim \sum_{-N}^{+N} \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega)}, \qquad (\textit{pour } N \textit{ infini}).$$

Ici on peut remplacer le second membre par la somme *véritable* de la série doublement infinie ayant $\left(\frac{\pi}{\Pi}\right)^2 \frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega)}$ pour terme général, parce que celle-ci est convergente, même quand on réduit ses termes à leurs modules, comme le prouve le raisonnement fait ci-dessus (360, I, 2°).

En poursuivant les différentiations, on obtient les développements des fonctions $\Xi_3(x)$, $\Xi_4(x)$, ... (dont la provenance est indifférente), en séries doublement infinies procédant suivant des fonctions circulaires faciles à calculer.

362. *Chacune des fonctions* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, ${}^{(\Pi)}\Xi_2(x)$, $\Xi_3(x)$, $\Xi_4(x)$, ... *est développable en une série qui, sauf son premier terme, procède suivant les sinus et cosinus des multiples entiers d'une même fonction linéaire de x. Et cette série converge pour toute valeur de x tombant entre deux droites parallèles à la période* Π *menées par deux des infinis communs à toutes ces fonctions, de manière à n'en contenir aucun autre dans la bande qu'elles limitent.*

Nous appellerons

$$\rho = \rho' + i\rho''$$

le rapport $\frac{\Omega}{\Pi}$ dont, pour fixer les idées, nous supposerons le second élément ρ'' positif; nous poserons, pour simplifier,

$$(49) \qquad e^{2\pi i\rho} = e^{-2\pi\rho''}e^{2\pi i\rho'} = q,$$

et l'on retiendra que $\mathrm{mod}\, q < 1$ à cause de $\rho'' > 0$.

I. *Notre théorème est vrai pour la fonction* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ *et pour les valeurs de x comprises entre les parallèles à* Π, *menées par les infinis* $0, \Omega$.

Les valeurs de x en question sont de la forme $g\Pi + h\Omega$, où g, h sont deux quantités réelles dont la première est absolument indéterminée, dont la seconde est algébriquement > 0 et < 1.

En appelant ν un entier positif, posant pour abréger $\frac{2\pi i}{\Pi}x = t$, et exprimant en exponentielles les cotangentes figurant dans le développement (46), il vient (220) :

1° Si $n = \nu$,

$$\cot\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega) = i\,\frac{1 + q^\nu e^{-t}}{1 - q^\nu e^{-t}} = i(1 + 2q^\nu e^{-t} + 2q^{2\nu}e^{-2t} + \ldots),$$

2° Si $n = -\nu$,

$$\cot\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega) = -i\,\frac{1 + q^\nu e^t}{1 - q^\nu e^t} = -i(1 + 2q^\nu e^t + 2q^{2\nu} e^{2t} + \ldots).$$

En négligeant effectivement leurs premiers termes, les séries entre parenthèses sont des progressions géométriques dont les raisons $q^\nu e^{-t}$, $q^\nu e^t$ ont des modules tous < 1, parce que ce sont des exponentielles ayant pour exposants les quantités

$$\nu.2\pi i\rho \mp t = -2\pi\rho''(\nu \mp h) + i(2\pi\nu\rho' \mp 2\pi g \mp 2\pi h\rho')$$

dont les parties réelles sont essentiellement négatives.

En additionnant membre à membre, il vient, pour toute valeur de n non nulle,

$$(50)\qquad \left\{\begin{aligned} &\cot\frac{\pi}{\Pi}(x - n\Omega) + \cot\frac{\pi}{\Pi}(x + n\Omega) \\ &\quad = -2i[q^\nu(e^t - e^{-t}) + q^{2\nu}(e^{2t} - e^{-2t}) + \ldots]; \end{aligned}\right.$$

et dans la série entre crochets, non seulement les modules des termes forment une série convergente (ce que nous avons vu implicitement à l'instant), mais encore la somme S_ν de cette série de modules est le terme général d'une série

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_\nu + \ldots,$$

qui est elle-même convergente. Car si l'on pose $e^{-2\pi\rho''} = \theta < 1$, les termes de S_ν sont, dès que ν est > 1, inférieurs à ceux de la progression géométrique décroissante

$$2\theta^{\nu-1} + 2(\theta^{\nu-1})^2 + 2(\theta^{\nu-1})^3 + \ldots,$$

d'où

$$S_\nu < \frac{2\theta^{\nu-1}}{1 - \theta^{\nu-1}},$$

inégalité dont le second membre est le terme général d'une série évidemment convergente, à cause de $\theta^{\nu-1} < 1$.

Il en résulte (107*) que, dans la série qui a pour termes les sommes des séries figurant dans les seconds membres des formules analogues à (50), on peut écrire et grouper d'une manière quelconque les termes élémentaires de ces séries partielles. Cela posé, si l'on somme séparément ceux de ces termes élémentaires qui contiennent les mêmes différences d'exponentielles, et si l'on rem-

place ces différences par des sinus, la relation (46) donne

$$(51)\quad \left\{\begin{aligned} {}^{(\Pi)}\Xi_1(x) &= \frac{\pi}{\Pi}\cot\frac{\pi}{\Pi}x + \frac{4\pi}{\Pi}\Big[\frac{q}{1-q}\sin\frac{2\pi}{\Pi}x+\frac{q^2}{1-q^2}\sin 2\frac{2\pi}{\Pi}x+\ldots \\ &\qquad + \frac{q^m}{1-q^m}\sin m\frac{2\pi}{\Pi}x+\ldots\Big]; \end{aligned}\right.$$

c'est la formule que nous voulions établir dans la bande considérée.

II. *Notre théorème est vrai pour la même fonction* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ *et pour les valeurs de* x *intérieures à la bande comprise entre les parallèles à* Π *menées par les infinis* $k\Omega$, $(k+1)\Omega$.

Si l'on pose $x = k\Omega + \mathfrak{r}$, en se souvenant que $A_\Omega = -\frac{2\pi i}{\Pi}$ (359) parce que nous supposons positif le second élément de $\frac{\Omega}{\Pi}$, il viendra

$$(52)\qquad {}^{(\Pi)}\Xi_1(x) = {}^{(\Pi)}\Xi(\mathfrak{r}+k\Omega) = -k\frac{2\pi}{\Pi}i + {}^{(\Pi)}\Xi_1(\mathfrak{r}),$$

et $\mathfrak{r}$ tombe dans la bande dont il était question ci-dessus (I). La formule (51) est donc applicable au développement de ${}^{(\Pi)}\Xi_1(\mathfrak{r})$ en série de sinus. En faisant ensuite $\mathfrak{r} = x - k\Omega$ dans cette série, portant celle-ci dans la relation (52), puis y remplaçant

$$\sin m\frac{2\pi}{\Pi}(x-k\Omega) = \sin\left(m\frac{2\pi}{\Pi}x - m.k2\pi\rho\right)$$

par

$$(52\ bis)\qquad \cos mk2\pi\rho.\sin m\frac{2\pi}{\Pi}x - \sin mk2\pi\rho.\cos m\frac{2\pi}{\Pi}x,$$

on obtient dans la bande voulue le développement de ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ en série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi}{\Pi}x$.

Mais il faut y laisser groupées, les deux parties du terme général mis sous la forme (52 *bis*).

III. *Notre théorème est applicable à toutes les autres fonctions spécifiées dans son énoncé.*

Il résulte implicitement des considérations précédentes, que, en amincissant la bande où l'on a développé ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, par quelque

rapprochement simultané des parallèles qui la limitent (si faible qu'il soit d'ailleurs), on obtient un espace où les modules des termes de la série (51), ceux aussi des termes (non dédoublés) de la série construite dans l'alinéa (II), restent respectivement inférieurs à des quantités positives en série convergente. Le théorème sur la différentiation des séries de fonctions (275* *bis*) est donc applicable à celles dont il s'agit. Il suffira donc (343, I) de différentier séparément tous les termes des séries en question pour obtenir, à des facteurs numériques près, des développements analogues des fonctions ${}^{(\Pi)}\Xi_2(x)$, $\Xi_3(x)$, ...

Nous avons raisonné dans le cas où ρ'', second élément de $\rho = \frac{\Omega}{\Pi}$, est positif; s'il était négatif, le module de $e^{2\pi i\rho}$ serait > 1, mais alors celui de $e^{-2\pi i\rho}$ serait < 1, et, en représentant cette dernière quantité par q, on arriverait aux mêmes formules.

363. Par un simple changement de variable on déduit des considérations précédentes que, *quelle que soit la constante* α, *les fonctions* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x-\alpha)$, ${}^{(\Pi)}\Xi_2(x-\alpha)$, ..., $\Xi_3(x-\alpha)$, ..., *sont susceptibles de développements analogues à ceux spécifiés aux nos* 360 *et* 361, *ainsi qu'au no* 362 *pour l'intérieur de toute bande parallèle à* Π, *qui ne contient aucun de leurs infinis* $\alpha + m\Pi + n\Omega$.

364. *De pareils développements sont applicables à toute fonction de* x, *indéfiniment méromorphe et bipériodique, ceux du no* 362 *n'étant valables qu'à l'intérieur d'une bande dont les bords sont tracés parallèlement à une période en laissant tous les infinis de la fonction à son extérieur.*

Ce théorème résulte immédiatement de la combinaison du précédent avec celui du no 347 appliqué à la décomposition de la fonction bipériodique considérée en fonctions Ξ ayant toutes en commun la période dont il s'agit.

Nous devons passer sous silence les détails de la construction de ces diverses formules et les transformations avantageuses qu'on peut leur faire subir parfois.

365. Nous représenterons aussi par ${}^{(\Pi)}O(x)$, ${}^{(\Omega)}O(x)$ les fonc-

tions $O(x)$ déduites de ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, ${}^{(\Omega)}\Xi_1(x)$, par intégration et passage des logarithmes aux nombres; il nous suffira naturellement de parler de la première.

Comme on a ici $A_\Pi = 0$, $A_\Omega = \mp \frac{2\pi i}{\Pi}$ (359), les formules (34) deviennent

$$(53)\quad {}^{(\Pi)}O(x+\Pi) = -{}^{(\Pi)}O(x), \qquad {}^{(\Pi)}O(x+\Omega) = -e^{\mp\frac{2\pi i}{\Pi}\left(x+\frac{\Omega}{2}\right)}\,{}^{(\Pi)}O(x).$$

La première de ces relations donne

$${}^{(\Pi)}O(x+2\Pi) = {}^{(\Pi)}O(x),$$

en vertu de quoi *la fonction* ${}^{(\Pi)}O(x)$ *est unipériodique avec la période* 2Π; *et cette dernière est élémentaire*. Car, d'après l'équation différentielle (32), toute période de ${}^{(\Pi)}O(x)$ est le produit de la période élémentaire de ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ par quelque multiplicateur entier, pour lequel la première des formules (53) s'oppose à ce que l'on prenne 1.

366. *On a, pour le développement de cette fonction en série factorielle trigonométrique, la formule*

$$(54)\quad \begin{cases} {}^{(\Pi)}O(x) = \lim \left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x+N\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}N\Omega} \cdots \dfrac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x+\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}\Omega} \times \dfrac{\Pi}{\pi}\sin\dfrac{\pi}{\Pi}x \right. \\ \qquad\qquad \left. \times \dfrac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-\Omega)} \cdots \dfrac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-N\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-N\Omega)} \right], \text{ (pour } N \text{ infini).} \end{cases}$$

On obtient effectivement cette fonction (351), (359), (360, III), en formant le produit de tous les facteurs (31) dont les jalons remplissent le rectangle $[M, N]$, en cherchant ensuite la limite de ce produit pour M infini, puis la limite de cette limite pour N infini.

D'après le n° **293**, les limites, pour M infini, des produits partiels de ceux de ces facteurs où $n = 0$ et de ceux où $n \neq 0$ sont

$$o(x, \Pi) = \frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}x \qquad \text{et} \qquad o(x, \Pi, n\Omega) = \frac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-n\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-n\Omega)},$$

moyennant quoi, la limite (toujours pour M infini) du produit total considéré est bien le produit des $2N+1$ facteurs entre crochets dans le second membre de la formule (54) qui se trouve ainsi démontrée.

367. La relation (35) donne immédiatement la formule analogue

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} {}^{(\Pi)}O(x,\theta) = \lim & \left[\frac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-\theta+N\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-\theta+N\Omega)}\cdots\right.\\ & \left.\times\frac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-\theta)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-\theta)}\cdots\frac{\sin\frac{\pi}{\Pi}(x-\theta-N\Omega)}{\sin\frac{\pi}{\Pi}(-\theta-N\Omega)}\right], \text{(pour N infini)}. \end{aligned}\right.$$

368. L'accouplement des deux facteurs où le multiplicateur de Ω a des valeurs égales et de signes contraires, suivi de transformations faciles, change la formule (54) en cette autre, ne contenant plus qu'une série factorielle simplement infinie :

$$\begin{aligned} {}^{(\Pi)}O(x) &= \frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}x\left(1+\frac{4q\sin^2\frac{\pi}{\Pi}x}{(1-q)^2}\right)\cdots\left(1+\frac{4q^n\sin^2\frac{\pi}{\Pi}x}{(1-q^n)^2}\right)\cdots\\ &= \frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}x\left(\frac{1-2q\cos\frac{2\pi}{\Pi}x+q^2}{(1-q)^2}\right)\cdots\left(\frac{1-2q^n\cos\frac{2\pi}{\Pi}x+q^{2n}}{(1-q^n)^2}\right)\cdots \end{aligned}$$

La constante q est toujours définie par la formule (49), et il n'importe pas ici que ρ'', second élément de $\rho=\frac{\Omega}{\Pi}$, soit $\gtrless 0$; mais dans le premier cas on peut écrire

$${}^{(\Pi)}O(x) = \frac{\Pi}{\pi}\sin\frac{\pi}{\Pi}x\frac{\left(1-2q\cos\frac{2\pi}{\Pi}x+q^2\right)\cdots\left(1-2q^n\cos\frac{2\pi}{\Pi}x+q^{2n}\right)\cdots}{[(1-q)\cdots(1-q^n)\cdots]^2},$$

parce que les séries factorielles formant les termes de cette fraction sont toutes deux convergentes (370, *inf.*).

La formule (55) se met par les mêmes moyens sous des formes semblables que le lecteur construira facilement.

Ces développements des fonctions ${}^{(\Pi)}O(x)$, ${}^{(\Pi)}O(x,\theta)$ rendent

relativement facile la construction de Tables contenant les valeurs de leurs logarithmes, fournissant par suite (355) celles de toute fonction méromorphe ayant Π et Ω pour périodes (*Cf.* **292**, III).

369. La fonction ${}^{(\Pi)}O(x)$ peut être développée en une série trigonométrique très remarquable; mais avant de la construire, il nous faut entrer dans quelques considérations générales qui, d'ailleurs, sont utiles dans plus d'une autre circonstance.

Étant donnée la suite des valeurs d'une variante à un indice,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

le produit P_n des n premières est une nouvelle variante de même indice n, qui peut ou non tendre vers quelque limite P, pour n infini. On dit dans le premier cas que la *série factorielle*

$$(56) \qquad u_1 u_2 \ldots u_n \ldots,$$

ayant u_n pour *facteur général,* est *convergente,* et l'on nomme la limite P son *produit,* que l'on représente aussi par la notation (56).

On dit dans le second cas qu'elle est *divergente,* et aussi qu'elle a un *produit infini,* si P_n est une quantité infinie.

Quand l'un des facteurs est nul, P_n finit par l'être sans cesse, et la série a un produit $= 0$. Ce cas excepté, on peut formuler cette observation générale :

Pour que la série (56) *soit convergente et ait un produit différent de* 0, *il est nécessaire et suffisant que* $P_{n,p}$, *produit des* p *facteurs qui suivent le* $n^{\text{ième}}$, *tende vers* 1 *pour* n *infini, quelque relation qui puisse être établie entre* n *et* p.

On a effectivement

$$P_{n+p} - P_n = P_n(P_{n,p} - 1),$$

d'où $\lim(P_{n,p} - 1) = 0$, si l'on suppose que P_n tend vers une limite $\neq 0$.

Réciproquement, si $\lim P_{n,p} = 1$, on peut assigner un entier ν assez grand pour que, quel que soit p, $P_{\nu,p}$ soit de la forme $1 + e$, e ayant un module inférieur à une quantité positive $\varepsilon < 1$. Alors

pour toute valeur de n supérieure à ν, $P_n = P_\nu . P_{\nu, n-\nu}$ a un module inférieur à $(1+\varepsilon) \bmod P_\nu$, et, dès lors, n'est pas infinie. Donc $P_{n+p} - P_n = P_n(P_{n,p} - 1)$ tend vers zéro, et P_n est une variante douée de limite (54*).

Pour les mêmes valeurs de n, on a enfin $\bmod P_n > (1-\varepsilon) \bmod P_\nu$; donc $\lim P_n$ n'est pas nulle.

370. De là il résulte notamment que si la série (56) est convergente sans avoir un produit nul, son facteur général tend vers 1, que par suite il est de la forme

$$u_n = 1 + a_n,$$

où a_n est une quantité infiniment petite. On a maintenant la règle particulière de convergence que voici :

Si

$$(57) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

modules de

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

forment une série (ordinaire) convergente, la série factorielle

$$(58) \qquad (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n)\ldots$$

est convergente aussi (avec un produit $\neq 0$, *quand aucun facteur ne s'évanouit).*

I. *On obtient une série convergente en écrivant, dans un ordre quelconque, les quantités*

$$(59) \quad 1, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_1\alpha_3, \quad \alpha_2\alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \quad \ldots,$$

produits des modules (57) *associés* 0 *à* 0, 1 *à* 1, 2 *à* 2, 3 *à* 3, ..., *indéfiniment et de toutes les manières possibles, mais sans répétition.*

En posant

$$(60) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = \Sigma_1,$$

et formant les carré, cube, ... de cette série par la règle du

n° **111***, on voit immédiatement que les séries

$$(61) \quad \begin{cases} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 + \ldots = \Sigma_2, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

sont convergentes, et que leurs sommes satisfont aux inégalités

$$\Sigma_2 < \Sigma_1^2, \qquad \Sigma_3 < \Sigma_1^3, \qquad \ldots.$$

Si l'on a $\Sigma_1 < 1$, la série $1 + \Sigma_1 + \Sigma_1^2 + \ldots$ est convergente, et la série $1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots$ aussi à plus forte raison; la série de séries, formée par 1 suivi des premiers membres des égalités (60), (61), remplit donc les conditions permettant de lui appliquer le théorème du n° **107***, d'où résulte immédiatement le point en question.

Mais il subsiste encore si l'on a $\Sigma_1 \geqq 1$; car alors, en appelant α_ν un terme assez éloigné dans la série (60) pour que le reste correspondant $\Sigma_1^{(\nu)}$ soit < 1, puis $\Sigma_2^{(\nu)}$, $\Sigma_3^{(\nu)}$, ... ce que deviennent les séries (61) quand on y substitue 0 aux modules

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_\nu,$$

puis enfin

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_\nu$$

les sommes des produits de ces derniers modules associés 1 à 1, 2 à 2, ..., ν à ν, on a évidemment, au delà de $n = \nu$,

$$\Sigma_n = \Sigma_n^{(\nu)} + \sigma_1\Sigma_{n-1}^{(\nu)} + \sigma_2\Sigma_{n-2}^{(\nu)} + \ldots + \sigma_\nu\Sigma_{n-\nu}^{(\nu)},$$

moyennant quoi 1, Σ_1, Σ_2, Σ_3, ... forment encore une série convergente, parce que la condition $\Sigma_1^{(\nu)} < 1$ assure la convergence de la série $1 + \Sigma_1^{(\nu)} + \Sigma_2^{(\nu)} + \ldots$, comme nous l'avons constaté tout à l'heure.

II. Les produits

$$1, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_1a_2, \quad a_1a_3, \quad a_2a_3, \quad \ldots, \quad a_1a_2a_3, \quad \ldots,$$

ayant précisément pour modules les produits semblables (59), les conclusions de l'alinéa précédent leur sont textuellement applicables. Or on peut évidemment les écrire dans un ordre de succession, et assigner un entier N_n infini avec n, tous deux tels que la

somme des N_n premiers termes de la série convergente qu'ils forment ainsi soit précisément le développement de P_n produit des n premiers facteurs de la série factorielle (58). Cette dernière est donc convergente, puisque P_n a pour limite la somme de la série ordinaire dont nous venons de parler.

371. *Sous la même hypothèse, la série factorielle*

$$(62) \qquad (1+a_1x)(1+a_2x)\ldots(1+a_nx)\ldots$$

converge pour toute valeur de x, et a pour produit une fonction indéfiniment olotrope de cette variable.

Car, en appelant ξ un module quelconque attribué à x, la convergence de la série (60) entraîne toujours celle de la série correspondante

$$\alpha_1\xi+\alpha_2\xi+\alpha_3\xi+\ldots;$$

en outre, l'application des considérations de l'alinéa II du numéro ci-dessus aux quantités

$$1,\quad a_1x,\quad a_2x,\quad a_3x,\quad \ldots,$$

$$a_1a_2x^2,\quad a_1a_3x^2,\quad a_2a_3x^2,\quad \ldots,\quad a_1a_2a_3x^3,\quad \ldots,$$

permet de mettre immédiatement le produit de la série factorielle (62) sous forme d'une série entière en x dont la convergence est illimitée.

On remarquera que (si $a_n \neq 0$) cette fonction indéfiniment olotrope a les quantités

$$-\frac{1}{a_1},\quad -\frac{1}{a_2},\quad \ldots,\quad -\frac{1}{a_n},\quad \ldots$$

pour zéros tous simples, et qu'elle n'en peut avoir d'autres (**369**).

372. Nous avons encore quelques mots à dire sur les séries doublement infinies de la forme

$$(63) \quad \ldots+a_{-n}x^{-n}+\ldots+a_{-1}x^{-1}+a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m+\ldots,$$

c'est-à-dire procédant suivant les puissances à exposants entiers d'une seule variable x, croissant (algébriquement) de gauche à droite, décroissant de droite à gauche.

I. Une pareille série pouvant être considérée comme provenant de la réunion de deux séries entières par rapport, l'une à x, l'autre à $\frac{1}{x}$, *la condition de sa convergence pour quelque valeur de* x *est l'existence de deux quantités positives* $S < R$ *telles, que le module du terme général soit fini pour* $\operatorname{mod} x = R$ *quand son indice est infini positif, et aussi pour* $\operatorname{mod} x = S$ *quand cet indice est infini négatif* (**272**), (**114***).

II. Quand de pareilles quantités existent, *les modules mêmes des termes de la série forment une série convergente* pour $S < \operatorname{mod} x < R$, c'est-à-dire pour toute valeur de x intérieure à la *couronne de convergence* $[S, R]$ comprise entre les circonférences décrites de l'origine O_x pour centre avec S, R pour rayons (*loc. cit.*).

III. *Dans la couronne de convergence* $[S, R]$, *la somme de la série* (63) *est une fonction olotrope de* x.

Les séries entières

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \\ '\psi(x') &\qquad\quad a_{-1} x' + \ldots + a_{-n} x'^n + \ldots, \end{aligned}$$

ayant évidemment les cercles de convergence $[O_x, R]$, $\left[O_{x'}, \frac{1}{S}\right]$ décrits des origines O_x, $O_{x'}$ pour centres, avec R, $\frac{1}{S}$ pour rayons, y sont respectivement olotropes (**140***); la fonction composée $\psi(x) = '\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc olotrope à l'extérieur du cercle $[O_x, S]$ décrit de O_x pour centre avec S pour rayon, parce que la fonction simple $\frac{1}{x}$ y jouit de cette propriété, et qu'elle n'y prend que des valeurs intérieures au cercle $\left[O_{x'}, \frac{1}{S}\right]$ (**153***), (**248***). La somme $\varphi(x) + \psi(x)$ de la série (63) est donc olotrope dans l'espace à la fois intérieur à $[O_x, R]$ et extérieur à $[O_x, S]$, c'est-à-dire dans la couronne $[S, R]$.

Comme à l'intérieur de la même couronne, la série (63) ne cesse pas d'être convergente quand on réduit ses termes à leurs modules (II), *on y peut différentier ou intégrer sa somme terme à terme* (**275*** *bis*).

IV. *Pour que la somme $f(x)$ de la série* (63) *soit nulle identiquement dans la couronne précitée, il suffit évidemment et il faut aussi que tous ses coefficients soient nuls.*

1° Pour toutes valeurs de x non extérieures à une couronne comprise entre les circonférences de centre commun O_x et de rayons S', R' donnant

$$S < S' < R' < R,$$

où les lettres S, R conservent la signification qu'elles avaient dans l'alinéa II, on peut assigner des limites supérieures M_m, N_{-n} indépendantes de x et tendant vers o pour m, $-n$ infinis, aux sommes des deux séries (simplement infinies) formées par les modules des termes de (63) dont les indices surpassent m ou sont inférieurs à $-n$, et aux modules mêmes des sommes des deux séries formées par les termes dont il s'agit (117*).

2° En s'appuyant sur cette observation, et en raisonnant comme au n° 130*, on prouvera sans difficulté que, parmi les valeurs de x ayant un même module r compris entre S et R, il en existe nécessairement quelqu'une rendant

$$\operatorname{mod} f(x) \geqq \alpha_g r^g,$$

module correspondant d'un terme quelconque de la série (63). Si donc on a toujours $f(x) = o$, on aura certainement $a_g = o$ pour toute valeur positive, nulle ou négative de l'indice g.

V. Pour que deux séries de cette forme aient des sommes identiquement égales, il est suffisant et nécessaire que les coefficients de deux termes semblables y soient indéfiniment égaux (*Cf.* 137*).

VI. *Pour toutes valeurs de x intérieures à une couronne de convergence commune à plusieurs séries de la forme* (63), *on peut, comme si elles étaient de simples polynômes entiers en x et x^{-1}, développer en une nouvelle série de même forme, admettant la même couronne de convergence, toute expression entière formée avec leurs sommes* (*Cf.* 116*, VII).

373. *En supposant $\rho'' > o$ comme au n° 362, on a pour* $^{(II)}O(x)$

le développement doublement infini

$$(64)\quad \begin{cases} {}^{(\Pi)}O(x) = \mathrm{H}\Big[\ldots + (-1)^{m-1} q^{\frac{m(m+1)}{2}} e^{-(2m+1)\frac{\pi i}{\Pi}x} + \ldots - e^{-\frac{\pi i}{\Pi}x} + e^{\frac{\pi i}{\Pi}x} \\ \qquad - q^{\frac{1.2}{2}} e^{3\frac{\pi i}{\Pi}x} + \ldots + (-1)^m q^{\frac{m(m+1)}{2}} e^{(2m+1)\frac{\pi i}{\Pi}x} + \ldots\Big], \end{cases}$$

qui converge pour toute valeur de x, et que l'accouplement des exponentielles transforme en la série simplement infinie

$${}^{(\Pi)}O(x) = 2\mathrm{H}i\left(\sin\frac{\pi}{\Pi}x - q^{\frac{1.2}{2}}\sin 3\frac{\pi}{\Pi}x + q^{\frac{2.3}{2}}\sin 5\frac{\pi}{\Pi}x - \ldots\right),$$

formules où l'on doit prendre

$$(65)\qquad \mathrm{H} = \frac{\Pi}{2\pi i}\,\frac{1}{[(1-q)(1-q^2)\ldots]^3}.$$

I. Si l'on pose

$$(66)\qquad y = e^{\frac{\pi i}{\Pi}x},$$

la substitution des exponentielles aux sinus permet de mettre la formule (54) sous la forme

$$(67)\quad \begin{cases} {}^{(\Pi)}O(x) = -\dfrac{\Pi}{2\pi i}\,\dfrac{1}{[(1-q)(1-q^2)\ldots]^2}\,\dfrac{1}{y}\,[(1-y^2)(1-qy^2)(1-q^2y^2)\ldots] \\ \qquad \times [(1-qy^{-2})(1-q^2y^{-2})\ldots], \end{cases}$$

parce que l'égalité $\bmod q < 1$ entraîne la convergence de la série $\bmod q + \bmod q^2 + \ldots$, puis (370) celle des trois séries factorielles entre crochets, ceci pour toute valeur de $y \neq 0$.

Comme les deux dernières sont développables en deux séries entières, l'une en y, l'autre en y^{-1} (371), le produit ${}^{(\Pi)}O(x)$ est développable en une série de la forme (63) par rapport à y (372, VI). Nous allons en calculer les coefficients.

II. Le développement de l'expression

$$(68)\quad \begin{cases} \mathfrak{f}_n(z) = (1+q^n z^{-1})(1+q^{n-1}z^{-1})\ldots(1+qz^{-1}) \\ \qquad \times (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots(1+q^{n-1}z), \end{cases}$$

où n est un entier positif, où z représente une variable indépen-

dante, est une somme de monômes en z à exposants positifs et négatifs compris entre $-n$ et $+n$ inclusivement, et en posant

$$(69) \qquad \mathfrak{f}_n(z) = \mathfrak{a}_{-n} z^{-n} + \ldots + \mathfrak{a}_g z^g + \ldots + \mathfrak{a}_n z^n,$$

les coefficients $\mathfrak{a}$ sont des polynômes entiers en q s'obtenant comme il suit.

La relation de définition donne immédiatement

$$\mathfrak{f}_n(qz) = \frac{1+z^{-1}}{1+q^n z^{-1}} \frac{1+q^n z}{1+z} \mathfrak{f}_n(z) = \frac{1+q^n z}{q^n+z} \mathfrak{f}_n(z),$$

c'est-à-dire

$$(q^n+z)\mathfrak{f}_n(qz) = (1+q^n z)\mathfrak{f}_n(z),$$

d'où en remplaçant $\mathfrak{f}_n$ par son développement (69), et égalant les coefficients de z^{g+1}, $(g<n)$,

$$q^{n+1+g}\mathfrak{a}_{g+1} + q^g \mathfrak{a}_g = \mathfrak{a}_{g+1} + q^n \mathfrak{a}_g,$$

puis la relation générale entre deux coefficients consécutifs

$$\mathfrak{a}_g = \frac{1}{q^g} \frac{1-q^{n+1+g}}{1-q^{n-g}} \mathfrak{a}_{g+1}.$$

Si, maintenant, on fait successivement dans cette récurrence $g = k, k+1, \ldots, (n-1)$, si l'on multiplie membre à membre, et si l'on observe que $\mathfrak{a}_n$ est nécessairement égal à $q^{1+2+\ldots+(n-1)}$, produit des coefficients de z dans les n derniers facteurs de l'expression (68), on trouve pour l'expression générale de $\mathfrak{a}_k$,

$$\mathfrak{a}_k = \frac{(1-q^{n+1+k})(1-q^{n+1+k+1})\ldots(1-q^{2n})}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{n-k})} q^{\frac{k(k-1)}{2}}.$$

III. Quand n augmente indéfiniment, $\mathfrak{f}_n(z)$ a pour limite

$$f(z) = [(1+z)(1+qz)(1+q^2 z)\ldots][(1+qz^{-1})(1+q^2 z^{-1})\ldots],$$

parce que les séries factorielles entre crochets sont convergentes pour la même cause que celles de la relation (67); et il est évident (370) que le polynôme $\mathfrak{a}_k$ se change en une série entière en q, dont la somme est précisément a_k, coefficient de z^k dans le développement de $f(z)$ en série doublement infinie procédant suivant les puissances de z à exposants entiers positifs et négatifs.

Le dénominateur de la fraction figurant dans l'expression de $\mathfrak{a}_k$ a pour limite le produit (non $=0$) de la série factorielle $(1-q)(1-q^2)\ldots$, qui est convergente comme toutes celles dont nous avons parlé. Quant au numérateur, il a pour limite 1, parce qu'il est précisément le produit des $n-k$ facteurs suivant le $(n+k)^{\text{ième}}$ dans la même série factorielle (369). On a donc

$$(70) \qquad a_k = \lim \mathfrak{a}_k = \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\ldots}.$$

IV. Le développement du produit des trois derniers facteurs de l'expression (67) étant évidemment égal à celui de

$$\frac{f(-y^2)}{y} = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} (-1)^k a_k y^{2k-1},$$

on trouve bien la relation (64) complétée par la formule (65), en faisant pour a_k et y les substitutions (70), (66), et en écrivant $m+1$ à la place de k.

374. *Les fonctions unipériodiques* ${}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$, ${}^{(\Pi)}O(x)$ *ne sont pas polarisées* (264).

Car si la première l'était, sa dérivée $-{}^{(\Pi)}\Xi_2(x)$ le serait aussi (270). Or, c'est impossible, car celle-ci admet l'autre période Ω (345), et, dans toute bande construite sur Π, parallèlement à Ω, qui contient une infinité de mailles élémentaires, l'équation $-{}^{(\Pi)}\Xi_2(x) = u_0$ possède, quelle que soit u_0, des racines en nombre illimité (265), (320, III).

Si c'était la seconde, la fonction $\dfrac{{}^{(\Pi)}O'(x)}{{}^{(\Pi)}O(x)} = {}^{(\Pi)}\Xi_1(x)$ (352, I) serait aussi polarisée (270); or nous venons de constater l'impossibilité de ce fait.

Expressions générales des intégrales elliptiques.

375. Au moyen des fonctions que nous venons d'étudier (et des fonctions algébriques, logarithmiques, etc.), on peut exprimer toutes les intégrales elliptiques, et en particulier les plus simples

d'entre elles, auxquelles toutes peuvent être réduites (298). Mais auparavant, il convient de résoudre le problème suivant dont on remarquera l'analogie avec celui du n° 295, et qui se confond en quelque sorte avec celui du calcul d'une intégrale elliptique quelconque (377, *inf.*).

En désignant par $f(x)$ une fonction bipériodique indéfiniment méromorphe, calculer l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx.$$

Nous pouvons procéder exactement comme si $f(x)$ était une simple fraction rationnelle. Soient effectivement (Π, Ω), un couple de périodes de $f(x)$ (qu'il y aurait avantage à prendre élémentaires s'il s'agissait de calculs numériques) et $\Xi_1(x)$, $\Xi_2(x)$, ..., $O(x)$, les fonctions connexes des paragraphes précédents, construites avec Π, Ω pour fausses ou vraies périodes.

D'après ce qu'on a vu au n° 347, $f(x)$ s'exprime linéairement au moyen des fonctions Ξ par une formule pouvant être écrite

$$(1) \qquad f(x) = K + \Sigma A_{i,j}\Xi_i(x-\alpha_j),$$

α_1, ..., α_j, ... étant les infinis numériquement distincts que $f(x)$ possède dans une maille donnée de son réseau, et $A_{i,j}$ le numérateur de la fraction simple qui a $(x-\alpha_j)^i$ pour dénominateur dans la décomposition connue de $f(x)$.

L'intégration indéfinie de cette formule donne, en appelant C la constante arbitraire,

$$\int f(x)dx = C + Kx + \Sigma A_{i,j}\int \Xi_i(x-\alpha_j)dx.$$

Or on a (aux constantes arbitraires près) :

1° Quand i est > 1 (343, I),

$$\int \Xi_i(x-\alpha_j)dx = \frac{1}{-i+1}\Xi_{i-1}(x-\alpha_j);$$

2° Quand $i = 1$ (352, I),

$$\int \Xi_1(x-\alpha_j)dx = lO(x-\alpha_j),$$

ce qui achève la solution du problème.

L'intégrale se compose donc de quatre parties, savoir : 1° la fonction linéaire $C + Kx$; 2° une partie méromorphe et bipériodique,

aux périodes Π, Ω de $f(x)$, c'est l'ensemble des termes contenant des fonctions Ξ d'indices $\geqq 2$ (345); 3° une partie encore méromorphe, ayant Π, Ω pour fausses périodes, c'est le groupe des termes contenant des fonctions Ξ_1; 4° une partie non méromorphe ayant des phases singulières logarithmiques, c'est celle qui contient les fonctions $lO(x-\alpha_j)$; ces termes proviennent de ceux de la formule de décomposition (1) où Ξ a l'indice 1. Selon les valeurs des coefficients $A_{i,j}$, telle ou telle de ces parties existera effectivement ou manquera dans l'expression de notre intégrale. Et l'on aperçoit immédiatement les conditions que $f(x)$ doit remplir pour que l'intégrale soit de telle ou telle sorte; pour que celle-ci soit méromorphe par exemple, la condition est la même que si $f(x)$ était une fraction rationnelle : *il faut et il suffit que tous les résidus de $f(x)$ soient nuls.*

Chacune des fonctions $\Xi_2(x-\alpha_j)$ entrant dans la deuxième partie de l'intégrale est du second ordre, parce que sa maille élémentaire contient un seul infini qui est double (321); elle est ainsi exprimable algébriquement au moyen d'une fonction quelconque du second ordre à périodes égales (331), (381, *inf.*); de plus, les fonctions correspondantes $\Xi_3(x-\alpha_j)$, $\Xi_4(x-\alpha_j)$, ... sont les dérivées de ces expressions à des facteurs numériques près (343, I). *Cette seconde partie de l'intégrale est donc transformable en un polynôme linéaire par rapport à des fonctions algébriques d'une même fonction du second ordre et à quelques-unes de leurs dérivées.*

376. On donne souvent à la solution de ce problème une forme différente mais bien moins nette, en exprimant $f(x)$ au moyen d'une fonction du second ordre aux mêmes périodes et de sa dérivée (381, *inf.*), puis en faisant usage de formules de réduction qui ramènent le calcul de l'intégrale à celui de quatre autres relativement très simples. Mais le fond reste le même, et l'algorithme devient celui de la réduction de l'intégrale elliptique la plus générale, tant soit peu déguisé.

377. Le calcul de l'intégrale elliptique quelconque

$$(2)\qquad \int F\left[u, \sqrt{\varphi(u)}\right] du,$$

F désignant naturellement une fonction rationnelle de deux variables, et $\varphi(u)$ un polynôme du troisième ou du quatrième degré en u, se ramène au problème précédent, comme nous le disions tout à l'heure. Appelons effectivement $\mathcal{E}(x)$ une intégrale $E_\infty(x)$ ou $E(x)$ suivant le cas (305), (302), de l'équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\varphi(u)},$$

et exécutons dans l'intégrale (2) la substitution

$$(3) \qquad u = \mathcal{E}(x), \qquad \text{d'où} \qquad du = \mathcal{E}'(x)\,dx.$$

Comme on a

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\varphi(u)} = \mathcal{E}'(x),$$

il vient

$$\int F[u, \sqrt{\varphi(u)}]\,du = \int F[\mathcal{E}(x), \mathcal{E}'(x)]\,\mathcal{E}'(x)\,dx.$$

Or maintenant (255) la fonction sous le signe $\int$ n'est pas autre chose qu'une certaine fonction de x, méromorphe et bipériodique. Après avoir calculé cette intégrale (375), il suffira d'y remplacer x par sa valeur en u tirée de l'équation (3), pour obtenir l'intégrale cherchée (2).

378. Le calcul de l'une des intégrales elliptiques réduites (**298**) est naturellement le cas le plus simple de la question précédente. La substitution (3) ramène l'intégrale de première espèce à

$$(4) \qquad \int dx,$$

celles de deuxième espèce à

$$(5) \qquad \int \mathcal{E}(x)\,dx, \quad \int \mathcal{E}(x)^2\,dx,$$

et celle de troisième espèce à

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{\mathcal{E}(x) - a}.$$

L'intégrale (4) est simplement la fonction inverse de $\mathcal{E}(x)$, c'est-à-dire la racine de l'équation (3) résolue par rapport à x.

La première des intégrales (5) est d'une nature ou d'une autre,

selon que $\varphi(u)$ est du troisième ou du quatrième degré. Dans le premier cas, $\mathcal{E}(x)$ a un infini double (305, I), et l'intégrale est méromorphe. Dans le second, $\mathcal{E}(x)$ a deux infinis simples (incongrus) et l'intégrale a pour valeur $A\,l\,\frac{O(x-\alpha)}{O(x-\beta)}+C$; α, β désignent ici ces infinis de $\mathcal{E}(x)$, et A, — A, les résidus correspondants (328). De même pour la seconde de ces intégrales, dont la nature dépend en outre des valeurs des coefficients des premiers termes du développement de $\mathcal{E}(x)$ en série procédant suivant les puissances de $(x-\alpha)$ à exposants entiers, les premiers négatifs, différence où α représente un infini de la fonction.

Comme $\mathfrak{a}$ n'est pas un zéro de $\varphi(u)$ (224), cette quantité n'est pas une valeur cardinale de $\mathcal{E}(x)$ (304, IV), la fonction figurant dans l'intégrale (6) n'a que des infinis simples, et celle-ci a toujours des phases singulières logarithmiques.

Si $\mathfrak{a}$ était un zéro de $\varphi(u)$, c'est-à-dire une valeur cardinale de $\mathcal{E}(x)$, la fonction sous le signe $\int$ n'aurait que des infinis doubles, et l'intégrale serait méromorphe. Cette influence de la valeur de $\mathfrak{a}$ sur la nature de l'intégrale, s'accorde avec la distinction analogue que nous avons dû faire dans la réduction de l'intégrale ultra-elliptique.

Plus tard (415 *et suiv.*, *inf.*) nous achèverons cette solution, en transformant les intégrales elliptiques de façon à spécifier la fonction $\mathcal{E}(x)$ de la manière la plus avantageuse.

CHAPITRE XI.

SUITE DES TROIS PRÉCÉDENTS. — POINTS SAILLANTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS BIPÉRIODIQUES DU SECOND ORDRE.

Expression d'une fonction bipériodique quelconque au moyen d'une fonction du second ordre aux mêmes périodes. — Addition et soustraction des arguments ; multiplication et division.

379. Dans sa maille élémentaire, une fonction bipériodique du second ordre ne peut avoir que deux infinis simples ou un seul infini double (**321**), et nous avons remarqué (**323**) que les fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$, étudiées au début de cette théorie, sont du second ordre.

Réciproquement, *toute fonction bipériodique du second ordre* $u = f(x)$ *est une fonction* $E(x)$ *si ses infinis sont simples, une fonction* $E_\infty(x)$ *s'ils sont doubles.*

Nous reportant au n° **333**, nous remarquerons que dans le premier cas on a $m = 2$, $\gamma = 2$, d'où $m + \gamma = 4$; u est donc l'intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \varphi(u) = 0,$$

où $\varphi(u)$ est un polynôme de degré effectif 4, et sans facteur multiple. Effectivement si $\varphi(u)$ était divisible par $(u - a)^2$, la substitution $u = a + \frac{1}{v}$ changerait l'équation différentielle (1) en une autre exprimant $\frac{dv}{dx}$ par un radical carré portant sur un polynôme en v, du deuxième degré seulement, et v, u par suite, ne seraient pas bipériodiques (**228** *et suiv.*).

Or l'équation différentielle (1) est bien celle d'une fonction $E(x)$, et le raisonnement est le même pour le second cas de l'énoncé.

Cette identité complète entre les fonctions du second ordre et les fonctions $E(x)$, $E_\infty(x)$ nous permet de *confondre désormais toutes celles-ci sous la dénomination de fonctions du second ordre, les premières à infinis simples, les dernières à infinis doubles.*

380. De toutes les fonctions bipériodiques méromorphes, celles du second ordre sont les plus simples, notamment par leur équation différentielle (333); en outre, toutes les autres leur sont liées par de simples équations du premier ou du deuxième degré (331). A ce double titre, elles méritent donc une étude plus approfondie; mais l'exiguïté de notre cadre n'en comporte pas les détails étendus et minutieux, et nous devons nous borner à de simples aperçus.

Une fonction du second ordre dépend de six paramètres, en particulier des cinq coefficients du polynôme du quatrième degré en u qui figure dans l'équation différentielle (celui de u^4 étant $= 0$ pour les fonctions à infinis doubles), et de la valeur qu'elle prend pour une valeur initiale donnée de x, l'ambiguïté comportée par ces données se levant par la désignation de celle des deux valeurs opposées du radical, à choisir pour sa valeur initiale.

Mais il est souvent avantageux de choisir ces paramètres d'une autre manière. *On peut prendre à cet effet les deux périodes, la constante supplémentaire, un zéro, un infini, et la valeur de la fonction qui correspond à une valeur de x n'étant ni un zéro ni un infini.* Il résulte effectivement : 1° du n° 354, qu'on peut toujours construire une fonction du second ordre pour laquelle ces six objets aient des valeurs données quelconques (n'impliquant toutefois aucune contradiction, comme par exemple si le moment des périodes données était nul, si la valeur du zéro donné était congrue à celle de l'infini, etc.); 2° du n° 334, que deux fonctions du second ordre ne peuvent satisfaire simultanément à toutes ces conditions sans être identiques.

Ce sont tels ou tels de ces paramètres, qui habituellement entrent, explicitement ou implicitement, dans les formules relatives aux fonctions du second ordre.

381. *Soient $u = f(x)$ une fonction du second ordre ayant* S *pour constante supplémentaire, et* $U = F(x)$ *une fonction*

d'ordre m admettant les périodes élémentaires de $f(x)$; $F(x)$ *s'exprime algébriquement au moyen de* $f(x)$:

1° *Si l'on a l'identité*

$$F(S-x)=F(x), \tag{2}$$

par la formule

$$F(x)=\frac{M}{L}, \tag{3}$$

M, L *désignant des polynômes entiers en* $f(x)$ *sans facteur commun, dans l'ensemble desquels le degré effectif de cette fonction atteint précisément* $\frac{m}{2}$ (*alors nécessairement entier*);

2° *Sinon, par la formule*

$$F(x)=\frac{M+N\sqrt{\psi(f)}}{L}, \tag{4}$$

$\psi(f)$ *représentant le polynôme du quatrième ou du troisième degré en* $f(x)$, *produit des excès de cette fonction sur ses quatre ou trois valeurs cardinales* (304, IV), (305), *et* L, M, N *trois polynômes entiers en* f, *dont les degrés ne peuvent respectivement surpasser les limites* m, m, $m-2$.

I. La première partie de notre énoncé est un simple cas particulier du théorème du n° 331, où l'on a $d=2$ à cause de l'identité (2).

II. *Si* $f(x)$ *est la fonction* $u=E(x)$ *étudiée aux n*os **302** *et suivants, et si l'on appelle* $\chi(u)$ *un polynôme entier en u sans facteurs multiples, la condition nécessaire et suffisante pour que* $\sqrt{\chi(u)}$ *soit fonction méromorphe de x est que* $\chi(u)$ *se réduise au produit d'une constante par un nombre pair des facteurs linéaires de* $\varphi(u)$,

$$u-a,\quad u-b,\quad u-c,\quad u-d. \tag{5}$$

En vertu de la théorie des radicaux (125), celui que nous considérons ne peut cesser d'être fonction méromorphe de x que pour quelque valeur de x rendant $\chi(u)$ nul ou infini; et alors il cesse

effectivement de l'être ou non, selon que le degré de multiplicité de la valeur correspondante de x est impair ou pair (*loc. cit.*).

Soient $u - k$ un facteur linéaire de $\chi(u)$, et ξ une racine de $E(x) = k$. Si k n'est pas l'une des valeurs cardinales a, b, c, d, ξ est zéro simple de $u - k$ (304, IV), de $\chi(u)$ par suite qui n'a par hypothèse que des facteurs linéaires distincts, et notre radical cesse d'être olotrope en $x = \xi$. Si au contraire k est l'une de ces quatre valeurs, ξ est zéro double de $\chi(u)$, et notre radical est olotrope en $x = \xi$.

Soit ι un infini de $E(x)$; comme il est simple (304, V), son degré de multiplicité pour $\chi(u)$ est le degré même de ce polynôme. Notre radical reste donc méromorphe en $x = \iota$ ou non, suivant que ce degré est pair ou impair.

De la combinaison de ces deux observations, résulte bien l'exactitude du point que nous avions en vue.

III. *Pour que le même radical* $\sqrt{\chi(u)}$ *admette en outre les périodes* Π, Ω *de* $E(x)$, *il faut et il suffit que* $\chi(u)$ *soit une constante, ou bien le produit d'une constante par les quatre binômes* (5).

La condition énoncée est évidemment suffisante; car si elle est remplie, notre radical se réduit à une constante, ou bien, sauf un multiplicateur constant (302), à $E'(x)$ qui a bien Π, Ω pour périodes (319).

Pour prouver sa nécessité, supposons que $\chi(u)$ contienne seulement deux des facteurs linéaires (5), que l'on ait par exemple

$$\sqrt{\chi(u)} = \sqrt{K(u-b)(u-d)};$$

résolvons par rapport à x l'équation

$$E(x) - u = 0,$$

en prenant pour valeurs initiales un couple quelconque (x_0, u_0), de solutions numériques de cette équation, x_0 n'annulant pas toutefois $E'(x) = u'$, demi-dérivée partielle par rapport à $u' = \frac{du}{dx}$ du premier membre de l'équation différentielle de la fonction $u = E(x)$; faisons cheminer u de u_0 à u_0 sur deux boucles consécutives $[b]$,

$[a]$, enveloppant respectivement les points b, a, une seule fois chacun, mais aucun des deux autres c, d, et nommons x'_0 la valeur finale de x.

Inversement $u = \mathrm{E}(x)$ suit de u_0 en u_0 les deux boucles $[b]$, $[a]$, quand on fait décrire à x, considérée maintenant comme variable indépendante, le chemin que cette quantité traitée comme fonction implicite de u avait parcouru. Or

$$\mathrm{E}'(x) = \sqrt{\mathrm{G}(u-a)(u-b)(u-c)(u-d)},$$

et ce radical revient évidemment à sa valeur initiale; on a donc à la fois $\mathrm{E}(x'_0) = \mathrm{E}(x_0)$, $\mathrm{E}'(x'_0) = \mathrm{E}'(x_0)$, d'où (333, III)

$$x'_0 = x_0 + p\Pi + q\Omega.$$

Mais comme ce cheminement de x ramène $\sqrt{u-d}$, $\sqrt{u-b}$ à leurs valeurs initiales multipliées respectivement par $+1$ et -1, notre radical $\sqrt{\chi(u)}$ revient à sa valeur initiale multipliée par -1; il n'admet donc pas les périodes Π, Ω.

IV. Quand u est une fonction de second ordre à infinis doubles, on obtient de la même manière les conditions voulues pour que le radical $\sqrt{\chi(u)}$ (supposé non constant) soit méromorphe, puis pour qu'il ait les périodes de u. En appelant p, q, r les valeurs cardinales (finies) de u, *la première condition est que le polynôme $\chi(u)$ ne contienne que tels ou tels des facteurs linéaires*

$$u-p, \quad u-q, \quad u-r;$$

la seconde est qu'il les contienne tous trois.

V. En vertu de l'hypothèse combinée avec le théorème du n° 331, U est liée à u par une équation irréductible de la forme

$$\mathrm{LU}^2 - 2\mathrm{MU} + \mathrm{P} = 0,$$

où les degrés effectifs de L, M, P, polynômes entiers en u, ne surpassent pas m, l'un au moins atteignant ce nombre. La résolution de cette équation donne

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{M} + \sqrt{\mathrm{M}^2 - \mathrm{LP}}}{\mathrm{L}} = \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}\sqrt{\psi(u)}}{\mathrm{L}}, \tag{6}$$

$\psi(u)$ désignant un produit de facteurs linéaires distincts du polynôme $M^2 - LP$, tel que $\frac{M^2 - LP}{\psi(u)}$ soit un carré parfait N^2.

Le radical $\sqrt{\psi(u)}$ étant une fonction méromorphe de x, aux périodes élémentaires de $f(x)$, puisqu'il s'exprime au moyen de u, U par la formule inverse

$$\sqrt{\psi(u)} = \frac{LU - M}{N},$$

le polynôme $\psi(u)$ est bien de la forme indiquée par notre énoncé (II), (III), (IV), et la relation (6) coïncide avec la formule (4) que nous voulions établir.

D'ailleurs le degré du polynôme $M^2 - LP = N^2\psi(u)$ étant $\overline{\overline{<}}\, 2m$, celui du polynôme N est $\overline{\overline{<}}\, m - 2$.

382. *On peut mettre la formule* (4) *sous la forme*

$$(7) \qquad F(x) = \frac{M + Nf'(x)}{L},$$

se réduisant à

$$(8) \qquad F(x) = \frac{Nf'(x)}{L},$$

si l'on a par hasard

$$(9) \qquad F(S - x) = -F(x).$$

A cause de l'équation différentielle de la fonction du second ordre f (379), et à un facteur constant près, le radical de l'expression (4) se réduit précisément à $f'(x)$, d'où la formule (7).

La différentiation de l'identité fondamentale

$$(10) \qquad f(S - x) = f(x)$$

donne

$$(11) \qquad f'(S - x) = -f'(x).$$

Si donc la relation (9) a lieu, le changement de x en $S - x$ dans (7) n'y change que le signe du premier membre et celui du dernier terme du numérateur du second membre. On en conclut $M = 0$, puis la formule (8).

383. Le théorème précédent trouve une application intéressante dans la démonstration de celui-ci.

En appelant x, y deux variables indépendantes, on a

$$(12) \qquad f(x+y) = \frac{A + Bf'(x) + Cf'(y) + Df'(x)f'(y)}{H},$$

où A, B, C, D, H *sont des polynômes entiers en* $f(x)$, $f(y)$, *sans diviseur commun à tous, jouissant en outre des propriétés suivantes :* A, D, H *sont symétriques par rapport à* $f(x)$, $f(y)$, *mais la permutation de ces dernières fonctions change* B *en* C, *et inversement; les paires de degrés maximums en* $f(x)$, $f(y)$, *des* 5 *polynômes* A, B, C, D, H *sont respectivement* (2, 2), (0, 2), (2, 0), (0, 0), (2, 2).

I. Comme $f(x+y)$ est, pour toute valeur de y, une fonction de x, bipériodique et du second ordre, admettant les périodes élémentaires Π, Ω de $f(x)$, elle s'exprime au moyen de cette dernière par la formule (7), N étant indépendant de $f(x)$, L, M étant des polynômes entiers en $f(x)$, de degré 2 au plus. On trouve ainsi

$$(13) \qquad f(x+y) = \frac{M_0 + M_1 f + M_2 f^2 + N_0 f'(x)}{L_0 + L_1 f + L_2 f^2},$$

où maintenant $L_0, \ldots, M_0, \ldots, N_0$ sont tous indépendants de x.

En y changeant x en $S - x$, puis en ayant égard aux identités (10), (11), il vient une autre relation qui, retranchée membre à membre de la précédente, conduit à celle-ci

$$\frac{L_0}{N_0} + f(x)\frac{L_1}{N_0} + [f(x)]^2 \frac{L_2}{N_0} = \frac{2f'(x)}{f(x+y) - f(S-x+y)},$$

dont le second membre est, pour toute valeur de x, une fonction bipériodique de y, aux périodes Π, Ω. En attribuant maintenant à x trois valeurs particulières x_1, x_2, x_3, telles que $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ soient deux à deux inégales, on déduira de cette relation trois équations linéaires simultanées, d'où les rapports $\frac{L_0}{N_0}$, $\frac{L_1}{N_0}$, $\frac{L_2}{N_0}$ pourront être tirés, parce que leurs coefficients y ont un déterminant $\neq 0$ (411*, II). Et les expressions de ces rapports sont ainsi

des fonctions bipériodiques de y, aux périodes Π, Ω communes aux trois seconds membres.

En y ayant égard, et en raisonnant exactement de la même manière sur l'équation (13), on constatera que les trois autres rapports $\frac{M_0}{N_0}, \frac{M_1}{N_0}, \frac{M_2}{N_0}$ sont de même nature que les précédents; en d'autres termes, *les* 7 *coefficients* $L_0, \ldots$ *sont proportionnels, égaux même comme on peut évidemment le supposer, à autant de fonctions bipériodiques de y aux périodes* Π, Ω, *partant exprimables en* $f(y), f'(y)$ *par des formules du genre de* (7).

Ces raisonnements supposent que N_0 n'est pas $=0$, quelle que soit y; or c'est ce qui a lieu. Car autrement, on aurait, quelles que fussent x et y, $f(x+y)=f(S-x+y)=f(x-y)$, identité dont la fausseté est évidente.

II. On mettra ensuite la formule (13) sous la forme (12), en y portant ces expressions de $L_0, \ldots$, multipliant les deux termes du second membre par ce que devient son dénominateur quand on y substitue $-f'(y)$ à $f'(y)$, remplaçant partout $[f'(y)]^2$ par son expression entière en $f(y)$, $\varphi[f(y)]$ tirée de l'équation différentielle de $f(y)$ (379), en supprimant enfin tout facteur entier en $f(x), f(y)$, qui diviserait à la fois le dénominateur et les coefficients de $1, f'(x), f'(y), f'(x)f'(y)$ au numérateur.

III. Permutons maintenant x et y, appelons $\mathcal{A}, \ldots$ ce que deviennent A, ..., et égalons identiquement cette nouvelle expression de $f(x+y)$ à la première (12); on obtient ainsi

$$\begin{aligned}(H\mathcal{A}-\mathcal{H}A)&+(H\mathcal{B}-\mathcal{H}B)f'(x)\\ &+(H\mathcal{C}-\mathcal{H}C)f'(y)+(H\mathcal{D}-\mathcal{H}D)f'(x)f'(y)=0.\end{aligned}$$

Mais, comme les équations différentielles de $f(x), f(y)$ sont entières et du deuxième degré en $f'(x), f'(y)$ (379), de plus irréductibles (333), cette relation ne peut avoir lieu, quelles que soient x, y (332, II), sans que les polynômes en $f(x), f(y)$ y multipliant $1, f'(x), f'(y), f'(x)f'(y)$ soient tous identiquement nuls, ce qui donne

$$\frac{\mathcal{A}}{A}=\frac{\mathcal{B}}{B}=\frac{\mathcal{C}}{C}=\frac{\mathcal{D}}{D}=\frac{\mathcal{H}}{H}=1,$$

comme on le constate sans difficulté.

IV. En s'appuyant sur l'irréductibilité des équations différentielles de $f(x), f(y)$ et sur la symétrie de H, on prouve enfin que ce dernier polynôme ne peut avoir un diviseur entier en $f(x)$, rationnel en $f(y)$, $f'(y)$, sans qu'on ne puisse supposer celui-ci entier en $f(y)$ aussi, et indépendant de $f'(y)$; mais la démonstration est plus longue que difficile, et nous la supprimons pour abréger.

On en conclut que les expressions

$$(14) \qquad H, \quad A + Cf'(y), \quad B + Df'(y),$$

considérées comme des polynômes entiers en $f(x)$, n'ont aucun diviseur commun de ce genre, dont le degré effectif soit > 0. Car ce diviseur commun, forcément rationnel en $f(y)$, $f'(y)$, pourrait être supposé se réduire à un simple polynôme entier en $f(x), f(y)$ seulement, se transformant dès lors en lui-même par la substitution de $S - y$ à y, divisant ainsi

$$H, \quad A - Cf'(y), \quad B - Df'(y)$$

en outre et à la fois, divisant simultanément en conséquence A, B, C, D, H, lesquels, au contraire, ont été débarrassés de tout diviseur commun.

L'égalité identique des seconds membres des relations (12), (13) et l'irréductibilité de l'équation différentielle de $f(x)$ assurant la proportionnalité des expressions (14) à trois polynômes entiers en $f(x)$, de degrés maximums 2, 2, 0, ces mêmes degrés seront précisément ceux des expressions considérées, puisqu'elles n'ont aucun diviseur commun entier en $f(x)$. D'où résulte immédiatement l'exactitude des valeurs assignées par notre énoncé aux degrés des polynômes A, ...

V. Quant aux coefficients des polynômes A, ..., leurs valeurs se calculent, pour chaque fonction $f(x)$, par la méthode que nous suivrons pour celle qui sert de type à toutes les autres (**405**, *inf.*).

384. L'expression de $f(x - y)$ se déduit de la formule (12) par le changement de x en $S - x$, qui laisse $f(x)$ invariable, qui change $f'(x)$ en $-f'(x)$, et $f(x+y)$ en $f[S - (x - y)] = f(x - y)$.

385. En faisant successivement $y = x, 2x, \ldots, (n-1)x$ dans la formule (12), elle fournit des expressions de $f(2x), f(3x), \ldots, f(nx)$, qui se ramènent facilement à des fonctions rationnelles de $f(x), f'(x)$, contenant cette dérivée au numérateur seulement et au premier degré. C'est immédiat pour $f(2x)$, par la substitution de $\varphi[f(x)]$ à $[f'(x)]^2$. Dans $f(3x)$ figure $f(2x)$ déjà connue, et $f'(2x)$ qu'on en déduit par différentiation. On introduit ainsi $f''(x)$, mais on s'en débarrasse au moyen de l'équation différentielle de f, donnant $f''(x) = \frac{1}{2}\varphi'(f)$. On amène le dénominateur à ne plus contenir que des puissances paires de $f'(x)$, en multipliant les deux termes de l'expression par un facteur convenable; puis on substitue partout $\varphi(f)$ à f'^2. Et de même ensuite pour $f(4x), \ldots$.

Une méthode plus directe consiste à remarquer que $F(x) = f(nx)$ est une fonction du second ordre aux périodes élémentaires $\frac{\Pi}{n}, \frac{\Omega}{n}$, partant une fonction d'ordre $2n^2$, relativement à (Π, Ω) (322). Il en résulte immédiatement (331), que $F(x)$, $f(x)$ sont liées par une équation entière de degrés 2, $2n^2$, ou 1, n^2, suivant le cas, ou bien encore que la première fonction s'exprime au moyen de la seconde de la manière indiquée tout à l'heure.

On a $F(S - x) = f(nS - nx)$; si donc il existe entre S, Π, Ω et l'entier n une relation telle que S, nS soient congrues suivant le couple (Π, Ω), on aura $F(S - x) = F(x)$, et $f'(x)$ n'entrera pas dans l'expression de $f(nx)$ qui sera de la forme (3). C'est ce qui arrive quel que soit n, quand $S = 0$, c'est-à-dire quand $f(x)$ est une fonction paire de x.

386. En substituant $\frac{x}{n}$ à x dans la relation entière entre $f(nx)$ et $f(x)$, celle-ci se change en une équation entière de degrés 2, $2n^2$ (ou 1, n^2) entre $f(x)$ et $f\left(\frac{x}{n}\right)$, et la résolution de cette dernière fournira l'expression de $f\left(\frac{x}{n}\right)$ au moyen de $f(x)$.

Transformations primaires.

387. La réduction et la classification des intégrales elliptiques ont d'abord occupé les géomètres, qui n'ont pas tardé à recon-

naître l'importance relative plus considérable de celles de première espèce. Ne pouvant les exprimer au moyen des fonctions qu'ils connaissaient, ils ont cherché des substitutions algébriques de nature à modifier seulement les coefficients du polynôme du troisième ou du quatrième degré figurant sous le radical, sans que l'intégrale cessât d'être elliptique et de première espèce. Ils voulaient ainsi faciliter le calcul numérique de ces intégrales en les réduisant à des formes plus simples et moins nombreuses, et aussi obtenir entre elles des relations intéressantes en théorie. Cette recherche constitue le problème de la *transformation des intégrales elliptiques de première espèce,* qui peut s'énoncer comme il suit :

Dans l'équation différentielle

$$(1)\qquad \frac{du_1}{\sqrt{a_1^{(0)}+a_1^{(1)}u_1+\ldots+a_1^{(4)}u_1^4}}=\frac{du}{\sqrt{a^{(0)}+a^{(1)}u+\ldots+a^{(4)}u^4}}$$

entre la variable indépendante u et la fonction u_1, *on donne les coefficients* $a^{(0)}, \ldots, a^{(4)}$ *du second membre; trouver pour ceux du premier toutes les combinaisons de valeurs satisfaisant à des relations données entre eux et* $a^{(0)}, \ldots, a^{(4)}$, *qui font acquérir à cette équation une intégrale algébrique, c'est-à-dire racine de quelque équation entière entre elles et u*

$$(2)\qquad \omega(u_1, u)=0;$$

calculer en même temps l'intégrale dont il s'agit, ou, ce qui revient au même, les coefficients de cette dernière équation.

Ce problème étant résolu, il est clair qu'en tirant inversement de l'équation (2) $u=\chi(u_1)$, cette substitution donnera à l'intégrale

$$\int\frac{du}{\sqrt{a^{(0)}+\ldots+a^{(4)}u^4}}$$

la forme

$$\int\frac{du_1}{\sqrt{a_1^{(0)}+\ldots+a_1^{(4)}u_1^4}}$$

que l'on avait en vue.

A la fin du n° 223 nous avons exécuté une opération de ce genre pour une intégrale ultra-elliptique, en cherchant la substitution (4) où t, x jouaient les mêmes rôles qu'ici u_1, u; les relations impo-

sées entre les coefficients du polynôme $\psi(t)$ se réduisaient à celle égalant à o celui de t^{2n}.

Tout d'abord la transformation a été traitée directement, c'est-à-dire par des procédés impliquant seulement la considération de fonctions algébriques (rationnelles ou irrationnelles), et ce sont précisément des solutions se formulant d'une manière simple et remarquable par l'introduction des fonctions inverses, qui ont fixé définitivement l'attention des géomètres sur ces dernières. C'est ainsi, par exemple, qu'ils ont découvert la formule de l'addition des arguments (**383**), mais inversée.

Une fois acquise et développée, la notion des fonctions inverses a permis de résoudre le problème d'une manière infiniment plus nette, et de tirer de ses diverses solutions autant de propriétés particulières de ces fonctions. C'est ce que nous allons expliquer.

388. On peut considérer u_1 et u comme fonctions d'une même variable x, à laquelle elles seraient liées par les équations différentielles obtenues en égalant séparément à dx les deux membres de l'équation (1). Ces équations définissant alors deux fonctions bipériodiques de second ordre $u_1 = f_1(x)$, $u = f(x)$ (**302**), le problème de la transformation revient à ceci :

La fonction $f(x)$ étant donnée, trouver toutes celles de second ordre $f_1(x)$ qui lui sont liées par quelque équation entière et irréductible

$$\omega(f_1, f) = 0, \tag{3}$$

et pour lesquelles les coefficients $a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(4)}$ satisfont aux conditions posées; calculer simultanément les coefficients de cette dernière équation.

Les théorèmes des nos **330**, **331** permettent d'assigner immédiatement la nature générale de f_1. *Il faut en vertu du premier, que les fonctions f_1, f aient en commun quelque même couple de périodes, c'est-à-dire que leurs périodes élémentaires soient liées par deux équations linéaires et homogènes à coefficients entiers*

$$\left\{ \begin{aligned} p_1 \Pi_1 + q_1 \Omega_1 &= p \, \Pi + q \, \Omega, \\ p'_1 \Pi_1 + q'_1 \Omega_1 &= p' \Pi + q' \Omega, \end{aligned} \right. \tag{4}$$

telles, qu'aucun des déterminants

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p'_1 & q'_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$$

ne soit nul. Et cette condition est suffisante en vertu du second théorème.

Les fonctions f_1 se trouveront ainsi parmi les fonctions du second ordre ayant pour périodes élémentaires toutes les valeurs de Π_1, Ω_1 tirées des équations (4) après l'attribution aux éléments entiers des déterminants (5) de toutes les combinaisons de valeurs possibles. On limite le nombre des solutions en imposant à l'équation (3) la condition de contenir f_1, f à des degrés effectifs déterminés, et on achève en s'arrangeant de manière que les coefficients $a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(4)}$ satisfassent aux conditions voulues.

389. Le cas le plus simple, et qui est utile à la solution de tous les autres, est celui où f_1 doit n'entrer qu'au premier degré dans l'équation (3), être par suite exprimable rationnellement au moyen de f. La transformation est alors dite *rationnelle,* et l'on nomme son *degré,* le degré même de cette équation (3) par rapport à f.

Pour que f_1 soit fonction composée rationnelle de f, il faut et il suffit (**381**) que les périodes élémentaires de f soient des périodes de f_1, et que la constante supplémentaire S de f soit congrue à celle S_1 de f_1 suivant le couple (Π_1, Ω_1), c'est-à-dire que l'on ait

$$(6) \qquad \begin{cases} p_1\Pi_1 + q_1\Omega_1 = \Pi, \\ p'_1\Pi_1 + q'_1\Omega_1 = \Omega, \end{cases}$$

$$(7) \qquad S_1 = S + r_1\Pi_1 + s_1\Omega_1,$$

$p_1, \ldots, s_1$ désignant 6 entiers.

Si l'on pose

$$(7\ bis) \qquad \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p'_1 & q'_1 \end{vmatrix} = \mathrm{N},$$

l'ordre de $f_1(x)$ qui est 2 relativement à (Π_1, Ω_1), est $\pm 2\mathrm{N}$ relativement au couple (Π, Ω) (**322**). *Le degré de la transformation est donc égal à* $\frac{\pm 2\mathrm{N}}{2} = \pm \mathrm{N}$.

Pour obtenir une transformation de degré donné $\mathfrak{N}$, il faut donc trouver, pour $N = \pm \mathfrak{N}$, quelque système de solutions entières de l'équation indéterminée (7 *bis*) aux 4 entiers inconnus p_1, q_1, p'_1, q'_1, tirer des équations (6) les valeurs correspondantes de Π_1, Ω_1, puis conserver parmi les fonctions du second ordre qui ont ces périodes élémentaires et une constante supplémentaire congrue à S suivant ces mêmes périodes, celles qui correspondent à des coefficients $a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(4)}$ satisfaisant aux conditions posées. Les coefficients de la fonction rationnelle en f qui est l'expression de f_1 se calculent ensuite par tel ou tel moyen particulier.

L'exiguïté de notre cadre nous interdit de pousser la solution au delà de cette grossière ébauche; d'ailleurs on n'exécute guère d'autres transformations, que celles intéressant la fonction elliptique $\lambda(x)$, dont nous parlerons dans le Chapitre suivant. Nous pouvons cependant traiter un cas des plus faciles, qui conduit à la connaissance de propriétés essentielles des fonctions du second ordre, et à l'explication du choix que les géomètres ont fait de cette fonction λ pour type de toutes les autres.

390. Nous exécuterons une transformation rationnelle du premier degré, en imposant aux coefficients $a_1^{(0)}, \ldots, a_1^{(4)}$ de l'équation (1) la condition d'être respectivement égaux à $a^{(0)}, \ldots, a^{(4)}$. Les fonctions $f_1(x)$, $f(x)$ introduites au n° **388** seront alors des intégrales de la même équation différentielle

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{a^{(0)} + a^{(1)} u + \ldots + a^{(4)} u^4},$$

et l'on aura par suite (**304**, II)

$$f_1(x) = f(x + \Gamma),$$

Γ désignant quelque constante. Les deux fonctions f_1, f ayant ainsi les mêmes périodes élémentaires, les équations (6) sont possibles en nombres entiers donnant $N = \pm 1$. Mais il faut encore, en vertu de (7), que leurs constantes supplémentaires soient congrues. En appelant toujours S celle de $f(x)$, celle de $f(x + \Gamma)$ est évidemment congrue à $S - 2\Gamma$. Il faut donc que 2Γ soit congru à o, c'est-à-dire que l'on ait à des multiples près des

périodes élémentaires Π, Ω, communes à $f(x)$, $f_1(x)$,

$$\Gamma = 0, \quad \text{ou} \quad = \frac{\Pi}{2}, \quad \text{ou} \quad = \frac{\Omega}{2}, \quad \text{ou} \quad = \frac{\Pi + \Omega}{2}.$$

En d'autres termes : *si* Γ *a l'une de ces quatre valeurs, à l'exclusion de toute autre, on a identiquement*

$$f(x + \Gamma) = -\frac{\gamma + \beta f(x)}{\delta + \alpha f(x)}, \tag{8}$$

α, β, γ, δ *désignant certaines constantes dont le déterminant n'est pas nul* (*sans quoi* $f(x + \Gamma)$, *partant* $f(x)$, *dégénéreraient en des constantes*).

Des quatre formules ainsi obtenues, la première se réduit à $f(x) = f(x)$ et n'apprend rien; la dernière est une conséquence de la seconde et de la troisième, car on l'obtient évidemment en tirant de cette troisième l'expression de $f\left(x + \frac{\Pi}{2} + \frac{\Omega}{2}\right)$ au moyen de $f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right)$, puis en remplaçant dans le résultat $f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right)$ par son expression en $f(x)$ fournie par la seconde. Mais la seconde et la troisième ont des seconds membres distincts, car autrement on aurait identiquement $f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) = f\left(x + \frac{\Omega}{2}\right)$, ce qui ne se peut, puisque $\frac{\Pi}{2}$, $\frac{\Omega}{2}$ ne sont pas des quantités congrues; et elles expriment des propriétés nouvelles et fort importantes d'une fonction quelconque du second ordre. Nous les nommerons les deux *transformations primaires* de cette fonction, *relatives à ses périodes élémentaires* Π, Ω, *respectivement*.

La formule (8) où Γ représente ainsi $\frac{\Pi}{2}$, ou $\frac{\Omega}{2}$, s'écrit encore

$$\alpha f(x) f(x + \Gamma) + \beta f(x) + \delta f(x + \Gamma) + \gamma = 0,$$

et donne par le changement de x en $x + \Gamma$,

$$\alpha f(x) f(x + \Gamma) + \delta f(x) + \beta f(x + \Gamma) + \gamma = 0,$$

à cause de $f(x + 2\Gamma) = f(x)$. En retranchant membre à membre, il vient donc

$$(\beta - \delta)[f(x + \Gamma) - f(x)] = 0,$$

d'où $\delta = \beta$, parce que, $x + \Gamma$ et x n'étant pas des quantités congrues, le second facteur ne peut s'évanouir identiquement.

Cette observation donne à la transformation primaire qui correspond à la période élémentaire quelconque Υ, la forme définitive

$$(9) \qquad \alpha_\Upsilon f(x) f\left(x + \frac{\Upsilon}{2}\right) + \beta_\Upsilon \left[f(x) + f\left(x + \frac{\Upsilon}{2}\right)\right] + \gamma_\Upsilon = 0.$$

391. Qu'elle soit du genre $E(x)$ ou $E_\infty(x)$, la fonction $f(x)$ a toujours trois valeurs cardinales finies

$$(10) \qquad a, \quad b, \quad c,$$

au moyen desquelles les coefficients de cette transformation s'expriment immédiatement. Mais, auparavant, il faut préciser des corrélations importantes entre leurs combinaisons et les divers couples possibles de périodes élémentaires.

Des racines quelconques x_a, x_b, x_c des trois équations numériques

$$f(x) - a = 0, \qquad f(x) - b = 0, \qquad f(x) - c = 0,$$

étant doubles chacune, les sommes $x_a + x_a = 2x_a$, $2x_b$, $2x_c$ sont toutes congrues à la constante supplémentaire de $f(x)$, suivant un quelconque (Π, Ω) de ses couples de périodes élémentaires; par suite, elles le sont deux à deux. Comme deux de ces racines ne peuvent jamais l'être, les trois différences

$$x_a - x_b, \quad x_a - x_c, \quad x_b - x_c$$

le sont respectivement aux trois quantités

$$\frac{\Pi}{2}, \quad \frac{\Omega}{2}, \quad \frac{\Pi + \Omega}{2}$$

disposées dans un ordre convenable. Si ces congruences ont lieu précisément pour l'ordre ci-dessus, nous dirons que *la période* Π *et l'association* (ab), *la période* Ω *et l'association* (ac), *s'appartiennent,* réciproquement et respectivement.

Les points suivants s'établissent ensuite très facilement.

I. *A toute association de deux des trois quantités* (10), *appartient toujours quelque période faisant partie d'un couple élé-*

mentaire; en faisant donc abstraction de l'ordre des périodes, *tous les couples élémentaires se partagent en trois genres, caractérisés chacun par telle des trois combinaisons deux à deux des trois associations possibles* (bc), (ca), (ab).

II. *Pour que le couple élémentaire quelconque*

$$(11) \qquad \begin{cases} \Pi_1 = \alpha\Pi + \beta\Omega, \\ \Omega_1 = \gamma\Pi + \delta\Omega, \end{cases}$$

avec

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \pm 1,$$

soit du genre de (Π, Ω), *il faut et il suffit que, dans ce déterminant, les éléments soient impairs sur une diagonale, pairs sur l'autre; et, selon que la diagonale principale contient ainsi des éléments impairs ou pairs,* Π_1, Ω_1 *et* Π, Ω *individuellement et respectivement, ou bien* Ω_1, Π_1 *et* Π, Ω *appartiendront aux mêmes associations des valeurs cardinales* (10).

Par exemple, pour la fonction $E(x)$ étudiée au n° **302**, les périodes Π, Ω fournies par les formules (24) de l'alinéa VII, c'est-à-dire par le calcul de l'intégrale (13) de l'alinéa I sur deux chemins fermés enveloppant l'un a et b, l'autre a et c, à l'exclusion de toutes autres valeurs cardinales, appartiennent aux associations (ab) et (ac) (**304, IV**).

392. Si, maintenant, on suppose, pour fixer les idées, que la période Υ soit Π appartenant à l'association (ab), et si, dans la transformation primaire (9), on fait d'abord $x = x_a$, $x + \frac{\Pi}{2}$ deviendra congru à x_b, d'où $f(x_a) = a$, $f\left(x_a + \frac{\Pi}{2}\right) = b$, puis

$$(12) \qquad ab\alpha_\Pi + (a+b)\beta_\Pi + \gamma_\Pi = 0.$$

Si l'on y fait ensuite $x = x_c$, on aura $f(x_c) = c$ et $f\left(x_c + \frac{\Pi}{2}\right) = d$, quatrième valeur cardinale de $f(x)$, parce que $2\left(x_c + \frac{\Pi}{2}\right)$ étant une quantité congrue à la constante supplémentaire, alors que

$x_c + \frac{\Pi}{2}$ ne peut l'être ni à x_a, ni à x_b, ni à x_c, $f\left(x_c + \frac{\Pi}{2}\right)$ est une valeur cardinale de $f(x)$ étrangère au groupe (10). Il vient ainsi

$$cd\alpha_\Pi + (c+d)\beta_\Pi + \gamma_\Pi = 0. \tag{13}$$

Les équations (12), (13) sont précisément celles dont la résolution fournira des quantités proportionnelles aux coefficients α_Π, β_Π, γ_Π; car, si les déterminants des coefficients de ces inconnues prises successivement deux à deux s'évanouissaient tous trois, il viendrait immédiatement

$$a + b = c + d, \qquad ab = cd,$$

d'où $a = c$, $b = d$ ou bien $a = d$, $b = c$, ce qui est impossible.

Si d était infinie, l'équation (13) devrait naturellement être remplacée par

$$c\alpha_\Pi + \beta_\Pi = 0.$$

Les équations linéaires simultanées

$$\left\{\begin{aligned} ac\alpha_\Omega + (a+c)\beta_\Omega + \gamma_\Omega &= 0, \\ bd\alpha_\Omega + (b+d)\beta_\Omega + \gamma_\Omega &= 0 \end{aligned}\right. \tag{14}$$

détermineront de même les coefficients de la transformation primaire relative à la période Ω supposée appartenir à l'association (ac).

393. Le théorème suivant ne nous est pas encore utile, mais nous le plaçons ici pour le rapprocher de ceux sur lesquels sa démonstration s'appuie.

Nous appellerons $E(x)$ la fonction bipériodique du second ordre des nos **302** et suiv., aux valeurs cardinales a, b, c, d, finies toutes quatre, aux périodes élémentaires Π, Ω, appartenant aux associations (ab), (ac) (**391**), puis H une constante $\neq 0$, et nous considérerons la fonction

$$\mathcal{K}(x) = \sqrt{H[E(x) - a][E(x) - b]},$$

que nous savons être méromorphe (**381**, II), avec quelque couple de périodes appartenant à $E(x)$ (**330**). Cela posé :

Si l'on a l'égalité

$$a + b = c + d, \tag{15}$$

la fonction $\mathfrak{M}(x)$ est du second ordre avec

$$\Pi,\quad \Omega+\frac{\Pi}{2}$$

pour périodes élémentaires.

Sinon, elle est du quatrième ordre avec

$$\Pi,\quad 2\Omega$$

pour périodes élémentaires.

I. Les périodes de $\mathfrak{M}(x)$ appartenant à

$$\mathfrak{M}(x)^2 = \mathrm{H}[\mathrm{E}(x)-a][\mathrm{E}(x)-b],$$

nous déterminerons d'abord toutes les constantes Γ rendant la différence

$$(16)\quad \mathfrak{M}(x+\Gamma)^2-\mathfrak{M}(x)^2=\mathrm{H}[\mathrm{E}(x+\Gamma)-\mathrm{E}(x)][\mathrm{E}(x+\Gamma)+\mathrm{E}(x)-(a+b)]$$

nulle identiquement; ce seront les périodes de $\mathfrak{M}(x)^2$, parmi lesquelles nous chercherons ensuite celles de $\mathfrak{M}(x)$. On annulera naturellement le premier facteur de cette expression, en prenant pour Γ une somme de multiples entiers de Π, Ω; le second facteur reste donc seul à discuter.

L'identité

$$(17)\qquad \mathrm{E}(x+\Gamma)+\mathrm{E}(x)-(a+b)=0$$

est nécessairement quelque transformation primaire de $\mathrm{E}(x)$ (390); d'où (à des multiples de Π, Ω près)

$$\Gamma=\frac{\Pi}{2}\quad \text{ou}\quad =\frac{\Omega}{2}\quad \text{ou}\quad =\frac{\Pi+\Omega}{2}.$$

Les coefficients α, β, γ de ces trois transformations se tirent d'équations linéaires simultanées analogues à (12), (13), et, en exprimant qu'ils ont pour valeurs 0, 1, $-(a+b)$ respectivement, on forme les trois systèmes de conditions correspondants

$$\frac{0}{(a+b)-(c+d)}=\frac{1}{cd-ab}=\frac{-(a+b)}{ab(c+d)-cd(a+b)};$$

$$\frac{0}{(a+c)-(b+d)}=\frac{1}{bd-ac}=\frac{-(a+b)}{ac(b+d)-bd(a+c)};$$

$$\frac{0}{(a+d)-(b+c)}=\frac{1}{bc-ad}=\frac{-(a+b)}{ad(b+c)-bc(a+d)}.$$

Le second système est irréalisable, car il donnerait

$$(18)\qquad a+c=b+d,$$

puis

$$ac(d-a)+bd(b-c)=0.$$

Cette égalité combinée avec la précédente

$$(d-a)+(b-c)=0,$$

conduirait soit à $d-a=b-c=0$, ce qui est impossible, puisque a, b, c, d sont des quantités toutes inégales, soit à

$$(19)\qquad ac=bd,$$

ce qui est impossible encore, car les égalités (18) et (19) entraîneraient pour a, c la propriété d'être respectivement égales à b, d ou à d, b.

Le troisième système l'est également pour des raisons semblables. Le premier système seul est possible; il entraîne l'égalité (15), puis

$$\Gamma=\frac{\Pi}{2},$$

conditions nécessaires et suffisantes pour que l'identité (17) puisse avoir lieu.

II. Si l'égalité (15) n'existe pas, $\mathcal{M}(x)^2$ ne peut ainsi avoir d'autres périodes que celles de $E(x)$; et comme les périodes élémentaires de $\mathcal{M}(x)$ appartiennent à son carré, elles sont nécessairement des formes

$$\Pi_1=p\Pi+q\Omega,$$
$$\Omega_1=r\Pi+s\Omega.$$

Mais en raisonnant exactement comme au n° 381, III, on trouvera

$$(20)\qquad \mathcal{M}(x+\Pi)=\mathcal{M}(x),$$

$$(21)\qquad \mathcal{M}(x+\Omega)=-\mathcal{M}(x);$$

il faut donc que q, s soient des entiers pairs et l'on obtiendra Π_1, Ω_1, en donnant au déterminant $(ps-qr)$ sa valeur minimum qui

est ici ± 2. On pourra donc prendre

$$\Pi_1 = \Pi, \qquad \Omega_1 = 2\Omega,$$

comme le dit notre énoncé.

Les infinis de $\mathcal{M}(x)$ sont évidemment ceux de $E(x)$, simples aussi, et sa maille élémentaire, double de celle de $E(x)$, en contient 4; cette fonction est donc du quatrième ordre.

III. L'examen de l'autre cas exige le lemme suivant.

Posons

$$\mathfrak{o} = \frac{a+b}{2},$$

appelons u', $u''(= 2\mathfrak{o} - u')$ *deux valeurs de* u *symétriques par rapport au point* $\mathfrak{o}$, *et* $[u'u'']_1$ *un chemin tracé arbitrairement de* u' *à* u'' *sous la seule condition que réuni à son symétrique* $[u''u']_2$ *il forme un contour fermé* $[u'u''u']$ *sans nœud et ne passant pas par* a *(ni partant par* b*). Cela posé, quand* u *décrit le chemin* $[u'u'']$, *le radical*

$$(22) \qquad \mathfrak{R}(u) = \sqrt{(u-a)(u-b)}$$

revient à sa valeur initiale ou bien passe à la valeur opposée, selon que le contour $[u'u''u']$ *ne contient aucun des points* a, b, *ou les contient tous deux.*

1° Supposons d'abord que l'on ait

$$a = -b = \mathfrak{q} \neq 0,$$

d'où $\mathfrak{o} = 0$, avec

$$(23) \qquad \mathfrak{R}(u) = \sqrt{u^2 - \mathfrak{q}^2}.$$

Quand le contour fermé $[u'u''u']$ laisse les points $\pm\mathfrak{q}$ en dehors de lui, le chemin $[u'u'']$, quel qu'il soit, peut être remplacé par la droite $u'O_u$ suivie de la droite $O_u u''$. Alors, u^2 dont les éléments restent proportionnels à eux mêmes, comme ceux de u, décrit le segment rectiligne joignant u'^2 à 0, puis ce même segment en sens contraire à cause de $u''^2 = (-u')^2$, et le radical (23) revient visiblement à sa valeur initiale.

Quand le même contour enveloppe $\mathfrak{q}$ (et partant $-\mathfrak{q}$), le chemin $[u'u'']$ peut être remplacé par un autre composé de $[u'U']$, segment du rayon vecteur $O_u u'$ conduisant à une quantité U' de module supérieur à $\bmod \mathfrak{q}$, de $[U'U'']$ demi-circonférence ayant pour diamètre le segment rectiligne tracé de U' à $U'' = -U'$, et enfin du segment $[U''u'']$. La marche de u sur ce nouveau chemin fait décrire à u^2 le segment rectiligne $[u'^2 U'^2]$ dont le prolongement seul contient le point $u^2 = 0$, puis la circonférence entière $[U'^2 U''^2]$ de rayon $> \bmod \mathfrak{q}^2$, puis enfin le segment $[U'^2 u'^2]$.

Il en résulte que le radical

$$\mathfrak{R}_1(u) = \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{q}^2}{u^2}}$$

revient à sa valeur initiale, parce que, pendant le mouvement de u^2 sur la circonférence $[U'^2 U''^2]$, $\frac{\mathfrak{q}^2}{u^2}$ conserve un module < 1. Le radical considéré $\mathfrak{R}(u) = u\mathfrak{R}_1(u)$ passe donc à une valeur finale opposée à sa valeur initiale, parce que u passe de u' à $u'' = -u'$.

2° S'il en est autrement, la substitution

$$u = \mathfrak{s} + \mathfrak{u}$$

donne au radical (22) la forme $\sqrt{\mathfrak{u}^2 - \mathfrak{q}^2}$ considérée ci-dessus (1°), où $\mathfrak{q} = \pm \frac{a-b}{2} \neq 0$, et les mêmes conclusions subsistent.

IV. Nous plaçant enfin dans le cas spécifié par l'égalité (15), nous tracerons le contour fermé $[u'u''u']$ de manière qu'il contienne à son intérieur a, partant b aussi, mais non le point c, ni par suite le point d à cause de $\frac{c+d}{2} = \frac{a+b}{2} = \mathfrak{s}$, et nous ferons décrire à u le demi-contour $[u'u'']$. En vertu du lemme précédent (III), le radical (22) changera alors de signe, mais non le radical

$$\sqrt{(u-c)(u-d)},$$

et $\sqrt{\varphi(u)}$, égal au produit de $\sqrt{G}$ par ces deux radicaux, changera de signe.

On en conclut que l'intégrale (13) du n° **302**, prise sur $[u'u''u']$, c'est-à-dire Π, est double du résultat obtenu en la prenant sur

$[u'u'']_1$ seulement. On a effectivement

$$\int_{[u'u''u']} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} = \int_{[u'u'']_1} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}} + \int_{[u''u']_2} \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

et si, dans cette dernière intégrale partielle, on pose $u = 2\theta - v$, d'où $\varphi(u) = \varphi(v)$, $du = -dv$, le nouveau chemin d'intégration coïncidera avec $[u'u'']$, et, d'après le lemme III, les valeurs du nouveau radical devront être prises opposées à celles correspondantes de l'ancien; or, ces diverses modifications se compensent évidemment, de manière à rendre cette seconde intégrale égale à l'autre intégrale partielle.

Celle-ci étant ainsi égale à $\frac{\Pi}{2}$, on voit que réciproquement $u[= \mathrm{E}(x)]$ passe de u' à u'' (par le chemin $[u'u'']$), quand x passe (par un chemin convenable) de x', racine quelconque de $\mathrm{E}(x) = u'$, à $x' + \frac{\Pi}{2}$, que, par suite (III), le radical (22) change de signe. En d'autres termes, on a

$$(24) \qquad \mathfrak{N}\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) = -\mathfrak{N}(x).$$

D'ailleurs, et comme dans l'alinéa II, on aura ici encore la relation (20) (renfermée maintenant dans l'identité précédente), et aussi la relation (21).

Les quantités $\frac{\Pi}{2}$, Ω sont ainsi des périodes de $\mathfrak{N}(x)^2$; de plus, elles sont élémentaires, parce que cette fonction ayant dans la maille construite sur Π, Ω les deux infinis de $\mathrm{E}(x)$, mais chacun double, y est du quatrième ordre, et qu'ainsi sa maille élémentaire ne peut être moins de la moitié de celle-ci. Relativement aux périodes élémentaires Π_1, Ω_1 de $\mathfrak{N}(x)$, on a donc pour la même raison que ci-dessus (II)

$$\Pi_1 = p\frac{\Pi}{2} + q\,\Omega,$$

$$\Omega_1 = r\frac{\Pi}{2} + s\,\Omega,$$

et les relations (24), (21) montrent que p, q doivent être de même parité ainsi que r, s. Dans ces conditions, on donnera au

déterminant $ps - qr$ sa valeur minimum ± 2, en prenant $p = 2$, $q = 0$, $r = s = 1$, d'où

$$\Pi_1 = \Pi, \qquad \Omega_1 = \Omega + \frac{\Pi}{2},$$

comme le dit notre énoncé.

L'aire de la maille construite sur Π_1, Ω_1 est évidemment égale à celle construite sur Π, Ω, c'est-à-dire au double de celle de la maille élémentaire de $\mathcal{M}(x)^2$. Il en résulte que l'ordre absolu de $\mathcal{M}(x)$ est 2; car, s'il surpassait ce nombre, l'ordre de $\mathcal{M}(x)^2$ relatif à cette maille double serait > 4, au lieu d'être $= 4$ comme nous venons de le constater.



CHAPITRE XII.

SUITE DES QUATRE PRÉCÉDENTS. — FONCTIONS ELLIPTIQUES CANONIQUES.

Propriétés spéciales de la fonction $\lambda(x)$ ou $\operatorname{sn} x$.

394. La forme d'une relation entière, cherchée entre des fonctions bipériodiques dont les périodes sont composées les unes des autres, se découvre en général *à priori* par des procédés du genre de ceux indiqués dans le dernier paragraphe du Chap. IX. Il reste ensuite à exécuter le calcul effectif des coefficients de la relation, en appliquant d'une manière ou d'une autre la méthode des coefficients indéterminés. Pour les fonctions du second ordre, les identités que nous avons nommées les *transformations primaires* (390) sont habituellement d'un très grand secours, parce qu'elles sont très simples, et qu'elles contiennent au premier degré seulement chacune des fonctions y entrant.

Parmi les fonctions du second ordre qui ont des périodes élémentaires données, et au moyen desquelles s'expriment algébriquement toutes les fonctions bipériodiques ayant avec elles quelque couple de périodes communes, il y a donc avantage à choisir comme fondamentales celles dont les transformations primaires sont les plus simples. Ces fonctions d'un maniement relativement plus facile, ceci pour d'autres causes encore, sont celles auxquelles les géomètres ont donné plus spécialement le nom de *fonctions elliptiques*.

395. *Soit $f(x)$ une fonction du second ordre, aux périodes élémentaires* Π, Ω *appartenant respectivement aux associations* (ab), (ac) *de ses quatre valeurs cardinales*

$$a,\ b,\ c,\ d\ (391). \qquad (1)$$

Si sa seconde transformation primaire a la forme de simplicité maximum

$$(2) \qquad f(x)+f\left(x+\frac{\Omega}{2}\right)=0,$$

la première prend simultanément la forme simple

$$(3) \qquad kf(x)f\left(x+\frac{\Pi}{2}\right)-1=0.$$

Et, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait

$$(4) \qquad a+c=b+d=0,$$

ce qui entraîne pour $\varphi(f)$, *polynôme entier en* f *figurant dans l'équation différentielle de* $f(x)$, *la propriété d'être bicarré, et pour cette fonction, par suite, celle d'être du genre* $\mathrm{E}(x)$.

Pour que la seconde transformation primaire ait la forme (2), il est nécessaire et suffisant que les équations (14) du n° 392 donnent $\alpha_\Omega=\gamma_\Omega=0$, $\beta_\Omega\neq 0$, c'est-à-dire que les égalités (4) aient lieu. Si elles existent, aucune des quantités (1) ne peut être nulle, sans quoi une autre le serait aussi, et $\varphi(f)$ serait divisible par le carré f^2; elles donnent $ab=cd$, en outre $a+b\neq 0$, sans quoi on aurait $b=c$, puis enfin $c+d\neq 0$ pour la même raison. Les équations (12), (13) donnent donc $\beta_\Pi=0$, $\frac{\alpha_\Pi}{\gamma_\Pi}=-k$, en posant

$$(5) \qquad k=\frac{1}{ab}=\frac{1}{cd},$$

moyennant quoi la première transformation primaire prend bien la forme (3).

Réciproquement, si le polynôme $\varphi(f)$ est bicarré, un accouplement convenable de ses zéros donnera les égalités (4), d'où les formes simples (2), (3) pour les transformations primaires.

396. Les zéros et les infinis de la fonction $f(x)$ douée de pareilles transformations ont une disposition spéciale qu'il faut noter.

Si ζ_0 est un zéro, la transformation (2), qui donne

$$f\left(\zeta_0+\frac{\Omega}{2}\right)=-f(\zeta_0),$$

montre que $\zeta_0 + \frac{\Omega}{2}$ en est un autre, et tous deux tombent évidemment à l'intérieur d'une même maille élémentaire. Comme $f(x)$ est du second ordre, ces deux zéros sont simples, et il n'en existe pas d'autres que les quantités congrues.

La transformation (3), écrite

$$f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) = \frac{1}{kf(x)},$$

fait voir que $\zeta_0 + \frac{\Pi}{2}$ est un infini (simple), puisque ζ_0 est un zéro (simple); l'autre transformation (2) montre ensuite que $\zeta_0 + \frac{\Pi}{2} + \frac{\Omega}{2}$ en est un second. Ces deux infinis tombent encore dans une même maille élémentaire, et ils sont les seuls incongrus que $f(x)$ puisse posséder.

Réciproquement, les transformations primaires de $f(x)$ relatives à Ω, Π, ont les formes (2), (3), si ses zéros et infinis sont distribués de cette manière. Effectivement, la formule (9) du n° **390**, qui s'écrit

$$f\left(\frac{\Omega}{2} + x\right) = -\frac{\gamma_\Omega + \beta_\Omega f(x)}{\beta_\Omega + \alpha_\Omega f(x)},$$

donne pour $x = \zeta_0$, puis $= \zeta_0 + \frac{\Pi}{2}$,

$$\gamma_\Omega = \alpha_\Omega = 0,$$

et, en divisant par β_Ω, qui n'est pas nul à cause de

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$

on retrouve bien la forme (2).

La transformation primaire relative à Π donne de même, pour $x = \zeta_0$,

$$\beta_\Pi = 0,$$

et α_Π, γ_Π ne sont nuls ni l'un ni l'autre, à cause de la même condition (6). On retombe donc sur la forme (3), en divisant cette transformation par γ_Π, puis appelant k la constante $-\frac{\alpha_\Pi}{\gamma_\Pi}$ qui est essentiellement $\neq 0$.

397. Une fonction du second ordre n'est pas entièrement déterminée par la connaissance de ses périodes élémentaires Π, Ω, relativement auxquelles ses transformations primaires prennent les formes simples (3), (2). On peut encore disposer à volonté de sa constante supplémentaire $\zeta_0 + \left(\zeta_0 + \frac{\Omega}{2}\right) = 2\zeta_0 + \frac{\Omega}{2}$, puisque le premier zéro ζ_0 est arbitraire; après cela, ses zéros et ses infinis sont entièrement déterminés par les observations précédentes, et la fonction ne renferme plus qu'un facteur constant indéterminé (380).

On rend la constante supplémentaire S égale (ou congrue) à $\frac{\Omega}{2}$, en prenant $\zeta_0 = 0$; la transformation (2), combinée avec

$$f(\mathrm{S} - x) = f\left(\frac{\Omega}{2} - x\right) = f(x),$$

donne alors

$$f\left(x + \frac{\Omega}{2}\right) = f(-x) = -f(x), \tag{7}$$

ce qui rend la fonction *impaire*, et lui confère en même temps comme une demi-périodicité relativement à $\frac{\Omega}{2}$.

Il est facile d'assigner la forme de l'équation différentielle

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{\mathrm{G}(f-a)(f-b)(f-c)(f-d)}$$

de la fonction $f(x)$ ainsi définie. Les conditions (4), (5) donnent

$$b = \frac{1}{ka}, \qquad c = -a, \qquad d = -\frac{1}{ka},$$

d'où, en posant $\sqrt{\frac{\mathrm{G}}{k^2}} = g$,

$$\frac{df}{dx} = g\sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{a^2}\right)(1 - a^2k^2f^2)}, \tag{8}$$

équation à compléter par les conditions initiales

$$\left.\begin{array}{r} f = 0 \\ \sqrt{\left(1 - \frac{f^2}{a^2}\right)(1 - a^2k^2f^2)} = +1 \end{array}\right\} \quad \text{pour } x = 0,$$

dont la seconde suppose que l'on ait représenté par g celle des deux valeurs de $\sqrt{\frac{G}{k^2}}$, à laquelle, en vertu de l'équation différentielle (8), reste égal le rapport de $f'(x)$ au radical figurant dans son second membre.

En appelant x_a, comme au n° **391**, une racine de l'équation numérique $f(x)=a$, $x_a - x_c$ est congru à $\frac{\Omega}{2}$ parce que la période Ω appartient à l'association (ac); $x_a - \frac{\Omega}{2}$ est donc congru à x_c, d'où

$$f\left(x_a - \frac{\Omega}{2}\right) = f(x_c) = c = -a.$$

A cause de l'identité (7), on a donc $f\left(-x_a + \frac{\Omega}{2}\right) = a$; les quantités x_a, $-x_a + \frac{\Omega}{2}$ sont donc congrues entre elles, puisque l'équation $f(x) = a$ n'a que des racines doubles. Il en résulte que x_a est congru à $\frac{\Omega}{4}$, c'est-à-dire qu'on a $a = f\left(\frac{\Omega}{4}\right)$. Si donc on dispose du facteur constant encore indéterminé auquel nous faisions allusion tout à l'heure, de manière à rendre

$$f\left(\frac{\Omega}{4}\right) = 1, \tag{9}$$

on aura $a = 1$, et, en posant $f(x) = u$, l'équation différentielle de notre fonction prendra la forme définitive

$$\frac{du}{dx} = g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \tag{10}$$

accompagnée toujours des conditions initiales

(11) $\qquad u = 0, \qquad$ et le radical $= +1, \qquad$ pour $x = 0$.

398. *Réciproquement, si, appelant k une des racines carrées de k^2 choisie à volonté, et posant*

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{k}, \qquad c = -1, \qquad d = -\frac{1}{k},$$

on adopte pour l'intégrale $u = f(x)$ de l'équation (10) *com-*

plétée par les conditions initiales (11), *des périodes élémentaires appartenant respectivement aux associations*

$$(ab),\quad (ac)$$

des valeurs cardinales, les transformations primaires de cette fonction auront les formes (3), (2); *sa constante supplémentaire sera congrue à* $\frac{\Omega}{2}$, *d'où résultent pour ses zéros et infinis les valeurs mentionnées au n°* 397, *et elle satisfera à la condition numérique* (9). C'est évident.

Pour Π, Ω, on peut prendre, comme nous l'avons expliqué au n° 391, les périodes-types considérées au n° 302. La seconde est la valeur de l'intégrale (13) de ce numéro, prise sur deux boucles simples partant de l'origine O_u et enveloppant les points $a = +1$, $c = -1$ respectivement. Ces points étant symétriques par rapport à l'origine, on peut aussi supposer telles les boucles correspondantes; on en conclut sans peine que la valeur de l'intégrale est double de ce qu'elle serait, prise sur la première boucle seulement. D'après cette remarque, la seconde des formules (24) du dernier numéro cité donne

$$(12)\qquad \Omega = 4\int_0^1 \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

après quoi, si on le veut,

$$S = \frac{\Omega}{2},$$

le chemin d'intégration étant, si bon semble, le segment rectiligne tracé de $u = 0$ à $u = 1$.

La première des mêmes formules donne

$$(13)\qquad \Pi = 2\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{g\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

où l'on peut aussi supposer rectiligne le chemin d'intégration.

399. Une fonction du second ordre, définie comme ci-dessus (397), se nomme une *fonction elliptique* $\lambda(x)$ (notation de

Briot et Bouquet), ou bien $\operatorname{sn} x$, comme écrivent maintenant beaucoup d'auteurs. Elle est complètement déterminée, soit par la connaissance de deux périodes élémentaires donnant lieu aux relations (2), (3), (7), soit par l'équation différentielle (10), les conditions initiales annexes, et l'indication de la valeur de k (choisie, bien entendu, parmi celles de $\sqrt{k^2}$).

Une infinité de couples de périodes élémentaires, mais non tous, donnent lieu à ces relations (2), (3), (7); pour les distinguer de ceux qui ne jouissent pas de cette triple propriété, on les dit *elliptiques*. Et, comme dans chaque couple il y a une distinction évidente à faire entre les deux périodes, on nomme *première période* celle Ω figurant dans les formules (2), (7), *seconde période* l'autre Π entrant dans la relation (3). Désormais, nous les représenterons par ω, ω', notations de Briot et Bouquet.

Quand on part de l'équation différentielle (10), les formules (12), (13) respectivement donnent un couple de valeurs de ω, ω'.

Tout autre couple (ϖ, ϖ') de périodes elliptiques devant être du même genre que (ω, ω') (391, I) lui est lié par les relations (11) du numéro cité où α, δ sont impairs, mais β, γ pairs. La condition $f\left(\frac{\varpi}{4}\right) = 1 = f\left(\frac{\omega}{4}\right)$ exige, en outre, que $\frac{\delta - 1}{2}$ et $\frac{\gamma}{2}$ soient pairs aussi, ce qui donne à ces relations (interverties) les formes définitives

$$\begin{cases} \varpi = (4\mathfrak{p} + 1)\omega + 4\mathfrak{q}\,\omega', \\ \varpi' = 2\mathfrak{r}\,\omega + (2\mathfrak{s} + 1)\omega', \end{cases}$$

les entiers $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ étant choisis arbitrairement parmi ceux qui satisfont à la condition

$$(4\mathfrak{p} + 1)(2\mathfrak{s} + 1) - 8\mathfrak{q}\mathfrak{r} = \pm 1.$$

En résumé, la fonction $\lambda(x)$, aux périodes elliptiques données ω, ω', est caractérisée, comme fonction bipériodique du second ordre, par les identités

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} - x\right) = \lambda(x), \tag{14}$$

$$\lambda\left(\frac{\omega}{2} + x\right) = -\lambda(x), \tag{15}$$

$$\lambda\left(\frac{\omega'}{2} + x\right) = \frac{1}{k\lambda(x)}, \tag{16}$$

d'où l'on tire aussi

$$\lambda(-x) = -\lambda(x), \tag{17}$$

et par la condition numérique

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right) = 1,$$

donnant encore par sa combinaison avec les précédentes

$$\lambda\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right) = \frac{1}{k}.$$

Ses zéros sont congrus à

$$0, \quad \frac{\omega}{2},$$

et ses infinis à

$$\frac{\omega'}{2}, \quad \frac{\omega + \omega'}{2}.$$

400. La constante k figurant dans la transformation (16), et aussi dans l'équation différentielle (10), mais alors par son carré, est le *module* de la fonction; il ne peut être égal ni à $+1$ ni à -1, car autrement le polynôme sous le radical aurait quelque facteur multiple.

L'intégrale de l'équation (10) avec les conditions initiales (11) est unique; elle donne néanmoins deux fonctions λ; l'une a pour module k (l'une des racines carrées de k^2) et certaines périodes elliptiques; l'autre a pour module $-k$, mais d'autres périodes elliptiques.

La deuxième constante g entrant dans l'équation différentielle est le *multiplicateur* de la fonction.

401. Les périodes elliptiques de l'intégrale de l'équation (10) ayant été choisies de manière que son module soit k, cette fonction se représente quelquefois par

$$\lambda(x, g, k),$$

et simplement par

$$\lambda(x, k),$$

quand le multiplicateur g se réduit à 1.

L'équation différentielle donnant évidemment

$$\lambda(x, g, k) = \lambda(gx, k),$$

l'étude de toutes les fonctions λ peut être limitée au cas où le multiplicateur g se réduit à 1.

402. Il faut noter quelques particularités numériques de la fonction $\lambda(x, k)$.

I. *Pour* $\lim x = 0$, *on a*

$$\lim \frac{\lambda(x, k)}{x} = 1.$$

Cette limite a effectivement pour valeur $\lambda'(0, k) = 1$, à cause de l'équation différentielle (10), où $g = 1$, et des conditions initiales annexes.

II. *Dans le développement de* $\lambda(x, k)$ *par la formule de Maclaurin, les coefficients des puissances de* x *à exposants pairs sont tous* $= 0$, *et celui de* x *est* $= 1$.

Le premier point résulte de l'identité (17) et le second de la remarque précédente (I).

III. *Les résidus de* $\lambda(x, k)$ *sont égaux à* $\pm \frac{1}{k}$, *selon que les infinis correspondants sont congrus à* $\frac{\omega'}{2}$ *ou à* $\frac{\omega + \omega'}{2}$.

Le résidu relatif à α représentant l'un ou l'autre de ces infinis est, parce que ceux-ci sont simples, la limite du produit $(x - \alpha)\lambda(x, k)$ pour $\lim x = \alpha$, ou bien de $t\lambda(\alpha + t, k)$ pour t infiniment petit. Or, en remplaçant α par ces valeurs, puis ayant égard aux transformations (15), (16), il vient

$$t\lambda(\alpha + t, k) = \frac{1}{k}\frac{t}{\lambda(t, k)} \quad \text{ou} \quad = \frac{1}{k}\frac{t}{\lambda\left(\frac{\omega}{2} + t, k\right)} = -\frac{1}{k}\frac{t}{\lambda(t, k)},$$

ce qui réduit ces limites à $\pm \frac{1}{k}$ (I).

IV. *Dans la série*

$$\frac{A_0}{x-\alpha}+A_1+A_2(x-\alpha)+A_3(x-\alpha)^2+\ldots,$$

développement de $\lambda(x, k)$ *en série procédant suivant les puissances de* $(x-\alpha)$ *à exposants entiers, négatifs puis positifs, les coefficients des puissances paires de* $x-\alpha$ *sont tous nuls.*

Nous avons trouvé (III)

$$\lambda[\alpha+(x-\alpha), k]=\frac{\pm 1}{k\lambda(x-\alpha, k)},$$

et auparavant (II)

$$\lambda(x-\alpha, k)=(x-\alpha)+a_3(x-\alpha)^3+\ldots=(x-\alpha)[1+a_3(x-\alpha)^2+\ldots].$$

Il en résulte bien

(18) $$\lambda(x, k)=\frac{\pm 1}{k(x-\alpha)}[1+a'_3(x-\alpha)^2+\ldots].$$

V. Pour la dérivée $\lambda'(x)$, on a enfin (quels que soient g et k) les identités

(19) $$\lambda'\left(\frac{\omega}{2}-x\right)=\lambda'\left(\frac{\omega}{2}+x\right)=-\lambda'(x),$$

(20) $$\lambda'(-x)=\lambda'(x)$$

qui se déduisent de (14), (15), (17) par de simples différentiations.

403. Dans le problème de la transformation des fonctions elliptiques, tel qu'on le pose habituellement, l'équation (1) du n° 387 est

$$\frac{du_1}{g_1\sqrt{(1-u_1^2)(1-k_1^2u_1^2)}}=\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Il diffère ainsi de celui dont nous avons formulé l'énoncé par ces deux particularités : que le polynôme du quatrième degré donné $a^{(0)}+\ldots+a^{(4)}u^4$ est de la forme $(1-u^2)(1-k^2u^2)$, et que les relations auxquelles doivent satisfaire les coefficients du

polynôme inconnu $a_1^{(0)}+\ldots+a_1^{(4)}u_1^4$ sont de nature à lui imposer la forme $g_1^2(1-u_1^2)(1-k_1^2u_1^2)$.

404. Les relations

$$g_1=k, \qquad k_1=\frac{1}{k}$$

et la formule

$$u_1=ku$$

donnent une transformation du premier degré évidente, qui équivaut à la relation

$$\lambda(x,k)=\frac{1}{k}\lambda\left(x,k,\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}\lambda\left(kx,\frac{1}{k}\right),$$

entre la fonction $\lambda(x,k)$ et la fonction $\lambda\left(kx,\frac{1}{k}\right)$ au module *réciproque* $\frac{1}{k}$.

405. L'achèvement, pour la fonction $\lambda(x,k)$, de la formule relative à l'addition des arguments, dont la construction a été commencée dans le Chapitre précédent, va montrer comment il faudrait procéder pour toute autre fonction de second ordre dont les propriétés caractéristiques seraient aussi connues.

Parmi les polynômes A, ..., entiers en $\lambda(x)$, $\lambda(y)$, qui figurent dans la formule générale (12) du n° 383 appliquée à la fonction λ, B est indépendant de $\lambda(x)$, D de $\lambda(x)$ et de $\lambda(y)$; nous écrirons les autres A_p+A_i, C_p+C_i, H_p+H_i, en décomposant chacun en deux parties contenant exclusivement, la première les puissances paires de $\lambda(x)$, la seconde les puissances impaires de cette fonction, puis nous ajouterons $\frac{\omega}{2}$ à x, ce qui, en vertu de la transformation (15), change $\lambda(x)$ en $-\lambda(x)$, par suite A_i, C_i, H_i en $-A_i$, $-C_i$, $-H_i$, puis $\lambda'(x)$ en $-\lambda'(x)$ (**402**, V), $\lambda(x+y)$ en $-\lambda(x+y)$, mais laisse tout le reste invariable. En écrivant donc que cette opération multiplie simplement par -1 le second membre de la formule en question, il vient facilement la condition

$$H_pA_p-H_iA_i-H_iB\lambda'(x)+(H_pC_p-H_iC_i)\lambda'(y)-H_iD\lambda'(x)\lambda'(y)=0,$$

quelles que soient x, y.

Comme cette relation est entière en $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$ en ne contenant $\lambda'(x)$ qu'au premier degré, de même nature aussi relativement à $\lambda(y)$, $\lambda'(y)$, on a forcément, comme au n° 383, III,

$$H_p A_p - H_i A_i = H_i B = H_p C_p - H_i C_i = H_i D = 0,$$

quelles que soient $\lambda(x)$, $\lambda(y)$. On ne peut avoir simultanément $B = D = 0$, car alors la formule considérée ne contiendrait pas $\lambda'(x)$ ce qui est impossible (383, I, *in fine*). On a donc

$$H_i = 0, \qquad \text{d'où} \qquad A_p = C_p = 0,$$

parce que H_p, H_i ne peuvent s'évanouir identiquement tous deux.

En conséquence, on a d'abord

$$A = a\lambda(x)\lambda(y),$$

parce que ce polynôme, dont le degré par rapport à $\lambda(x)$ est $\overline{\gtrless} 2$, ne peut contenir que des puissances impaires de cette fonction et qu'il est symétrique par rapport à $\lambda(x)$, $\lambda(y)$. On a ensuite

$$C = c\lambda(x),$$

parce que ce polynôme, de degré $\overline{\gtrless} 2$ en $\lambda(x)$, n'en peut contenir que des puissances impaires; d'où

$$B = c\lambda(y),$$

parce que la permutation de $\lambda(x)$, $\lambda(y)$ permute aussi B, C. On a enfin

$$H = h_0 + h_2[\lambda(x)^2 + \lambda(y)^2] + h_4\lambda(x)^2\lambda(y)^2,$$

parce que ce polynôme ne contient que des puissances paires de $\lambda(x)$, que le degré de cette fonction n'y peut surpasser 2, et qu'il est symétrique par rapport à $\lambda(x)$, $\lambda(y)$. Et dans ces quatre formules, a, c, ... sont maintenant des constantes. Sous le bénéfice de ces observations, la formule cherchée prend la forme

$$(21)\quad \lambda(x+y) = \frac{a\lambda(x)\lambda(y) + c[\lambda(x)\lambda'(y) + \lambda(y)\lambda'(x)] + D\lambda'(x)\lambda'(y)}{h_0 + h_2[\lambda(x)^2 + \lambda(y)^2] + h_4\lambda(x)^2\lambda(y)^2}.$$

Si maintenant on y fait $y = \frac{\omega}{2} - x$, le premier membre s'éva-

nouit quelle que soit x, et par suite aussi le numérateur du second membre, se réduisant à

$$(22) \qquad a\lambda(x)^2 - \mathrm{D}\lambda'(x)^2$$

à cause des identités (14), (19), cela parce que le dénominateur qui devient $h_0 + 2h_2\lambda(x)^2 + h_4\lambda(x)^4$ n'est pas identiquement infini. Le polynôme (22), entier en $\lambda(x)$, $\lambda'(x)$, contenant la première fonction à un degré < 4, degré par rapport à $\lambda(x)$ de l'équation entière irréductible entre cette fonction et $\lambda'(x)$, est identiquement nul (**332**, II), d'où $a = \mathrm{D} = 0$, ce qui réduit la formule (21) à

$$(23) \qquad \lambda(x+y) = \frac{c[\lambda(x)\lambda'(y) + \lambda(y)\lambda'(x)]}{h_0 + h_2[\lambda(x)^2 + \lambda(y)^2] + h_4\lambda(x)^2\lambda(y)^2}.$$

Pour $y = 0$, on a $\lambda(y) = 0$, $\lambda'(y) = 1$, et le premier membre se réduit à $\lambda(x)$; comme il doit en être ainsi pour le second, on a $h_2 = 0$, $c = h_0$.

Enfin l'hypothèse $y = -x + \frac{\omega'}{2}$ rend le premier membre infini, mais non le numérateur du second, cela du moins quelle que soit x; elle doit donc annuler le dénominateur, et, comme $\lambda(y)$ devient $-\frac{1}{k\lambda(x)}$ en vertu de la transformation (16), il faut qu'on ait $h_4 = -k^2h_0$. Moyennant quoi, la suppression du facteur commun $c = h_0$ donne à la formule cherchée la forme définitive

$$\lambda(x+y) = \frac{\lambda(x)\lambda'(y) + \lambda(y)\lambda'(x)}{1 - k^2\lambda(x)^2\lambda(y)^2}.$$

L'expression de $\lambda(x-y)$ se déduit de celle-ci par le changement du signe affectant le second terme du numérateur (**384**).

406. *En considérant la fonction* ${}^{(\omega)}\Xi_1(x)$ *à la période unique* ω, *à la fausse période* ω', *définie au n°* **359**, *on a*

$$(24) \qquad \lambda(x, k) = \frac{1}{k}\left[{}^{(\omega)}\Xi_1\left(x - \frac{\omega'}{2}\right) - {}^{(\omega)}\Xi_1\left(x - \frac{\omega}{2} - \frac{\omega'}{2}\right)\right].$$

Comme $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ sont les seuls infinis incongrus de $\lambda(x, k)$,

avec $\pm \frac{1}{k}$ pour résidus correspondants (402, III), il est certain (347) que les deux membres de cette relation ne diffèrent que d'une constante.

On a ${}^{(\omega)}\Xi_1\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -{}^{(\omega)}\Xi_1\left(\frac{\omega}{2}\right)$, parce que ${}^{(\omega)}\Xi_1(x)$ est impaire (343, III), puis $= 0$, parce que ω en est une période.

On a, d'autre part, ${}^{(\omega)}\Xi_1\left(x - \frac{\omega'}{2}\right) - \frac{1}{x - \frac{\omega'}{2}} = 0$ pour $x = \frac{\omega'}{2}$ (343, IV). Si donc on retranche $\frac{1}{k}\frac{1}{x - \frac{\omega'}{2}}$ des deux membres de la relation (24), ils s'annuleront à la fois pour $x = \frac{\omega'}{2}$, à cause de ce que nous venons de dire et de la forme du développement (18). La constante en question se réduit donc à o.

407. Le théorème du n° 364 fournit, dans une bande comprise entre deux parallèles à la période ω menées par les points $q\omega' - \frac{\omega'}{2}$, $q\omega' + \frac{\omega'}{2}$, le développement de $\lambda(x, k)$ en série procédant suivant les sinus et cosinus de $m\frac{2\pi}{\omega}x$. Chacun construira aisément la série qui, d'ailleurs, est inusitée.

408. *En appelant* $\vartheta(x)$ *la fonction* ${}^{(\Pi)}O(x)$ *du n° 365, construite avec* $\Pi = \frac{\omega}{2}$, $\Omega = \omega'$, *on a*

$$\lambda(x, k) = \vartheta\left(-\frac{\omega'}{2}\right) e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}x} \frac{\vartheta(x)}{\vartheta\left(x - \frac{\omega'}{2}\right)}, \tag{25}$$

selon que le second élément du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ *est positif ou négatif.*

Nous appliquerons les considérations du n° 355 à $\lambda(x, k)$ fonction du second ordre aux périodes ω, ω', ayant dans sa première maille $\left(0, \frac{\omega}{2}\right)$ et $\left(\frac{\omega'}{2}, \frac{\omega + \omega'}{2}\right)$ pour zéros et infinis, tous simples, en prenant pour $O(x)$ la fonction unipériodique ${}^{(\omega)}O(x)$ con-

struite avec $\Pi = \omega$, $\Omega = \omega'$ (365). On a alors

$$(m_1 a_1 + m_2 a_2) - (\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2) = \left(1.0 + 1.\frac{\omega}{2}\right) - \left(1.\frac{\omega'}{2} + 1.\frac{\omega+\omega'}{2}\right) = -\omega',$$

d'où $p = 0$, $q = -1$. Comme $A_\omega = 0$, on a de plus $\Lambda = \pm\frac{2\pi i}{\omega}$, et il vient, en appelant K quelque constante à déterminer ultérieurement,

$$\lambda(x, k) = \mathrm{K} e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}x} \frac{{}^{(\omega)}O(x)\,{}^{(\omega)}O\left(x - \frac{\omega}{2}\right)}{{}^{(\omega)}O\left(x - \frac{\omega'}{2}\right){}^{(\omega)}O\left(x - \frac{\omega+\omega'}{2}\right)}.$$

A cause de $A_\omega = 0$, la quantité Γ du n° 350 est nulle, et le théorème du n° 356 réduit le numérateur de cette fraction à

$$\mathrm{H}\mathfrak{S}\left(x - \frac{\omega}{2}\right) = -\mathrm{H}\mathfrak{S}(x) \quad (365).$$

Le dénominateur se réduit donc aussi à $-\mathrm{H}\mathfrak{S}\left(x - \frac{\omega'}{2}\right)$, d'où

$$\lambda(x, k) = \mathrm{K} e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}x} \frac{\mathfrak{S}(x)}{\mathfrak{S}\left(x - \frac{\omega'}{2}\right)}.$$

En faisant enfin tendre x vers zéro et se rappelant qu'on a

$$\lim\frac{\mathfrak{S}(x)}{x} = \lim\frac{\lambda(x, k)}{x} = 1 \quad (352, \mathrm{I}), (402, \mathrm{I}),$$

il vient, pour déterminer K, la condition

$$1 = \frac{\mathrm{K}}{\mathfrak{S}\left(-\frac{\omega'}{2}\right)},$$

ce qui donne bien à la dernière relation la forme voulue (25).

409. Comme on a (353)

$$\frac{\mathfrak{S}\left(x - \frac{\omega'}{2}\right)}{\mathfrak{S}\left(-\frac{\omega'}{2}\right)} = \mathfrak{S}\left(x, \frac{\omega'}{2}\right),$$

on peut écrire, au lieu de (25),

$$(26)\qquad \lambda(x, k) = e^{\pm\frac{2\pi i}{\omega}x}\,\frac{\mathfrak{I}(x)}{\mathfrak{I}\left(x, \frac{\omega'}{2}\right)},$$

formule qui permet de résoudre ce problème :

Connaissant le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ *de deux périodes elliptiques de* $\lambda(x, k)$, *calculer ces périodes et le module* k.

En faisant effectivement $x = \frac{\omega}{4}$, puis $= \frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}$, la relation (26) donne (399)

$$1 = \pm i\,\frac{\mathfrak{I}\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\mathfrak{I}\left(\frac{\omega}{4}, \frac{\omega'}{2}\right)}, \qquad \frac{1}{k} = \pm i e^{\pm\pi i\frac{\omega'}{\omega}}\,\frac{\mathfrak{I}\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)}{\mathfrak{I}\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}, \frac{\omega'}{2}\right)},$$

les signes supérieurs devant être adoptés, ou les signes inférieurs, selon que le second élément de $\frac{\omega'}{\omega}$ est positif ou négatif.

D'après le n° 366, les seconds membres de ces formules ne dépendent que de $\frac{\omega'}{\omega}$ qui est donné, et de $\frac{\omega}{2\pi}$, ce dernier rapport entrant simplement comme facteur dans les numérateurs. Cela posé, la première fournit $\frac{\omega}{2\pi}$ sous forme du quotient de deux séries factorielles; d'où $\omega = \frac{\omega}{2\pi} \times 2\pi$, puis $\omega' = \omega \times \frac{\omega'}{\omega}$. La valeur de $\frac{\omega}{2\pi}$ une fois connue, la seconde formule fournit celle de k sous la même forme.

410. Dans les applications, le module de $\lambda(x, k)$ est toujours réel, et on le prend positif. Comme il ne peut être $= 1$ (400), la transformation du n° 404 *permet de le supposer toujours* < 1. La fonction jouit alors des propriétés numériques suivantes, résultant immédiatement de l'équation différentielle (10) combinée avec les propriétés fondamentales résumées au n° 399; nous nous contenterons de les énoncer.

I. *Des deux périodes fournies par les formules* (12), (13),

la première est réelle positive, la seconde a sa partie réelle nulle.

II. *La fonction est réelle pour toutes les valeurs de x, soit réelles, soit ayant un multiple entier de $\frac{\omega'}{2}$ pour partie imaginaire.*

III. *Quand x croît de zéro à $\frac{\omega}{4}$, puis de $\frac{\omega}{4}$ à $\frac{\omega}{2}$, puis de $\frac{\omega}{2}$ à $\frac{3\omega}{4}$, puis de $\frac{3\omega}{4}$ à ω, $\lambda(x, k)$ croît de zéro à 1, décroît de 1 à zéro, puis de zéro à -1, et croît ensuite de -1 à zéro.* Sa marche générale rappelle ainsi celle de $\sin x$.

IV. *La partie réelle de $\lambda(x, k)$ s'évanouit, quand celle de x est nulle ou multiple entier de $\frac{\omega}{2}$; la valeur correspondante de $\lambda'(x, k)$ est toujours réelle.*

En appelant x', x'' les deux éléments de x, et appliquant la formule d'addition (405) au calcul de $\lambda(x' + ix'', k)$, on discute facilement la fonction pour toutes les autres valeurs de x. On voit ainsi que la fonction n'a quelque élément nul que dans les cas spécifiés ci-dessus.

411. D'après la formule (26), $\lambda(x, k)$ est le quotient des deux fonctions $\mathfrak{I}(x)$, $e^{\mp\frac{2\pi i}{\omega}x}\,\mathfrak{I}\left(x, \frac{\omega'}{2}\right)$. Dans le cas qui nous occupe, où ω est réelle et ω' de la forme $i\omega'_{\prime\prime}$, $\omega'_{\prime\prime}$ étant réelle, on remarquera que *ces deux fonctions auxiliaires sont aussi réelles pour toutes les valeurs réelles de x.*

Effectivement, si l'on réalise ces hypothèses en faisant $\Pi = \frac{\omega}{2}$, $\Omega = i\omega'_{\prime\prime}$, dans le développement (54) du n° 366, on voit de suite que le facteur médian est réel, que ceux équidistants des extrêmes sont imaginaires conjugués, d'où la réalité de $\mathfrak{I}(x)$. Comme $\lambda(x, k)$ est réelle dans le cas dont il s'agit (410, II), l'autre fonction ne peut manquer de l'être aussi, chose facile à vérifier par l'examen du développement (55) écrit au n° 367.

Des Tables des valeurs réelles de ces deux fonctions (ou mieux de leurs logarithmes) suppléeront donc à celle des valeurs réelles de $\lambda(x, k)$.

Expressions des intégrales elliptiques réduites à la forme canonique.

412. L'adoption des fonctions $\lambda(x)$ pour type des fonctions bipériodiques du second ordre rend avantageuse la transformation préalable de toute intégrale elliptique que l'on aurait à évaluer, en une autre où le polynôme sous le radical a la forme bicarrée de celui qui figure dans l'équation différentielle des fonctions $\lambda(x)$. La remarque suivante rend évidente la possibilité de cette opération.

On peut assigner quatre constantes p', p'', q', q'' de déterminant $\neq 0$, telles que les transformations primaires de $f_1(x)$ liée à la fonction quelconque du second ordre $f(x)$ par la relation du premier degré

$$f(x) = \frac{p' f_1(x) + p''}{q' f_1(x) + q''} \tag{1}$$

aient les formes simples définies au n° 395.

Il est permis d'admettre que la fonction considérée $f(x)$ est à infinis simples; car, si c'était une fonction $E_\infty(x)$, il suffirait, après avoir choisi arbitrairement quelque constante h non égale à l'une des trois valeurs cardinales de cette fonction, de poser

$$f(x) = \frac{1}{E_\infty(x) - h},$$

d'où

$$E_\infty(x) = \frac{h f(x) + 1}{f(x)}, \tag{2}$$

pour que la fonction du second ordre $f(x)$ aux mêmes périodes n'eût que des infinis simples.

Cela posé, soient Π une période élémentaire de $f(x)$ et α, β, γ les coefficients de la transformation primaire correspondante

$$\alpha f(x) f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right) + \beta\left[f(x) + f\left(x + \frac{\Pi}{2}\right)\right] + \gamma = 0;$$

Π est aussi une période élémentaire de $f_1(x)$ pour laquelle les

coefficients de la transformation primaire correspondante ont les valeurs

$$\alpha_1 = \alpha p'^2 + 2\beta p'q' + \gamma q'^2,$$
$$\beta_1 = \alpha p'p'' + \beta(p'q'' + q'p'') + \gamma q'q'',$$
$$\gamma_1 = \alpha p''^2 + 2\beta p''q'' + \gamma q''^2.$$

Pour que cette nouvelle transformation ait la forme voulue, il faut donc et il suffit qu'outre $\beta_1 \neq 0$ on ait $\alpha_1 = \gamma_1 = 0$, et, pour cela, que (p', q'), (p'', q'') soient deux couples de solutions de l'équation homogène du deuxième degré

$$(3) \qquad \alpha p^2 + 2\beta pq + \gamma q^2 = 0,$$

offrant un déterminant $\neq 0$, c'est-à-dire distincts.

En représentant par (ab) l'association des valeurs cardinales de $f(x)$ à laquelle appartient la période Π, les coefficients α, β, γ, déterminés par les équations (12), (13) du n° **392**, sont proportionnels, égaux même si on le veut, à

$$(4) \qquad (a+b)-(c+d), \quad cd-ab, \quad ab(c+d)-cd(a+b),$$

d'où

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta^2 - \alpha\gamma &= \begin{vmatrix} [1.d(a-c)+1.a(b-d)] & [1(a-c)+1(b-d)] \\ [b.d(a-c)+c.a(b-d)] & [b(a-c)+c(b-d)] \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & c \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} d(a-c) & a(b-d) \\ (a-c) & (b-d) \end{vmatrix} \\ &= (a-c)(a-d)(b-c)(b-d), \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire $\beta^2 - \alpha\gamma \neq 0$, parce que les quantités a, b, c, d sont essentiellement inégales. L'équation (3) admet donc bien les deux couples de solutions distincts (p', q'), (p'', q''), dont nous avons besoin.

D'ailleurs, on a

$$\beta_1^2 = \beta_1^2 - \alpha_1\gamma_1 = (\beta^2 - \alpha\gamma)(p'q'' - p''q')^2 \neq 0,$$

d'où $\beta_1 \neq 0$ comme il le fallait aussi.

413. Considérons maintenant l'équation différentielle de la fonction $f(x)$,

$$\frac{df}{dx} = \sqrt{\varphi(f)},$$

où $\varphi(f)$ est un polynôme en f du quatrième ou du troisième degré, et exécutons-y la substitution du premier degré

$$f = \frac{P'f_1 + P''}{Q'f_1 + Q''},$$

identique à (1) dans le premier cas, ou résultant de sa composition avec (2) dans le second.

Les transformations primaires de $f_1(x)$ ayant la forme canonique du n° 395, l'équation différentielle devient

$$\frac{df_1}{dx} = \sqrt{\varphi_1(f_1)},$$

où φ_1 est maintenant un polynôme bicarré. Mais, comme $\frac{df}{dx}$ s'est transformée en le produit de $\frac{df_1}{dx}$ par

$$\frac{P'Q'' - P''Q'}{(Q'f_1 + Q'')^2},$$

le radical se transforme nécessairement en le produit de $\sqrt{\varphi_1(f_1)}$ par le même facteur, d'où cette conclusion :

La substitution rationnelle du premier degré

$$u = \frac{P'u_1 + P''}{Q'u_1 + Q''}$$

change l'intégrale elliptique générale

$$\int F[u, \sqrt{\varphi(u)}]\, du \tag{6}$$

en une autre

$$\int F_1[u_1, \sqrt{\varphi_1(u_1)}]\, du_1, \tag{7}$$

où $\varphi_1(u_1)$ est un polynôme bicarré tel que

$$\varphi_1(u_1) = A(1 + m'u_1^2)(1 + m''u_1^2). \tag{8}$$

On notera que les constantes P', ... de la substitution sont les

racines de l'équation du deuxième degré (3), dont les coefficients s'expriment toujours rationnellement au moyen de celles de l'équation entière $\varphi(u) = 0$ (du quatrième ou du troisième degré).

414. Dans cette dernière intégrale, il suffit actuellement de faire

$$u_1 = \frac{u_2}{\sqrt{-m'}},$$

puis de poser, en supprimant les indices,

$$\sqrt{\frac{m''}{m'}} = k, \qquad \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)} = \sqrt{R}$$

pour obtenir la forme canonique

$$\int F(u, \sqrt{R})\,du.$$

415. Pour obtenir maintenant les expressions des intégrales réduites des trois espèces, il faut se reporter au n° **378** et prendre $\mathcal{E}(x) = \lambda(x)$, le module de $\lambda(x)$ étant k, c'est-à-dire exécuter dans ces intégrales la substitution

$$u = \lambda(x). \tag{9}$$

L'intégrale de première espèce est toujours (à une constante arbitraire près) la fonction implicite de u que définit l'équation (9) résolue par rapport à x.

416. La première des intégrales de deuxième espèce (**298**) s'obtient par les procédés élémentaires sans le secours de la substitution (9). Car, ayant la forme

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{R}},$$

où R est bicarré, elle se ramène immédiatement aux intégrales circulaires (**225**), en faisant $u^2 = v$, d'où $u\,du = \frac{1}{2}\,dv$.

417. La seconde intégrale de deuxième espèce devient

$$\int \lambda(x)^2\,dx.$$

En élevant au carré la formule (18) du n° 402, IV, il vient

$$\lambda(x)^2 = \frac{1}{k^2(x-\alpha)^2}[1+a'_2(x-\alpha)^2+\ldots]^2$$
$$= \frac{1}{k^2(x-\alpha)^2} + A_0 + A_2(x-\alpha)^2 + \ldots,$$

et, pour chacun de ses infinis α, la décomposition de $\lambda(x)^2$ donne ainsi l'unique fraction simple $\frac{1}{k^2(x-\alpha)^2}$. On en conclut (347)

$$\lambda(x)^2 = \frac{1}{k^2}\left[\Xi_2\left(x-\frac{\omega'}{2}\right)+\Xi_2\left(x-\frac{\omega+\omega'}{2}\right)+\mathrm{H}\right],$$

H désignant une certaine constante à déterminer, et Ξ_2 ayant été construite en prenant $\Pi = \omega$, $\Omega = \omega'$. L'application du théorème du n° 350 donne plus simplement

$$\lambda(x)^2 = \frac{1}{k^2}\left[\Xi_2\left(x-\frac{\omega'}{2}\right)-\Xi_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right],$$

Ξ_2 ayant maintenant $\frac{\omega}{2}$, ω' pour (vraies) périodes. Aucun terme constant n'est plus à ajouter ici, parce que les deux membres s'évanouissent pour $x = 0$, à cause de $\Xi_2\left(-\frac{\omega'}{2}\right) = \Xi_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)$ (343, III).

L'intégration donne

$$\int\lambda(x)^2\,dx = -\frac{1}{k^2}\left[\Xi_1\left(x-\frac{\omega'}{2}\right)+x\,\Xi_2\left(\frac{\omega'}{2}\right)\right]+\mathrm{C},$$

C étant la constante arbitraire.

En choisissant la fonction Ξ_1 dont l'augment $A_{\frac{\omega}{2}}$ est nul, on peut, dans cette formule, introduire partout la fonction $\mathfrak{I}(x)$ définie au n° 408. Effectivement, on a alors (352, I)

$$\Xi_1(x) = \frac{d}{dx}\,l\mathfrak{I}(x) = \frac{\mathfrak{I}'(x)}{\mathfrak{I}(x)},$$
$$\Xi_2(x) = -\frac{d}{dx}\,\Xi_1(x) = \frac{\mathfrak{I}'(x)^2-\mathfrak{I}(x)\mathfrak{I}''(x)}{\mathfrak{I}(x)^2}.$$

418. On obtient un résultat plus élégant, et encore exprimable au moyen de la fonction $\mathfrak{I}(x)$, en considérant, au lieu de l'intégrale

de troisième espèce

$$\int \frac{du}{(u-\mathfrak{a})\sqrt{R}},$$

la différence de deux semblables intégrales

$$\int \frac{du}{(u-\mathfrak{a})\sqrt{R}} - \int \frac{du}{(u+\mathfrak{a})\sqrt{R}} = 2\mathfrak{a} \int \frac{du}{(u^2-\mathfrak{a}^2)\sqrt{R}},$$

qui est équivalente à la proposée parce que, R étant bicarré, leur somme

$$\int \frac{2u\,du}{(u^2-\mathfrak{a}^2)\sqrt{R}}$$

est réductible aux intégrales circulaires, comme dans le cas mentionné au n° **416**.

Au lieu du paramètre $\mathfrak{a}$, nous introduirons une racine quelconque α de l'équation $\lambda(x) = \mathfrak{a}$, qui ne peut être congrue ni à $\pm \frac{\omega}{4}$, ni à $\pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$, parce que $\mathfrak{a}$ est supposé n'être égal ni à ± 1, ni à $\pm \frac{1}{k}$, racines de $R = 0$. Après la substitution (9), nous aurons donc à calculer

$$(10) \qquad \int \left[\frac{1}{\lambda(x) - \lambda(\alpha)} - \frac{1}{\lambda(x) + \lambda(\alpha)}\right] dx.$$

Chacune des fractions entre crochets est une fonction du second ordre aux périodes élémentaires ω, ω', et à infinis simples, à cause de α non congru à $\pm \frac{\omega}{4}$, ni à $\pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$; ces infinis sont

$$\pm \alpha + m\omega + m'\omega', \quad \frac{\omega}{2} \mp \alpha + m\omega + m'\omega',$$

les signes supérieurs donnant ceux de la première, et les signes inférieurs ceux de la seconde, avec les mêmes résidus $\frac{1}{\lambda'(\alpha)}$, $-\frac{1}{\lambda'(\alpha)}$, pour les infinis correspondants des deux fractions, à cause des relations (19), (20) du n° **402**, V.

En vertu du théorème du n° **347**, la fonction sous le signe est

donc égale à

$$\frac{1}{\lambda'(\alpha)}\left\{\left[\Xi_1(x-\alpha)+\Xi_1\left(x-\alpha+\frac{\omega}{2}\right)\right]\right.$$
$$\left.-\left[\Xi_1(x+\alpha)+\Xi_1\left(x+\alpha+\frac{\omega}{2}\right)\right]+\mathrm{H}\right\},$$

Ξ_1 ayant ω, ω' pour fausses périodes, avec un premier augment que nous prendrons de suite nul. Le théorème du n° **350**, qui est encore applicable, réduit cette expression à

$$(11)\qquad \frac{1}{\lambda'(\alpha)}\left[\Xi_1(x-\alpha)-\Xi_1(x+\alpha)+\mathrm{K}\right],$$

Ξ_1 ayant maintenant $\frac{\omega}{2}$, ω' pour fausses périodes avec un premier augment toujours nul, et l'on a

$$(12)\qquad \mathrm{K}=-\left[\Xi_1\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right)-\Xi_1\left(\frac{\omega'}{2}+\alpha\right)\right],$$

parce que la fonction placée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (10) s'évanouit pour $x=\frac{\omega'}{2}$. En intégrant l'expression (11), il vient pour notre intégrale (10), en se rappelant la définition de la fonction ϑ (408)

$$\frac{1}{\lambda'(\alpha)}\left[l\,\frac{\vartheta(x-\alpha)}{\vartheta(x+\alpha)}+\mathrm{K}x\right]+\mathrm{C}\quad(352,\ \mathrm{I}),$$

et, pour déterminer K, on peut employer au lieu de (12) la formule équivalente

$$\mathrm{K}=-\left[\frac{\vartheta'\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega'}{2}-\alpha\right)}-\frac{\vartheta'\left(\frac{\omega'}{2}+\alpha\right)}{\vartheta\left(\frac{\omega'}{2}+\alpha\right)}\right].$$

419. Dans les applications numériques, les coefficients du polynôme $\varphi(u)$ et de la fonction rationnelle F de l'intégrale elliptique générale (6) sont naturellement réels ; il importe donc de conduire sa réduction de manière à n'introduire aucune quantité imaginaire, et aussi à avoir pour le module k de l'intégrale de première espèce une valeur <1, condition particulièrement avantageuse pour la construction de Tables numériques. Voici, en gros, comment on y parvient.

Dans la substitution (2), s'il y a lieu de l'employer, on prend pour h une quantité réelle.

Quant à la substitution (1), on peut toujours s'arranger de manière que ses coefficients soient réels. Ils dépendent effectivement de l'équation du deuxième degré (3), susceptible de trois formes différentes correspondant aux trois associations deux à deux possibles de trois racines choisies à volonté parmi celles de l'équation du quatrième degré

$$\varphi(u) = 0.$$

Comme les coefficients de cette dernière sont réels, les trois cas suivants pourront seuls se présenter.

I. *Les quatre racines sont réelles.*

En appelant c, d la plus petite et la plus grande (algébriquement), les valeurs (4) de α, β, γ sont réelles, et l'on a $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$ à cause de la relation (5).

II. *Il y a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.*

On prendra pour c, d ces deux dernières. Les quantités (4) sont encore réelles, avec $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, parce que $a - c$, $a - d$ sont imaginaires conjuguées ainsi que $b - c$, $b - d$.

III. *Il y a deux paires de racines imaginaires conjuguées.*

En constituant les couples (ab), (cd) avec ces deux paires respectivement, les quantités (4) sont toujours réelles, avec $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, parce que les produits partiels $(a - c)(a - d)$ et $(b - c)(b - d)$ sont imaginaires conjugués.

En opérant de cette manière, les coefficients A, m', m'' du polynôme bicarré (8) et ceux de la composante rationnelle F_1, dans l'intégrale (7), ne peuvent manquer d'avoir des valeurs réelles; si, de plus, m', m'' sont tous deux positifs, A l'est forcément aussi, sans quoi le radical serait imaginaire pour toutes les valeurs réelles de u_1, ce qui ne peut se présenter dans une question pratique.

Arrivé là, on décompose l'intégrale en deux parties de la forme

$$\int {}'F_1(u_1^2)\frac{u_1\,du_1}{\sqrt{\varphi_1(u_1)}}, \qquad \int {}''F_1(u_1^2)\frac{du_1}{\sqrt{\varphi_1(u_1)}},$$

${}'F_1$, ${}''F_1$, désignant des composantes rationnelles.

La première partie se ramène immédiatement aux intégrales circulaires par la substitution $u_1^2 = v$, parce que $\varphi_1(u_1)$ est bicarré.

On donne enfin au polynôme sous le radical dans la deuxième partie la forme canonique $\varphi_2(u_2) = (1 - u_2^2)(1 - k^2 u_2^2)$, avec k réel et < 1, en posant $u_1 = \upsilon(u_2)$, υ étant une fonction algébrique très variable avec les signes relatifs de A, m', m'', qui laisse fonction rationnelle de u_2^2 le multiplicateur de $\frac{du_2}{\sqrt{\varphi_2(u_2)}}$ sous le signe $\int$.

Ces substitutions, au nombre de 5, n'offrent aucun intérêt théorique, puisqu'il s'agit simplement de satisfaire à certaines inégalités numériques. On les trouvera dans tous les ouvrages spéciaux sur les fonctions elliptiques.

Fonctions elliptiques canoniques auxiliaires $\mu(x)$ ou $\operatorname{cn} x$, $\nu(x)$ ou $\operatorname{dn} x$, $\varpi(x)$ ou $\operatorname{tn} x$.

420. Dans les formules relatives à la théorie des fonctions elliptiques, l'usage a introduit d'autres fonctions du second ordre spéciales dont il nous faut parler encore.

On désigne par $\mu(x)$ ou $\operatorname{cn} x$, la fonction composée irrationnelle de $\lambda(x)$ [écrite au lieu de $\lambda(x, k)$], que définit la formule

$$(1) \qquad \mu(x) = \sqrt{1 - \lambda(x)^2},$$

le radical partant en $x = 0$, de la valeur initiale $+1$. Elle coïncide avec la fonction $\mathfrak{N}(x)$ étudiée au n° 393, en prenant

$$a = +1, \quad b = -1, \quad c = \frac{1}{k}, \quad d = -\frac{1}{k}, \quad G = k^2,$$

$$E(x) = \lambda(x), \quad \Pi = \omega, \quad \Omega = \omega', \quad H = -1.$$

La relation $a + b = c + d (= 0)$ nous place dans le premier cas du numéro cité; $\mu(x)$ est une fonction méromorphe du second ordre ayant

$$\omega_1 = \omega, \quad \omega'_1 = \omega' + \frac{\omega}{2}$$

pour périodes élémentaires. Ses zéros sont les valeurs de x rendant $\lambda(x) = \pm 1$; ils sont congrus à $\pm \frac{\omega}{4}$ suivant ω, ω', et aussi

bien à

$$\frac{\omega_1}{4}, \quad \frac{\omega_1}{4}+\frac{\omega_1}{2},$$

suivant ω_1, ω'_1. Ses infinis sont ceux de $\lambda(x)$, congrus à $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega+\omega'}{2}$ suivant ω, ω', et à

$$\frac{\omega_1}{4}+\frac{\omega'_1}{2}, \quad \frac{\omega_1}{4}+\frac{\omega_1+\omega'_1}{2},$$

suivant ω_1, ω'_1.

La constante supplémentaire de $\mu(x)$, pour laquelle on peut prendre la somme des zéros diminuée de ω_1, est $=0$, d'où

$$\mu(-x)=\mu(x).$$

421. En conséquence, la fonction du second ordre $\mu\left(-\frac{\omega_1}{4}+x\right)$, aux périodes ω_1, ω'_1, a ses zéros et ses infinis congrus, les premiers à 0, $\frac{\omega_1}{2}$, les seconds à $\frac{\omega'_1}{2}$, $\frac{\omega_1+\omega'_1}{2}$; de plus, elle se réduit à $\mu(0)=1$ pour $x=\frac{\omega_1}{4}$. *C'est donc une fonction elliptique* λ_1, *aux périodes elliptiques* ω_1, ω'_1 (399). Il est facile de calculer son multiplicateur g_1 et son module k_1.

On a d'abord $g_1=\lambda'_1(0)=\mu'\left(-\frac{\omega_1}{4}\right)=\mu'\left(-\frac{\omega}{4}\right)$ (397); la différentiation de la formule de définition (1) donne

$$(2) \qquad \mu'(x)=-\lambda(x)\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1-\lambda(x)^2}}=-\lambda(x)\sqrt{1-k^2\lambda(x)^2},$$

l'égalité $\lambda'(0)=1$ (402, I), assujettissant ce radical à la condition initiale $\sqrt{1-k^2\lambda(0)^2}=1$. Si donc on pose

$$k'=\sqrt{1-k^2},$$

en choisissant celle des deux déterminations de ce radical numérique, qui est la valeur finale en $x=-\frac{\omega_1}{4}=-\frac{\omega}{4}$, du radical variable précédemment défini, on aura

$$g_1=k'.$$

Cette quantité k' se nomme le *module complémentaire* de k, à cause de $k^2+k'^2=1$.

On a enfin (399)

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{k_1} &= \lambda_1\left(\frac{\omega_1}{4}+\frac{\omega_1'}{2}\right)=\mu\left(\frac{\omega_1'}{2}\right)=\mu\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)\\ &=\sqrt{1-\lambda\left(\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}=\mp\frac{ik'}{k}, \end{aligned}\right.$$

où il faut choisir le signe ambigu de manière à obtenir la valeur de $\mu(x)$ en $x=\frac{\omega}{4}+\frac{\omega'}{2}$. On en conclut

$$k_1=\pm\frac{ik}{k'},$$

d'où

$$\mu\left(-\frac{\omega_1}{4}+x\right)=\lambda\left(k'x,\ \pm\frac{ik}{k'}\right).$$

422. Cette relation donne pour les transformations primaires de $\mu(x)$

$$\mu\left(\frac{\omega_1}{2}+x\right)=-\mu(x),$$

$$\mu\left(\frac{\omega_1'}{2}+x\right)=\mp\frac{ik'}{k}\frac{1}{\mu(x)},$$

dont la première résulte encore de l'identité (24) du n° 393.

423. La fonction $\nu(x)$ ou $\mathrm{dn}\,x$ se définit par la formule

$$\nu(x)=\sqrt{1-k^2\lambda^2(x)},$$

avec la condition initiale $\nu(0)=1$. Elle coïncide encore avec la fonction $\mathfrak{M}(x)$ du n° 393 en prenant

$$a=\frac{1}{k},\qquad b=-\frac{1}{k},\qquad c=1,\qquad d=-1,\qquad G=k^2,$$

$$E(x)=\lambda(x),\qquad H=-k^2,$$

mais ici

$$\Pi=\omega+2\omega',\qquad \Omega=\omega',$$

pour avoir des périodes appartenant aux associations (ab), (ac), des valeurs cardinales (391).

L'égalité $a+b=c+d(=0)$ nous place toujours dans le premier cas du même n° 393; $\nu(x)$ est encore une fonction méro-

morphe du second ordre, ayant les périodes élémentaires $\omega + 2\omega'$, $\frac{\omega}{2} + 2\omega'$, auxquelles nous pourrons évidemment substituer

$$\omega_2 = 2\omega', \qquad \omega'_2 = \frac{\omega}{2}.$$

Ses zéros, rendant $\lambda(x) = \pm\frac{1}{k}$, sont congrus à $\pm\left(\frac{\omega}{4} + \frac{\omega'}{2}\right)$ suivant ω, ω', et à

$$\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}, \quad \left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}\right) + \frac{\omega_2}{2},$$

suivant ω_2, ω'_2.

Ses infinis, appartenant à $\lambda(x)$, sont congrus à $\frac{\omega'}{2}$, $\frac{\omega + \omega'}{2}$ suivant ω, ω' et à

$$\left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}\right) + \frac{\omega'_2}{2}, \quad \left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}\right) + \frac{\omega_2 + \omega'_2}{2},$$

suivant ω_2, ω'_2.

Sa constante supplémentaire, somme des zéros ou bien des infinis, est congrue à o, et l'on a encore

$$\nu(-x) = \nu(x).$$

424. La fonction du second ordre $\nu\left[-\left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}\right) + x\right]$, aux périodes ω_2, ω'_2, a, d'après ce qui précède, ses zéros et ses infinis congrus à o, $\frac{\omega_2}{2}$ et $\frac{\omega'_2}{2}$, $\frac{\omega_2 + \omega'_2}{2}$; en outre, pour $x = \frac{\omega_2}{4} = \frac{\omega'}{2}$, elle se réduit à $\nu\left(-\frac{\omega}{4}\right) = \nu\left(\frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{1 - k^2\lambda\left(\frac{\omega}{4}\right)^2} = k'$ (421). *On en conclut que* $\frac{1}{k'}\nu\left[-\left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega'_2}{2}\right) + x\right]$ *est une fonction elliptique* $\lambda_2(x)$, *ayant* ω_2, ω'_2 *pour première et seconde périodes elliptiques*. Calculons encore son multiplicateur g_2 et son module k_2.

On a

$$g_2 = \lambda'_2(0) = \frac{1}{k'}\nu'\left(-\frac{\omega_2}{4} - \frac{\omega'_2}{2}\right) = \frac{1}{k'}\nu'\left(-\frac{\omega}{4} - \frac{\omega'}{2}\right),$$

et de

$$(4) \qquad \frac{1}{k'}\nu'(x) = -\frac{k^2}{k'}\lambda(x)\frac{\lambda'(x)}{\sqrt{1 - k^2\lambda(x)^2}} = -\frac{k^2}{k'}\lambda(x)\mu(x),$$

on déduit

$$g_2 = -\frac{k^2}{k'} \times \left(-\frac{1}{k}\right) \times \left(\mp i \frac{k'}{k}\right) = \mp i,$$

d'après la relation (3) où nous avons levé l'ambiguïté du radical.

On a de plus

$$\frac{1}{k_2} = \lambda_2\left(\frac{\omega_2}{4} + \frac{\omega_2'}{2}\right) = \frac{1}{k'}\nu(0) = \frac{1}{k'},$$

d'où

$$k_2 = k',$$

et finalement

$$\nu\left(-\frac{\omega_2}{4} - \frac{\omega_2'}{2} + x\right) = k'\lambda(\mp ix,\ k').$$

425. D'après cela, les transformations primaires de $\nu(x)$ sont

$$\nu\left(\frac{\omega_2}{2} + x\right) = -\nu(x),$$
$$\nu\left(\frac{\omega_2'}{2} + x\right) = \frac{k'}{\nu(x)},$$

dont la première résulte encore de l'identité (24) du n° 393.

426. Quand le multiplicateur g se réduit à 1, l'équation différentielle de $\lambda(x, k)$ (397), combinée avec les définitions de $\mu(x, k)$, $\nu(x, k)$ et les relations (2), (4), montre que ces trois fonctions peuvent être considérées comme les intégrales du système immédiat d'équations différentielles totales

$$\frac{d\lambda}{dx} = \mu\nu, \qquad \frac{d\mu}{dx} = -\nu\lambda, \qquad \frac{d\nu}{dx} = -k^2\lambda\mu,$$

complété par les conditions initiales

$$\lambda = 0, \qquad \mu = \nu = 1, \qquad \text{pour} \qquad x = 0.$$

427. En adjoignant à $\lambda(x, k)$ les fonctions $\mu(x)$, $\nu(x)$ mentionnées ci-dessus, et quelquefois aussi

$$\varpi(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(x)},$$

fonction du second ordre aux périodes élémentaires $\frac{\omega}{2}$, $2\omega'$, aux

transformations primaires de la forme simple du n° **395**, impaire, ayant pour zéros ceux de $\lambda(x)$ et pour infinis ceux de $\mu(x)$, fonction que l'on représente encore par $\text{tn}\,x$, on a ce que l'on nomme plus spécialement les *fonctions elliptiques;* toutes dépendent uniquement du module k de la première. En imitant ce que nous avons fait pour celle-ci (**406** *et suiv.*), le lecteur exécutera sans peine les développements de ces autres fonctions, dont la possibilité pour la fonction bipériodique la plus générale a été établie au Chapitre X. Ceux en séries factorielles peuvent tous être formés au moyen de la fonction ϑ du n° **408**.

La structure si simple et si maniable des transformations primaires de $\lambda(x)$, son imparité, rendent son emploi particulièrement avantageux dans les calculs numériques relatifs aux fonctions bipériodiques. Ce sont ces motifs qui ont fait adopter les fonctions λ pour type des fonctions du second ordre.

Les fonctions accessoires μ, ν, ϖ (avec d'autres analogues) peuvent débarrasser les calculs de certains radicaux ambigus, et simplifier quelques formules; à cela nous semble se limiter leur importance qui est comme nulle en théorie. Auprès de $\lambda(x)$, elles occupent une place comparable à celle de $\cos x$, $\tan x$ à côté de $\sin x$; mais il ne faut pas forcer l'analogie. Ces trois dernières fonctions sont liées très étroitement par le cercle qui en représente géométriquement les propriétés, et qui, en Mécanique, en Physique, joue un rôle absolument hors de pair (ceux de la droite et du plan toutefois exceptés). Rien de semblable n'existe pour les fonctions λ, μ, ν, ϖ, ..., dont la portée des propriétés relatives ne dépasse pas celle d'un artifice quelconque de calcul.



CHAPITRE XIII.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS EULÉRIENNES.

Réduction de l'intégrale de première espèce à celle de deuxième espèce.

428. Les transcendantes étudiées jusqu'ici provenaient, directement ou indirectement, d'intégrales indéfinies considérées comme fonctions de leurs variables *principales;* celles dont nous allons nous occuper, et auxquelles le grand nom d'Euler a été attaché, ont bien toujours l'intégration pour origine première, mais elles sont fonctions de variables *paramétriques* accompagnant la variable principale dans certaines intégrales définies artificielles (238* *et suiv.*). Leurs propriétés sont fort curieuses, ainsi que leurs points de contact, soit entre elles, soit avec le logarithme, l'exponentielle et les fonctions circulaires.

Pour établir leur existence, nous nous appuierons sur deux lemmes qui d'ailleurs sont utiles dans beaucoup de circonstances analogues, et que nous commencerons par démontrer.

I. *Sur un chemin d'intégration* (*limité*) *où* $f(x)$ *offre une phase singulière en* $x = \alpha$ *seulement, l'intégrale définie artificielle* $\int f(x)\,dx$ *existe, s'il est possible d'assigner un exposant positif* $\mu < 1$ (212), *tel que le produit* $\Phi(x) = (x-\alpha)^{\mu} f(x)$ *soit fini quand* x *tend vers* α.

Nous supposerons pour fixer les idées, que cette valeur singulière α est précisément la limite supérieure de l'intégrale considérée

$$\int_{x_0}^{\alpha} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\alpha} (x-\alpha)^{-\mu}\Phi(x)\,dx,$$

et en appelant q quelque exposant positif (entier si on le veut)

qui soit $> \frac{1}{1-\mu}$, en opérant la substitution $x = \alpha + t^q$, d'où $dx = qt^{q-1}\,dt$, puis en posant $t_0 = (x_0 - \alpha)^{\frac{1}{q}}$, nous changerons notre intégrale en celle-ci

$$q\int_{t_0}^{0} t^{(1-\mu)q-1}\Phi(\alpha + t^q)\,dt,$$

dont le chemin d'intégration est évidemment limité aussi, et, relativement à la fonction placée sous le signe, ne contient toujours que la valeur singulière $t = 0$.

Or cette intégrale existe (**242***, I), parce que la fonction placée sous le signe est maintenant finie pour $\lim t = 0$; effectivement son second facteur $\Phi(\alpha + t^q)$ est tel par hypothèse, et l'autre est infiniment petit à cause de $(1-\mu)q - 1 > 0$ (**212** *bis*).

II. *Quand $f(x)$ est olotrope sur un chemin d'intégration conduisant x de x_0 à l'infini, mais cela d'une manière telle que $\frac{1}{x}$ parcoure en même temps un chemin limité, l'intégrale définie artificielle*

$$(1) \qquad \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx,$$

prise sur ce chemin, existe s'il est possible d'assigner un exposant positif $\nu > 1$, tel que le produit $\Psi(x) = x^\nu f(x)$ soit fini quand x s'éloigne indéfiniment sur ce chemin.

Nous supposerons d'abord que le chemin illimité en question ne contient pas la valeur $x = 0$, et en opérant la substitution $x = \frac{1}{t}$, d'où $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, puis en posant $t_0 = \frac{1}{x_0}$, nous changerons notre intégrale

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\infty} x^{-\nu}\Psi(x)\,dx$$

en

$$(2) \qquad -\int_{t_0}^{0} t^{\nu-2}\Psi\left(\frac{1}{t}\right)dt,$$

dont le chemin d'intégration, limité par hypothèse, ne peut évidemment contenir d'autre valeur de t, qui soit singulière pour la fonction placée maintenant sous le signe, que $t=0$.

Or $2-\nu$ étant <1 algébriquement, à cause de $1-\nu<0$, il existe certainement quelque quantité positive μ comprise entre $2-\nu$ et 1, et le produit de cette fonction par t^μ est fini en $t=0$; car son dernier facteur $\Psi\left(\frac{1}{t}\right)$ est tel par hypothèse, et son autre facteur $t^{\mu-(2-\nu)}$ a un exposant positif (**212** *bis*). L'intégrale (2) existe donc (I) et, par suite, la proposée (1) aussi.

Si le chemin d'intégration illimité dont il s'agit contient la valeur $x=0$, son partage en deux tronçons, l'un limité, l'autre illimité, mais ne contenant plus cette valeur, décomposera l'intégrale (1) en deux autres existant, la première parce qu'elle est naturelle, la seconde parce que les considérations précédentes lui sont devenues applicables.

429. En supposant x réelle non <0 ni >1, appelant p, q deux quantités positives quelconques et x^{p-1}, $(1-x)^{q-1}$ les valeurs de $e^{(p-1)lx}$, $e^{(q-1)l(1-x)}$ correspondant aux déterminations réelles des logarithmes (**212**), on définit l'intégrale *eulérienne de première espèce* par la formule

$$(3) \qquad B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,$$

où l'intégration doit être effectuée sur le segment de l'axe des quantités réelles, ayant $x=0$, $x=1$ pour extrémités.

La fonction à intégrer $f(x)$ cesse d'être olotrope seulement en $x=0$ quand p n'est pas un entier positif, et en $x=1$ pour les mêmes valeurs de q (*loc. cit.*); mais cette intégrale artificielle n'en existe pas moins, car les inégalités algébriques $1-p<1$, $1-q<1$ permettent évidemment d'assigner des exposants positifs μ_0, μ_1 inférieurs à 1 et tels que les produits $x^{\mu_0}f(x)$, $(x-1)^{\mu_1}f(x)$ soient finis, le premier pour $\lim x=0$, le second pour $\lim x=1$ (**428**, I).

Il est évident que *l'intégrale* (3) *est une quantité positive qui décroît toujours quand l'un des exposants p, q vient à croître;* car si l'on a par exemple $p'<p''$, on a aussi, pour toute valeur réelle

de x comprise entre o et 1,

$$x^{p'-1}(1-x)^q > x^{p''-1}(1-x)^q,$$

d'où, en intégrant de o à 1, $B(p', q) > B(p'', q)$ (28).

On a en outre

$$B(p, q) = B(q, p),$$

car la substitution de $1-t$ à x change la différentielle en

$$-t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt,$$

et le chemin d'intégration en ce qu'il devient quand on le parcourt en sens contraire.

430. Nous utiliserons incessamment les formules suivantes.

I. *Quel que soit l'entier positif n, on a*

$$(4)\quad B(p, q+n) = \frac{q(q+1) \qquad (q+n-1)}{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+n-1)} B(p, q).$$

L'intégration indéfinie par parties (270*), (83) donne

$$\int x^{p-1}(1-x)^q\,dx = \frac{x^p(1-x)^q}{p} + \frac{q}{p}\int x^p(1-x)^{q-1}\,dx,$$

d'où, en remarquant que p, q étant positifs le premier terme du second membre s'évanouit pour $x = 0$ et $= 1$ (212 *bis*),

$$B(p, q+1) = \frac{q}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Si sous cette dernière intégrale on remplace un facteur x par $1-(1-x)$, elle devient

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx - \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q\,dx = B(p, q) - B(p, q+1),$$

et la relation précédente donne facilement

$$(5)\qquad B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q),$$

d'où la formule (4) en attribuant successivement à q dans celle-ci

les valeurs q, $q+1$, ..., $(q+n-1)$, puis multipliant membre à membre.

II. *On a*

$$B(p, n+1) = \frac{1}{p}\frac{1.2\ldots n}{(p+1)\ldots(p+n)}. \tag{6}$$

Pour $q=1$, la formule (4) donne effectivement

$$B(p, n+1) = \frac{1.2\ldots n}{(p+1)(p+2)\ldots(p+n)} B(p, 1),$$

et l'on a évidemment

$$B(p, 1) = \int_0^1 x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}.$$

431. On définit l'intégrale *eulérienne de deuxième espèce* par la formule

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx, \tag{7}$$

p étant toujours une quantité positive, et l'intégration devant être exécutée sur la partie positive de l'axe des quantités réelles. C'est encore une intégrale définie artificielle, parce que le chemin d'intégration est illimité, et que la fonction sous le signe entre dans une phase singulière en $x=0$, quand p n'est pas un entier positif.

Pour nous assurer de son existence, nous appellerons x_1 une quantité positive quelconque et nous la décomposerons en

$$\int_0^{x_1} x^{p-1} e^{-x}\,dx + \int_{x_1}^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx,$$

intégrales auxquelles les lemmes du n° **428** sont applicables. Dans la première effectivement, la fonction à intégrer $f(x)$ ne peut cesser d'être olotrope qu'en $x=0$; mais, comme ci-dessus (**429**), on peut toujours trouver un exposant $\mu>0$ et <1, qui rende le produit $x^\mu f(x)$ fini pour $\lim x = 0$. Dans la seconde, $f(x)$ est toujours olotrope, et, si l'on appelle ν un exposant *quelconque,* le produit $x^\nu f(x) = \frac{x^{\nu+p-1}}{e^x}$ est toujours infiniment petit, à plus forte

raison fini, pour une valeur de x infinie positive; ceci résulte de la discussion de ce rapport qui n'offre aucune difficulté (*Cf.* **207**).

Il est évident que l'intégrale (7) est toujours une quantité positive.

Des discussions précédentes, on conclut encore que les intégrales (3), (7) ne cessent pas d'exister quand p, q sont des quantités imaginaires à premiers éléments positifs. En développant, soit $(1-x)^{q-1}$ en série entière par rapport à x, soit x^{p-1} en série entière par rapport à $x-1$, puis intégrant terme à terme les séries en lesquelles cette opération transforme les fonctions à intégrer, on prouverait facilement aussi que ces mêmes intégrales sont infinies dans tous autres cas. Mais ces constatations nous sont inutiles.

432. *L'intégrale eulérienne de deuxième espèce se rattache à celle de première espèce par la formule*

$$\Gamma(p) = \lim[n^p B(p, n+1)], \tag{8}$$

où n désigne un entier positif qui croît indéfiniment.

La substitution $x = \frac{t}{n}$ donne immédiatement

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^n\,dx = \frac{1}{n^p}\int_0^n t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$$

c'est-à-dire

$$n^p B(p, n+1) = \Gamma_n(p),$$

en posant, pour abréger,

$$\Gamma_n(p) = \int_0^n t^{p-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt. \tag{9}$$

Pour toute valeur positive et fixe de t, et pour toute valeur de n supérieure à t, la quantité positive

$$\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$$

croît avec n en tendant vers e^{-t} pour n infini (*Cf.* **213**), à cause de

$$l\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = nl\left(1-\frac{t}{n}\right) = -t - t\left[\frac{1}{2}\frac{t}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{t}{n}\right)^2 + \dots\right];$$

de plus elle est égale à e^{-t} en $t = 0$, inférieure à e^{-t} ailleurs, même pour $t = n$ puisqu'elle s'évanouit alors.

On en conclut immédiatement (28) qu'en appelant $T_1 < T_2$ deux quantités positives invariables quelconques, et supposant n supérieur à toutes deux, les trois quantités positives

$$[0, T_1]_n, \quad [T_1, T_2]_n, \quad [T_2, n]_n,$$

valeurs de l'intégrale (9) prise successivement de 0 à T_1, de T_1 à T_2, de T_2 à n, croissent avec n en restant respectivement inférieures à

$$[0, T_1], \quad [T_1, T_2], \quad [T_2, \infty],$$

valeurs (positives) de l'intégrale (7) prise de 0 à T_1, de T_1 à T_2, de T_2 à l'infini. On en conclut encore

$$\lim [T_1, T_2]_n = [T_1, T_2].$$

A cause de

$$\Gamma(p) = [0, T_1] + [T_1, T_2] + [T_2, \infty],$$
$$\Gamma_n(p) = [0, T_1]_n + [T_1, T_2]_n + [T_2, n]_n,$$

la différence $\Gamma(p) - \Gamma_n(p)$ est ainsi positive et décroît toujours quand n augmente. Elle peut, en outre, être rendue inférieure à toute quantité positive ε; car, étant évidemment inférieure à

$$\{[T_1, T_2] - [T_1, T_2]_n\} + [0, T_1] + [T_2, \infty],$$

il suffit de prendre T_1 assez petit, T_2 puis n assez grands, pour que les dernières parties de cette expression et la première ensuite soient chacune $< \frac{\varepsilon}{3}$. La différence en question est donc infiniment petite, ce que nous avions à constater.

433. *On a*

$$(10) \qquad \Gamma(p) = \lim \left[\frac{n^p}{p} \frac{1.2..n}{(p+1)(p+2)\dots(p+n)} \right].$$

Cette formule, qui est fondamentale dans la théorie de la fonction $\Gamma(p)$, est une conséquence immédiate de celles inscrites sous les nos (6) et (8) ci-dessus.

434. *L'intégrale de première espèce s'exprime au moyen de celle de deuxième espèce par la formule*

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{11}$$

I. *Pour toutes valeurs (positives) de p, q, et pour n infini, on a*

$$\lim \frac{B(p, n+q)}{B(p, n+1)} = 1.$$

Quand $q = 1$, la chose est évidente.

Quand q est un entier > 1, la formule (4) donne, par la substitution de $n+1$ à q et de $q-1$ à n,

$$\frac{B(p, n+q)}{B(p, n+1)} = \frac{n+1}{p+n+1} \cdot \frac{n+2}{p+n+2} \cdots \frac{n+q-1}{p+n+q-1},$$

et chacune de ces $q-1$ fractions tend vers 1.

Quand q est compris entre les entiers non nuls $Q' < Q''$, on a (429)

$$B(p, n+Q') > B(p, n+q) > B(p, n+Q''),$$

et le rapport considéré est compris entre les fractions

$$\frac{B(p, n+Q')}{B(p, n+1)}, \quad \frac{B(p, n+Q'')}{B(p, n+1)}$$

qui tendent toutes deux vers 1 par ce qui précède.

Quand enfin q est < 1, on tire de la relation (5)

$$\frac{B(p, n+q)}{B(p, n+1)} = \frac{p+n+q}{n+q} \frac{B(p, n+q+1)}{B(p, n+1)},$$

moyennant quoi les choses se passent de la même manière à cause de $q+1 > 1$.

II. Maintenant les formules (4) et (6) donnent immédiatement

$$B(p,q) = \left[1.2\ldots n \frac{(p+q)(p+q+1)\ldots(p+q+n-1)}{p(p+1)\ldots(p+n)q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right] \frac{B(p,n+q)}{B(p,n+1)},$$

d'où la relation (11); car, en supposant n infini, le dernier facteur tend vers 1 (I), et le premier est égal à $\frac{n}{p+n} \frac{U_{n-1}V_{n-1}}{W_{n-1}}$, si l'on

appelle U_{n-1}, V_{n-1}, W_{n-1} ce que devient l'expression entre crochets dans la formule (10), quand on y écrit $n-1$ à la place de n et qu'on y donne à p les valeurs p, q, $p+q$.

Propriétés essentielles de la fonction $\Gamma(x)$.

435. *L'expression*

$$(1)\qquad \Pi(x, n) = \frac{n^x}{x}\,\frac{1.2\ldots n}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)},$$

déduite de celle du n° 433 par la substitution à p d'une variable indépendante x, où n^x est toujours la valeur de $e^{xl(n)}$ correspondant à la détermination réelle de $l(n)$, a pour limite une fonction de x qui est indéfiniment méromorphe.

I. Comme on peut écrire

$$n^x = \left[\frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}\right]^x\left(\frac{n}{n+1}\right)^x$$
$$=\left(1+\frac{1}{1}\right)^x\left(1+\frac{1}{2}\right)^x\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(\frac{n}{n+1}\right)^x,$$

$\Pi(x,n)$ est égale au produit des $(n+1)$ premiers facteurs de la série factorielle

$$(2)\qquad \frac{1}{x}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)^x}{1+\frac{x}{2}}\cdots\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}\cdots$$

par $\left(\frac{n}{n+1}\right)^x$, et comme cette dernière quantité tend vers 1 quelle que soit x, il nous suffit de prouver que cette série a un produit indéfiniment méromorphe. Nous pourrions raisonner directement, en nous appuyant sur le théorème général du n° 371; mais ici, il vaut mieux procéder indirectement comme il suit.

II. En appelant ν un entier positif choisi à volonté, puis supposant $n>\nu$, $\operatorname{mod} x \leqq \nu$, $\frac{1}{n}$ et $\operatorname{mod}\frac{x}{n}$ sont <1, et l'on a

$$l\left(1+\frac{1}{n}\right)^x = x\,l\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{x}{n}-\frac{x}{2n^2}+\frac{x}{3n^3}\cdots,$$
$$l\left(1+\frac{x}{n}\right) = \frac{x}{n}-\frac{x^2}{2n^2}+\frac{x^3}{3n^3}\cdots,$$

où les logarithmes sont, dans la première formule, celui qu'il nous faut adopter, dans la seconde celui que nous adopterons; et à l'intérieur du cercle [ν] qui a l'origine O_x pour centre avec ν pour rayon, ces deux fonctions sont olotropes, avec des olomètres, illimité pour la première, égal à $n-\nu$ pour la seconde, par suite toujours égaux à 1 au moins.

En appelant u_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ facteur de la série (2), on aura ainsi

$$l(u_n)=xl\left(1+\frac{1}{n}\right)-l\left(1+\frac{x}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left[\frac{x^2-x}{2}-\frac{x^3-x}{3n}+\frac{x^4-x}{4n^2}-\ldots\right],$$

fonction encore olotrope dans le cercle [ν], avec un olomètre égal à 1 au moins quel que soit $n>\nu$. Dans le même cercle en outre, on a évidemment, quelle que soit x,

$$\operatorname{mod} l(u_n)<\frac{1}{n^2}\left[\frac{\nu^2+\nu}{2}+\frac{\nu^3+\nu}{3(\nu+1)}+\frac{\nu^4+\nu}{4(\nu+1)^2}+\ldots\right],$$

quantité positive où la série entre crochets est visiblement convergente, et qui est elle-même le terme de rang n dans une série convergente (273, I).

On en conclut (275* *bis*) que, dans le cercle [ν], la série

$$(3) \qquad l(u_{\nu+1})+l(u_{\nu+2})+\ldots$$

a pour somme une fonction de x, $f_{\nu+1}(x)$, qui y est olotrope avec 1 pour olomètre, puis, en repassant des logarithmes aux nombres, que l'on a

$$u_{\nu+1}u_{\nu+2}\ldots=e^{f_{\nu+1}(x)},$$

fonction de x encore olotrope dans le même cercle avec le même olomètre.

Le produit $F_{\nu+1}(x)$ des $(\nu+1)$ premiers facteurs de la série factorielle (2) étant d'autre part une fonction de x évidemment méromorphe à l'intérieur du même cercle, cette série a un produit

$$F_{\nu+1}(x)e^{f_{\nu+1}(x)}$$

qui jouit de la même propriété, qui, par suite, est indéfiniment méromorphe, puisque le rayon ν de ce cercle est arbitraire.

436. Au n° **433**, nous avons vu que la limite de l'expression (1) est égale à $\Gamma(p)$ pour toute valeur réelle et positive p attribuée à x, et jusqu'ici aucun sens n'a été donné au signe $\Gamma(x)$ pour d'autres valeurs de x. Il est donc naturel et avantageux d'employer le même signe à la représentation de cette nouvelle fonction méromorphe dont voici les premières propriétés.

I. *Pour seuls infinis, tous simples, elle a les entiers non positifs*

$$\ldots, \quad -n, \quad -n+1, \quad \ldots, \quad -2, \quad -1, \quad 0.$$

Car on a (**435**, II)

$$(4) \qquad \Gamma(x) = F_{\nu+1}(x)\, e^{f_{\nu+1}(x)},$$

et dans le cercle $[\nu]$ de rayon quelconque, le dernier facteur ne peut ni s'évanouir ni devenir infini puisque c'est une exponentielle dont l'exposant est olotrope, tandis que le premier facteur a évidemment les seuls infinis

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad \ldots, \quad -\nu,$$

tous simples.

II. *Le résidu de* $\Gamma(x)$ *relatif à l'infini* $-k$ *est*

$$\frac{(-1)^k}{1.2\ldots k}.$$

Car en faisant $x = -k$ dans le produit de l'expression (1) par $x+k$, il reste le produit de cette quantité par l'expression

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}$$

qui a 1 pour limite.

Les fonctions simples fournies par la décomposition de $\Gamma(x)$ (39) forment donc la série

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{1}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2}\,\frac{1}{x+2} - \ldots,$$

ayant visiblement pour somme une fonction $\gamma(x)$ indéfiniment méromorphe. *La différence*

$$\Gamma(x) - \gamma(x)$$

est donc indéfiniment olotrope.

III. *La fonction* $\Gamma(x)$ *n'a aucun zéro.*

Car le premier facteur de l'expression (4) n'en a point, ni le second non plus dans le cercle [ν] comme nous l'avons déjà dit (I).

Il en résulte que $\frac{1}{\Gamma(x)}$ *est une fonction indéfiniment olotrope;* elle l'est effectivement aux infinis de $\Gamma(x)$ puisque celle-ci y est méromorphe (**42**), puis partout ailleurs comme inverse arithmétique d'une fonction qui y est olotrope sans s'évanouir (**250***, II).

IV. L'expression (1) étant, quel que soit n, réelle pour toute valeur réelle de x, et positive pour toute valeur positive de x, *il en est de même pour sa limite* $\Gamma(x)$.

Quand x est réelle, cette fonction ne peut changer de signe qu'aux moments où x passe par ses infinis, puisqu'elle ne peut s'évanouir (III); et alors son signe change effectivement, parce que tous ces infinis sont simples (I). Comme elle est positive de $x = 0$ à $x = +\infty$, elle est donc négative de 0 à -1, redevient positive de -1 à -2, etc.

On a

$$\Gamma(1) = 1, \tag{5}$$

à cause de

$$\Pi(1, n) = \frac{n}{n+1}.$$

437. De ce que nous avons dit tout à l'heure (**435**, II), et du n° **275*** *bis,* il résulte que la série (3) est de celles qui peuvent être indéfiniment différentiées ou intégrées terme à terme. En considérant donc $\Gamma(x)$ comme le produit de la série factorielle (2), et prenant les logarithmes comme nous l'avons fait, il vient

$$l\Gamma(x) = l\left(\frac{1}{x}\right) + l(u_1) + \ldots + l(u_n) + \ldots,$$

puis en différentiant une fois

$$\frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\frac{1}{x} + \ldots + \left[l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}\right] + \ldots. \tag{6}$$

On a d'autre part, pour $n > 0$,

$$(7)\qquad l\left(1+\frac{1}{n}\right) = -l\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + c_n,$$

où

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n+1}\right)^3 + \ldots,$$

et la série

$$(8)\qquad c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots$$

est convergente, à cause de

$$c_n < \frac{1}{2}\,\frac{1}{(n+1)^2}\,\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}} < \frac{1}{(n+1)^2},$$

terme général d'une série convergente (**273**, I). En faisant donc la substitution (7) dans le terme général de la série (6), sommant à part les quantités c_n et représentant par $-C+1$ la somme de la série (8), la formule (6) prend la forme suivante, qu'on lui préfère,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dl\Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} &= -C + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right) + \ldots \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+x}\right) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

La quantité C, valeur de $-\Gamma'(1)$ à cause de $\Gamma(1) = 1$, est positive; des artifices que nous ne pouvons rapporter donnent effectivement

$$C = 0{,}5772156649\ldots.$$

On la nomme la *constante d'Euler*.

438. En différentiant encore l'une ou l'autre des relations (6), (9), on arrive à cette autre

$$(10)\qquad \frac{d^2 l\Gamma(x)}{dx^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots,$$

très simple et très employée aussi dans les questions se rattachant à la théorie de la fonction Γ.

Elle donne des indications utiles à la discussion de $\Gamma(x)$ pour

des valeurs réelles de x. Comme alors son second membre est essentiellement positif quand il n'est pas infini, $\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ dont il est la dérivée est une fonction toujours croissante ne pouvant par suite éprouver qu'un seul changement de signe, en s'annulant, entre deux infinis consécutifs de $\Gamma(x)$, de o à $+\infty$ aussi, et $\Gamma'(x)$ jouit de la même propriété parce que $\Gamma(x)$ conserve un signe constant dans chacun de ces intervalles.

D'ailleurs ce changement de signe unique s'effectue toujours : 1° entre o et $+\infty$, pour une valeur μ de x comprise entre 1 et 2, parce que $\Gamma(x)-1$ s'évanouissant pour $x=1$ et $=2$ (**436**, IV), (**439**, *inf.*), sa dérivée $\Gamma'(x)$ s'annule certainement dans cet intervalle (**23**); 2° entre -1 et o, parce que, ε étant une quantité positive infiniment petite, $\Gamma(x)$ est infinie négative, partant croissante en $x=-1+\varepsilon$, infinie négative encore, partant décroissante en $x=-\varepsilon$; etc.

De $x=0$ à $x=\mu$, $\Gamma(x)$ décroît donc de $+\infty$ à un certain minimum (positif et <1), pour croître sans cesse ensuite de $x=\mu$ à $x=+\infty$, et cela indéfiniment (**439**, *inf.*).

439. Nous passons aux propriétés spécifiques de cette fonction.

On a l'identité

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x). \tag{11}$$

Car la formule (1) donne immédiatement

$$\frac{\Pi(x+1,\,n)}{\Pi(x,\,n)}=x\,\frac{n}{x+n+1},$$

où le dernier facteur tend vers 1.

Quand x est un nombre entier positif N, cette identité combinée avec l'égalité (5) conduit immédiatement à

$$\Gamma(N)=1.2.3\ldots(N-1),$$

moyennant quoi $\Gamma(x)$ augmente sans limite pour des valeurs positives de x indéfiniment croissantes (**438**).

440. *On a identiquement*

$$(11\ bis)\qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

La formule (1) donne immédiatement

$$\Pi(x,\ n)\Pi(1-x,\ n)=\frac{1}{P_n(x)}\,\frac{n}{n-x+1},$$

$P_n(x)$ désignant le produit (1) du n° **285**, construit avec $\Pi=1$, en écrivant n à la place de k. A la limite, il vient donc bien

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{1}{o(x,\ 1)}=\frac{\pi}{\sin\pi x}\quad(293).$$

Pour $x=\frac{1}{2}$, on trouve en particulier

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},$$

où il faut prendre la détermination positive du radical, parce que $\Gamma(x)$ est positive en même temps que x. Cette égalité est utile dans plusieurs circonstances.

441. *Pour tout entier positif k, on a enfin*

$$(12)\qquad k^{kx}\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{k}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{k-1}{k}\right)}{\Gamma(kx)}=(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}k^{\frac{1}{2}},$$

où les radicaux du second membre doivent être pris positivement.

I. En appelant j un entier positif quelconque, on a

$$\begin{aligned}(x+j)\left(x+\frac{1}{k}+j\right)\cdots\left(x+\frac{k-1}{k}+j\right)\\=\frac{[kx+jk][kx+jk+1]\ldots[kx+jk+k-1]}{k^k},\end{aligned}$$

d'où, en faisant $j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, puis multipliant membre à

membre, on tire facilement

$$\Pi(x,n)\Pi\left(x+\frac{1}{k},n\right)\dots\Pi\left(x+\frac{k-1}{k},n\right)$$

$$=\frac{n^{kx}n^{\frac{k-1}{2}}k^{(n+1)k}(1.2\dots n)^k}{kx(kx+1)\dots(kx+nk+k-1)}$$

$$=\left[\frac{1}{k^{kx}}\Pi(kx,nk+k-1)\right]\left[\frac{nk}{nk+k-1}\right]^{kx}V_n,$$

où V_n dépend de n, mais non de x.

Le facteur médian tendant vers 1 quelle que soit x, et le quotient du premier membre par le premier facteur du dernier ayant évidemment pour limite le premier membre $\mathcal{G}(x)$ de la formule (12), V_n a nécessairement une limite V, naturellement indépendante de x, et l'on a

$$\mathcal{G}(x)=V.$$

On arriverait donc directement à la formule (12) en cherchant $V=\lim V_n$; mais il vaut mieux opérer indirectement comme il suit.

II. Comme V est une constante, la relation précédente donne en particulier $V=\mathcal{G}(0)$, c'est-à-dire, en remarquant que, pour $\lim x=0$, on a $\lim k^{kx}=1$ et $\lim[x\Gamma(x)]=1$ (436, II), d'où $\lim[x\Gamma(kx)]=\frac{1}{k}$,

$$V=k\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right),$$

quantité qu'il nous reste à calculer.

En élevant au carré les deux membres de cette égalité et ayant égard à $\Gamma\left(\frac{j}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{j}{k}\right)=\frac{\pi}{\sin j\frac{\pi}{k}}$ (440), il vient

$$V^2=\frac{k^2\pi^{k-1}}{H},$$

où

$$H=\sin\frac{\pi}{k}\sin 2\frac{\pi}{k}\cdots\sin(k-1)\frac{\pi}{k}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}\left(1-e^{\frac{2\pi i}{k}}\right)\left(1-e^{2\frac{2\pi i}{k}}\right)\dots\left(1-e^{(k-1)\frac{2\pi i}{k}}\right)}{2^{k-1}i^{k-1}e^{\frac{\pi i}{k}}e^{2\frac{\pi i}{k}}\dots e^{(k-1)\frac{\pi i}{k}}},$$

en exprimant les sinus au moyen d'exponentielles.

Le produit des exponentielles figurant au dénominateur se réduit à

$$e^{(k-1)\frac{\pi i}{2}} = \left(e^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{k-1} = i^{k-1};$$

celui des binômes figurant au numérateur est k, valeur de

$$\frac{t^k - 1}{t - 1}$$

pour $t = 1$, parce que leurs seconds termes sont précisément les racines autres que 1, de l'équation binôme $t^k - 1 = 0$ (**201**, VI). Moyennant quoi, il reste simplement

$$H = \frac{k}{2^{k-1}},$$

d'où

$$V^2 = (2\pi)^{k-1} k, \qquad V = (2\pi)^{\frac{k-1}{2}} k^{\frac{1}{2}},$$

puis la formule (12) que nous avions à établir. Les radicaux doivent être pris positivement, parce que son premier membre est positif pour toute valeur positive de x.

442. Les propriétés de la fonction $\Gamma(x)$ dont nous venons de parler, et d'autres artifices dans le détail compliqué desquels il nous est impossible d'entrer, rendent relativement facile la construction d'une Table de ses valeurs (ou plutôt de celles de son logarithme) pour les valeurs positives de x, et la formule (11) permet de limiter son étendue à l'intervalle compris entre 1 et 2 par exemple; l'emploi de la formule (11 *bis*) permettrait même d'abaisser à $\frac{1}{2}$ la limite supérieure de cet intervalle. Cette Table est utile au calcul numérique de beaucoup d'intégrales définies réductibles aux intégrales eulériennes.

Quand x est une quantité positive très grande, une formule curieuse, que nous ne pouvons pas non plus faire connaître, fournit pour $l\Gamma(x)$ une expression très simple et d'autant plus approchée que la valeur de x est plus grande. Elle permet ainsi (**439**) d'évaluer rapidement et avec une grande approximation le produit $1.2\ldots(N-1)$ quand N est un entier considérable, question fort importante dans certaines applications de

l'Analyse combinatoire, qui trouve ainsi des ressources inattendues dans la théorie de la fonction Γ.

D'après l'équation différentielle (10), la fonction $\Gamma(x)$ peut être considérée comme engendrée par deux intégrations successives d'un *tronçon illimité* du développement de la fonction $\xi_2(x, 1)$ (**278**, IV, 3°), accompagnées d'une détermination convenable des constantes arbitraires et suivies du passage des logarithmes aux nombres. Cette observation fait présumer que trois intégrations, exécutées sur telles ou telles parties illimitées du développement de $\Xi_3(x)$ (**342**) et suivies des mêmes opérations accessoires, conduiraient peut-être à de nouvelles fonctions méromorphes ressemblant plus ou moins à la fonction Γ.

FIN DE LA DEUXIÈME PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES

DE LA DEUXIÈME PARTIE.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DE LA DEUXIÈME PARTIE.

20080 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

